

VISUALISASI 3D DISTRIBUSI POTENSIAL LISTRIK AKIBAT KONFIGURASI MUATAN MONOPOL, DIPOL, DAN MULTIPOL MENGGUNAKAN METODE FINITE DIFFERENCE BERDASARKAN PERSAMAAN POISSON

DAVID TRIAMADA^{1*}, RAFLY RAMADZIN¹, SENA PATRIARKA CINAN¹, RENDY PUTRA PRATAMA¹, SETIANTO²

¹Program Studi Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Padjadjaran

²Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Padjadjaran
Jl. Raya Bandung-Sumedang Km 21, Jatinangor 45363

*Corresponding author

Email: david23001@mail.unpad.ac.id

Diserahkan: 04/12/2025

Diterima: 06/02/2026

Dipublikasikan: 13/02/2026

Abstrak. Persamaan Poisson merupakan bentuk diferensial dari Hukum Gauss yang digunakan untuk menjelaskan hubungan antara distribusi muatan dan potensial listrik yang dihasilkannya. Penelitian ini bertujuan untuk memodelkan dan memvisualisasikan distribusi potensial listrik dari tiga konfigurasi muatan berbeda, yaitu monopol, dipol, dan konfigurasi multipol kompleks yang terdiri dari lebih dari lima muatan. Simulasi dilakukan melalui pendekatan numerik berbasis metode beda hingga pada domain dua dimensi. Visualisasi menunjukkan bahwa distribusi potensial sangat dipengaruhi oleh konfigurasi dan posisi relatif muatan, dengan karakteristik medan yang semakin kompleks seiring bertambahnya jumlah muatan. Pada kasus multipol, kompleksitas distribusi medan meningkat secara signifikan dