

PEMODELAN GERAK ORBIT PLANET SECARA KOMPUTASI MENGGUNAKAN MATLAB

ARIF BAGUS PRAKOSO*, HIMAWAN ADITYAS, MUTAHHARI NURHAQI, SETIANTO

*Departemen Fisika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Padjadjaran
Jl. Raya Bandung-Sumedang Km 21, Jatinangor 45363*

*email : arifbagusprakoso@gmail.com

Abstrak. Hukum Kepler menyebutkan bahwa bentuk lintasan planet pada umumnya berbentuk elips dengan eksentrisitas tertentu. Studi ini berfokus pada perbandingan dan penggunaan metode komputasi pada planet dan hasilnya. Metode yang lebih baik digunakan untuk variasi kecepatan dan pemodelan gerak planet. Dari dua metode yang digunakan; Euler dan Runge-Kutta orde 4; diperoleh metode Runge-Kutta lebih baik dalam hal kecepatan dan keakuratan. *Step* optimal diperoleh dengan besar 0.002. Orbit planet Terrestrial berhasil dimodelkan dan variasi kecepatan bumi yang memenuhi hukum Kepler berada dalam rentang $1.0\pi - 2.0\pi$ AU / tahun.

Kata kunci : hukum Kepler, metode Euler, metode Runge-Kutta

Abstract. Kepler's law state that planet orbit has an elliptical configuration with a certain eccentricity. This study is focused on comparison and application of computation methods for planet orbit as well as its results. Preferrable method is further used for velocity variation and planet motion modelling. Within two methods choosen; Euler and 4 order Runge-Kutta; Runge-Kutta method is attested for better speed and accuracy. Using optimal step of 0.002, terrestrial planet orbit is successfully modelled and Earth velocity variation of range $1.0\pi - 2.0\pi$ AU / year is proved fulfilling Kepler's law.

Keywords : Kepler's law, Euler's method, Runge-Kutta's method

1. Pendahuluan

Pergerakan benda luar adalah materi yang pembahasannya memerlukan numerik dan simulasi. Kondisi-kondisi tertentu; seperti benda berkecepatan tinggi serta tumbukannya [1] serta dengan adanya gangguan dalam arah radial, transversal, normal, dan orbital [2] dipelajari dengan perhitungan aproksimasi. Bentuk lintasan orbit juga dapat ditentukan melalui simulasi Monte-Carlo dengan data yang diperoleh dari detektor horizon [3]. Selain dari parameter kecepatan, gravitasi, dan massa[1], komputasi berhasil menentukan konfigurasi dinamik yang stabil berdasarkan gerak spin objek serta kecepatan maksimumnya[4]. Dalam pergerakan mode tunggal, aproksimasi Lei *et al.* (2018) menunjukkan ekspansi polinomial dapat menggambarkan gerak spin yang beramplitudo kecil.

Studi ini berfokus pada analisis orbit sistem benda tunggal dan bintang melalui nilai posisi awal dan kecepatan awal yang diiterasi [3]. Scheeres (2009) menilai sistem yang tidak melebihi lima benda akan menghasilkan konfigurasi yang stabil. Pemodelan numerik diselesaikan dengan menipulasi persamaan Kepler yang merupakan dasar dari bentuk orbit planet. Bentuk diskrit dari permasalahan kepler dapat diselesaikan melalui metode ekstrapolasi spesial dan integrasi numerik [6]. Namun, bentuk diskrit yang efisiensinya belum diuji menjadi hambatan penggunaan solusi ini. Secara numerik, beberapa metode telah menjadi landasan algoritma penyelesaian persamaan Kepler; seperti Laguerre-Conway [5], Newton-Raphson [9], serta iterasi Newton yang memiliki konvergensi menuju nol untuk $e \rightarrow 0$ [7]. Dari sini, kami telah berhasil membandingkan pemodelan orbit benda langit dengan metode Runge-Kutta orde 4 dan Euler melalui variasi *step*. Pemodelan lintasan gerak planet terrestrial serta percobaan variasi kecepatan benda (bumi) untuk melihat stabilitasnya telah berhasil divisualisasikan.

2. Metode Penelitian

Hukum yang dapat menjelaskan tentang gerak orbit planet yaitu hukum Kepler. Kepler merumuskan tiga hukum yang menjelaskan gerakan planet di tata surya atau biasa disebut dengan Hukum Kepler. Berikut ini kesimpulan dari ketiga hukum Kepler [13].

1. Semua orbit planet berbentuk elips dimana matahari terletak di salah satu titik fokusnya.
2. Vektor radius yang menghubungkan planet ke matahari menyapu luas yang sama dengan interval waktu yang sama.
3. Kuadrat dari periode orbit planet berbanding lurus dengan kubik dari radius orbit major.

Hukum pertama Kepler mengindikasikan bahwa orbit planet berbentuk lingkaran pada kasus sangat khusus dan umumnya berbentuk elips. Tingkat ke-elips-an suatu orbit ditentukan berdasarkan yang disebut eksentrisitas orbit dimana bentuk orbit bergantung pada nilai eksentrisitas [11].

Hukum kedua Kepler menerangkan bahwa pada orbit elips, dalam waktu yang sama di sembarang titik lintasan vektor radius planet – matahari menyapu luasan daerah yang sama. Hukum ini menghasilkan model sistem isolasi momentum sudut. Pada kasus ini, torsi planet adalah nol karena gaya gravitasi paralel dengan vektor r dan momentum sudut adalah konstan [11].

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \frac{L}{m} \quad (1)$$

Dimana L dan m adalah konstan maka hasil derivasi dari $\frac{dA}{dt}$ adalah konstan sehinggadapat dikatakan bahwa radius vektor matahari – planet menyapu luas yang sama dengan interval waktu yang sama. Inilah inti dari hukum kedua Kepler yaitu konsekuensi dari konservasi momentum sudut [11].

Hukum Kepler yang ketiga menjelaskan hubungan matematis secara eksplisit antara periode orbit suatu planet dengan ukuran orbitnya. Kuadrat periode suatu planet yang berevolusi mengelilingi Matahari (P) adalah sebanding dengan pangkat tiga jarak rata-ratanya dari Matahari (a). Karena adanya gaya gravitasi, gerak dari planet adalah melingkar sehingga percepatan yang dialaminya adalah percepatan sentripetal sehingga dapat dituliskan

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \quad (2)$$

Dimana a adalah rerata jejari orbit

$$a = \frac{r_{aphelion} + r_{perihelion}}{2} \quad (3)$$

dari persamaan di atas dapat dikatakan bahwa kuadrat periode orbit berbanding lurus dengan kubik radius rerata orbit [13].

Dalam penelitian ini, kami menggunakan perangkat lunak MATLAB (*MatrixLaboratory*) dengan dua metode berbeda yaitu metode Euler dan metode Runge-kutta orde-4. Untuk masing-masing metode diberikan variasi masukkan. Di bawah ini rincian dari setiap metode.

Metode Euler merupakan metode penyelesaian PDB orde satu atau pertama. Pada metode ini, ketika sebuah PDB disajikan dalam bentuk $y' = f(x, y)$ dan menggunakan tebakan awal (x_0, y_0) maka nilai-nilai y berikutnya dapat diperoleh dengan:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Pada metode ini, variasi yang akan diberikan berupa time-step dari metode ini yaitu 0,001 sampai 0,01 dengan rentang variasi 0,001. Dalam penelitian ini, planet yang akan kami teliti adalah planet bumi yang berjarak lebih kurang 1,0 AU terhadap matahari. Metode ini digunakan sebagai pembandingan dengan metode Runge-kutta orde-4.

Metode Runge-Kutta orde 4 merupakan metode yang lebih kecil nilai errornya dibandingkan metode euler sehingga metode inilah yang kami jadikan sebagai perhitungan komputasi gerak orbit suatu planet. Pada Runge-Kutta orde 4, nilai koefisien perbaikan ada 4 yaitu k_1, k_2, k_3, k_4 yang diberikan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(x_r, y_r) \\ k_2 &= h f(x_r + 1/2 h, y_r + 1/2 k_1) \\ k_3 &= h f(x_r + 1/2 h, y_r + 1/2 k_2) \\ k_4 &= h f(x_r + h, y_r + k_3) \\ y_{r+1} &= y_r + 1/6 (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

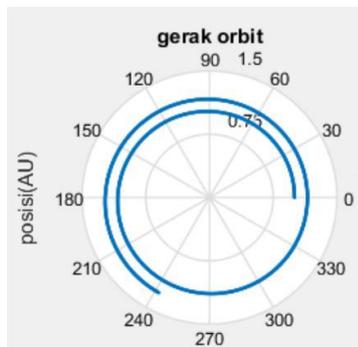
Pada metode ini, planet yang akan diteliti yaitu planet terrestrial. variasi yang akan di berikan yaitu:

- Variasi jejari rerata orbit dalam satuan (AU) untuk setiap planet
- Variasi kecepatan orbital pada aphelion dalam satuan rad/tahun untuk setiap planet
- Variasi time-step setiap planet dalam satuan tahun. Variasi ini digunakan untuk perbandingan dengan metode Euler.

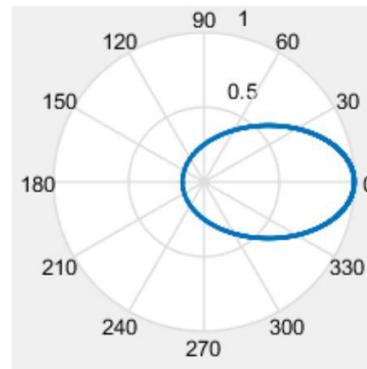
Setelah grafik didapatkan dari kedua metode di atas, kami menganalisa dari grafik yang telah didapat.

3. Hasil dan Pembahasan

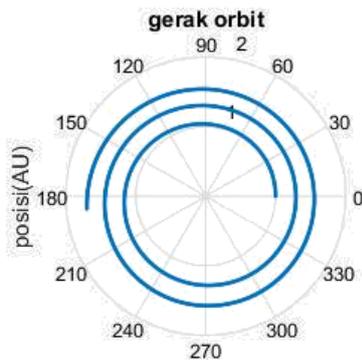
Perbandingan Metode Euler dan Metode Runge-Kutta Orde 4 dalam Variasi *Step* dengan Posisi dalam AU (*Astronomical Unit*).



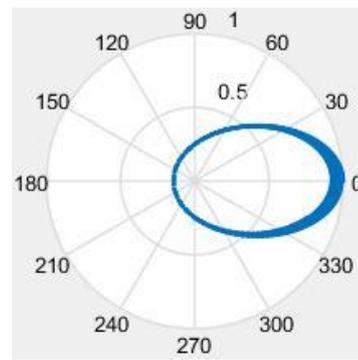
Gambar 1. Bentuk orbitplanet dengan Metode Euler step 0.002



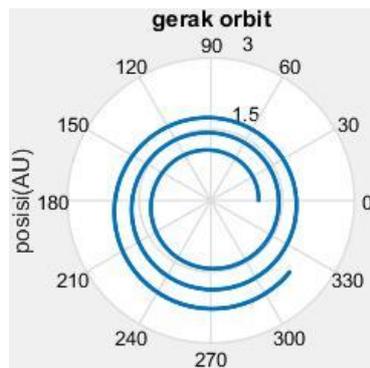
Gambar 2. Bentuk orbitplanet dengan Metode RungeKutta orde 4 step 0.002



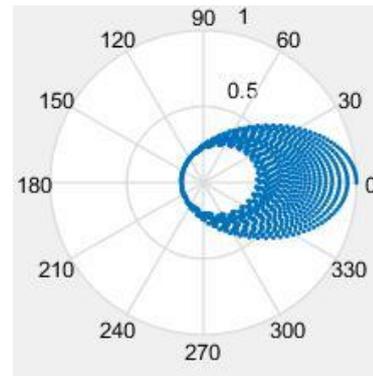
Gambar 3. Bentuk orbitplanet dengan Metode Euler step 0.004



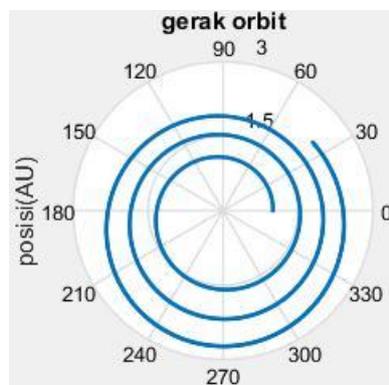
Gambar 4. Bentuk orbitplanet dengan Metode RungeKutta orde 4 step 0.004



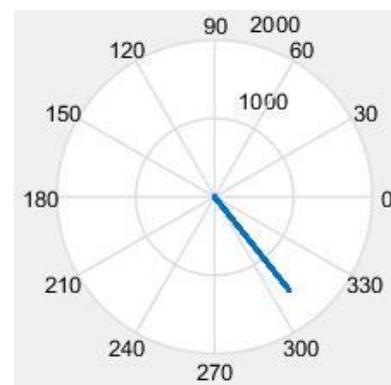
Gambar 5. Bentuk orbitplanet dengan Metode Eulerstep 0.006



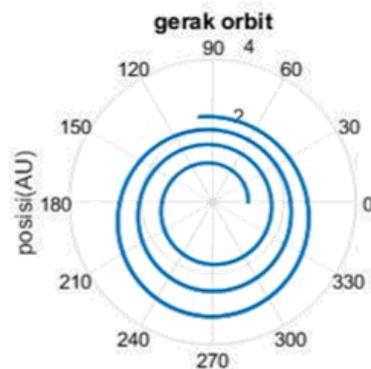
Gambar 6. Bentukorbitplanet dengan MetodeRungeKutta orde 4 step 0.008



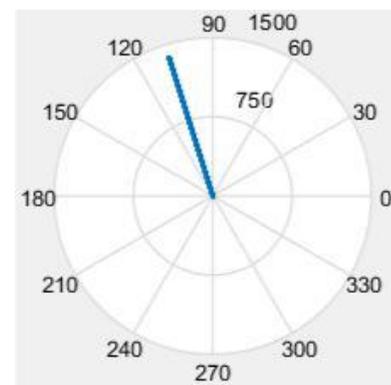
Gambar 7. Bentuk orbitplanet dengan Metode Eulerstep 0.008



Gambar 8. Bentuk orbitplanet dengan Metode RungeKutta orde 4 step 0.008



Gambar 9. BentukEuler orbitplanet dengan Metode Eulerstep 0.010



Gambar 10. Bentuk orbitplanet dengan MetodeRungeKutta orde 4 step 0.008

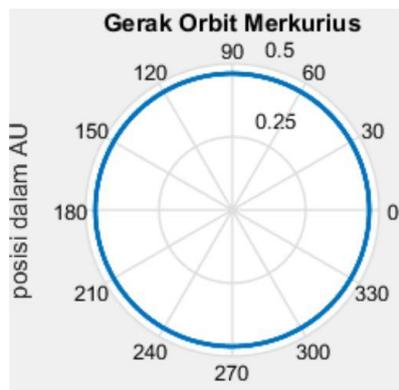
Data hasil komputasi metode euler dan runge-kutta orde 4 menunjukkan adanya perbedaan yang signifikan. Perbandingan yang menggunakan iterasi yang ditetapkan menunjukkan perbedaan kecepatan komputasi kedua metode ini. Pada step sama dengan 0.006, metode Runge-Kutta menunjukkan penggambaran orbit planet lebih dari 20 loop ke depan. Banyaknya loop ini dapat merepresentasikan kecepatan metode runge-kutta pada step lainnya. Di lain sisi, diperlukan step 0.008 agar metode euler menghasilkan orbit planet lebih kurang 3 loop penuh. Di

sini berarti, kecepatan metode runge-kutta 4 lebih cepat terhadap metode euler lebih dari 6 kali.

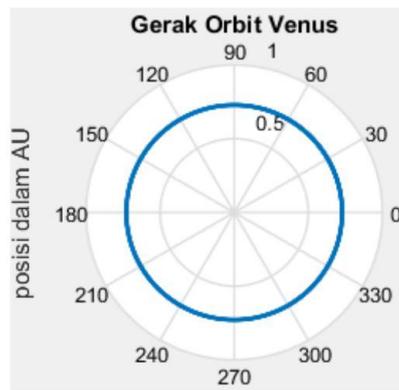
Dalam tinjauan lintasan orbit, kedua metode menunjukkan bentuk lintasan yang berbeda untuk step yang berbeda. Metode euler terlihat banyak mengalami penyimpangan terhadap bentuk lintasan orbit planet yang sebenarnya (elips), dengan bentuk yang cenderung spiral. Namun, untuk step berapapun, metode euler terlihat lebih stabil. Kestabilan ini tidak ditemukan untuk metode runge-kutta orde 4. Hanya pada step 0.002 saja lah bentuk lintasan orbit planet akurat. Step lebih besar menghasilkan lintasan orbit planet yang berbentuk linear.

Dari komputasi kedua metode ini dapat dilihat bahwa ada metode yang lebih baik satu terhadap lainnya dan step yang optimal. Metode runge-kutta orde 4 lebih cocok dipakai untuk memprediksi lintasan orbit karena metode euler gagal menggambarkan lintasan yang sebenarnya. Adapun step yang dipilih tidak boleh sama dengan atau lebih dari 0.004, mengingat bentuk lintasan orbit yang mulai menyimpang.

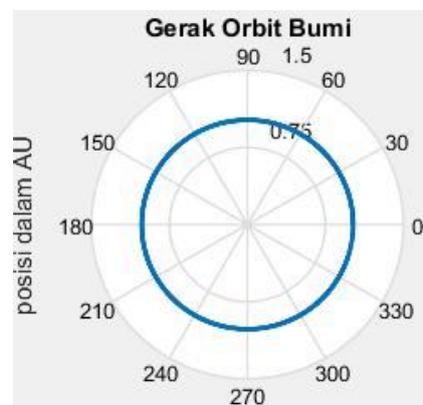
Simulasi Pergerakan Planet ‘Dalam’ dengan Metode Runge-Kutta Orde 4



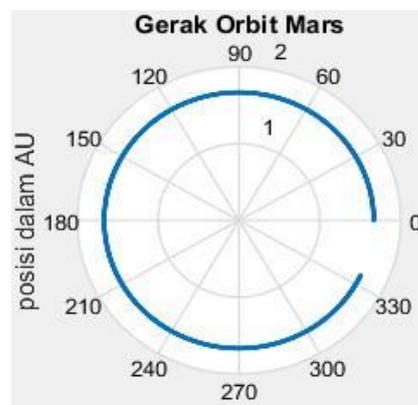
Gambar 11. Gambar pergerakanplanet Merkurius



Gambar 12. Gambar pergerakanplanet Venus



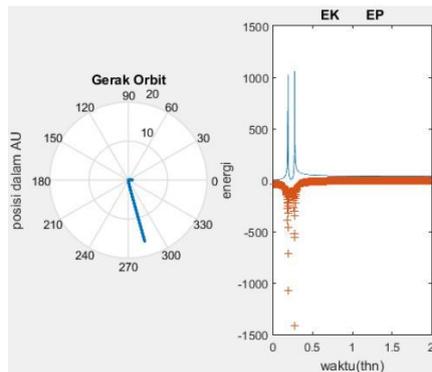
Gambar 13. Gambar pergerakan planet Bumi



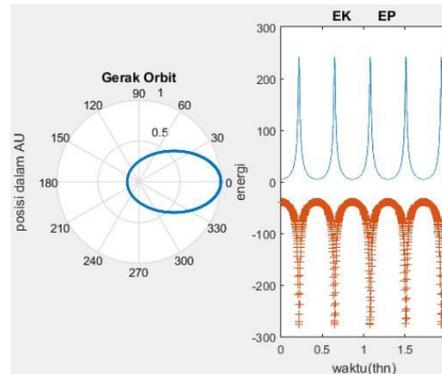
Gambar 14. Gambar pergerakan planet Mars

Hasil komputasi simulasi pergerakan orbit planet dalam menunjukkan hasil yang sesuai (secara visual) dengan yang sebenarnya. Bentuk lintasan orbit yang berbentuk *loop* tertutup menunjukkan metode ini berhasil meng-komputasi-kan pergerakan planet ‘dalam’ dalam tata surya. Pada gerak orbit planet Mars, terlihat bentuk *loop* yang belum sempurna, merupakan hasil dari besarnya jari-jari lintasan dan kurangnya lelaran yang diperlukan.

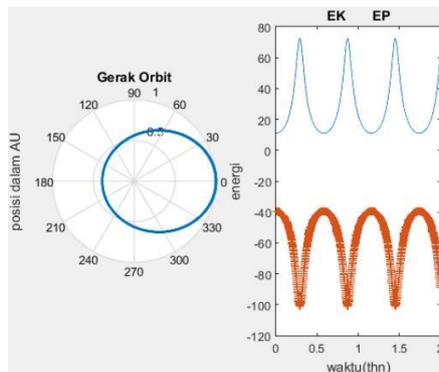
Lintasan Bumi dengan Variasi Kecepatan Awal saat Jejari = 1 AU menggunakan Metode Runge-Kutta Orde 4



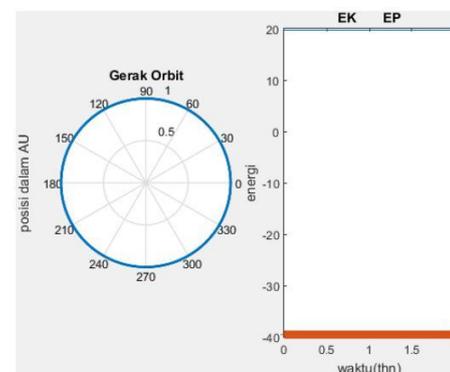
Gambar 15. Gambar dan grafik yang dihasilkan dengan memasukkan kecepatan 0.5π AU / tahun



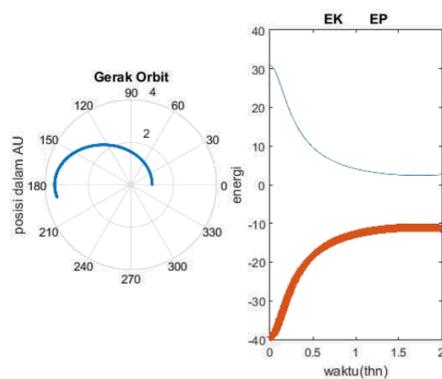
Gambar 16. Gambar dan grafik yang dihasilkan dengan memasukkan kecepatan 1.0π AU / tahun



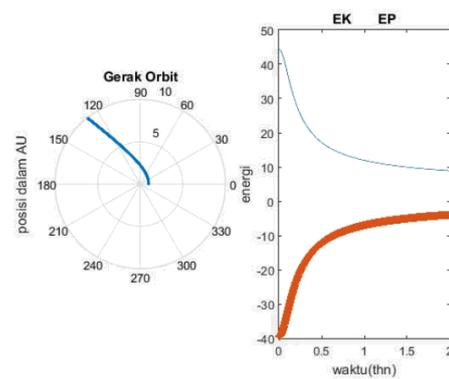
Gambar 17. Gambar dan grafik yang dihasilkan dengan memasukkan kecepatan 1.5π AU / tahun



Gambar 18. Gambar dan grafik yang dihasilkan dengan memasukkan kecepatan 2.0π AU / tahun



Gambar 19. Gambar dan grafik yang dihasilkan dengan memasukkan kecepatan 2.5π AU / tahun



Gambar 20. Gambar dan grafik yang dihasilkan dengan memasukkan kecepatan 3.0π AU / tahun

Komputasi variasi lintasan planet bumi dalam berbagai kecepatan dengan rentang $0.5\pi - 3.0\pi$ AU / tahun menunjukkan adanya batas rentang keadaan stabil planet bumi yaitu pada $1.0\pi - 2.0\pi$ AU / tahun. Dengan garis biru pelambang energi kinetik dan garis merah pelambang energi potensial, dengan kecepatan 0.5π AU / tahun, kecepatan planet bumi akan meningkat pesat dua kali dan akhirnya kehilangan energi kinetiknya. Ini berarti planet bumi akan mendekat ke arah pusat dan tiba-tiba menjauh keluar dari lintasan orbit. Pada $v = 1.0\pi - 1.5\pi$ AU / tahun, orbit planet terlihat berbentuk elips dengan nilai aphelion dan perihelion yang berbeda jauh. Di sini kecepatan planet sangat bervariasi tergantung pada posisinya, yang digambarkan oleh energi kinetiknya. Keadaan ini tidak mengakibatkan bumi hancur, melainkan seluruh kehidupannya musnah. Keadaan yang nampak stabil adalah saat kecepatannya sebesar 2.0π AU / tahun, yang memang mendekati kecepatan rerata planet bumi. Untuk kecepatan yang lebih tinggi, secara visual, planet akan bergerak terus menjauhi pusat lintasan.

4. Kesimpulan

Dari pemodelan gerak orbit planet ini didapatkan kesimpulan di bawah dalam kecepatan dan keakuratan, metode Runge-Kutta orde 4 lebih baik dibanding metode Euler untuk memodelkan lintasan orbit planet dengan step = 0.002. Metode Runge-Kutta orde 4 dengan step 0.002 berhasil menggambarkan lintasan orbit planet terestrial. Orbit planet bumi stabil dengan bentuk elips dalam rentang kecepatan $1.0\pi - 2.0\pi$ AU/tahun pada aphelion-nya dengan kecepatan 2.0π AU/tahun memiliki bentuk hampir lingkaran.

Daftar Pustaka

1. J.M. Petit, F. Paolo, Modelling the outcomes of high-velocity impacts between small solar system bodies. Springer. Celest Mech Dyn Astr Vol. 57 (1993) p. 1-28
2. D. J. Scheeres, Stability of the Euler resting N-body relative equilibria. Springer. Celest Mech Dyn Astr Vol. 130 No. 26 (2018).
3. H. L. Lei, B. Xu, dan C. Circi, Polynomial expansions of single-mode motions around equilibrium points in the circular restricted three-body problem. Springer. Celest Mech Dyn Astr Vol. 130 No. 38 (2018).

4. C, Stefano. 1991. Position and velocity perturbations in the orbital frame in terms of classical element perturbations. Springer. *Celest Mech Dyn astr* Vol. 55 (1991) p. 209-221.
5. J. M. A. Danby, The solution of Kepler's equation III. Reidel. *Celestial Mechanics* Vol. 40 (1987) p. 303-312.
6. P. Deuflhard, Kepler discretization in regular celestial mechanics. Reider. *Celestial Mechanics* Vol. 21 (1980) p. 213-223.
7. A. Elipe et al., An analysis of the convergence of newton iterations for solving elliptic Kepler's equation. Elsevier. *Celest Mech Dyn astr* Vol. 129 (2017) p.415-432.
8. W. Edward, A general algorithm for the solution of Kepler's equation for elliptic orbits. Reider. *Celestial Mechanics* Vol. 20 (1979) p. 243-249.
9. D.J. Scheeres, Stability of the planar full 2-body problem. Springer. *Celest Mech Dyn astr* Vol. 104 (2009) p. 103-128.
10. Shakouri, M. H. Amir, N. Azad, Assadian, 2018. Orbit estimation using a horizon detector in the presence of uncertain celestial body rotation and geometry. Elsevier. *Acta astronautica* Vol. 148 (2018) p. 82-88.
11. Serway, A. Reymond, J. W. Jewett, *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics, Ninth Edition*. Brooks/Cole: Boston, USA, 2014.
12. Halliday, David, dkk.. *Fundamentals of Physics 8th Edition*. John Wiley&Sons : New York, 2010.
13. Fitzpatrick, Richard. *An Introduction to Celestial Mechanics*. University of Texas USA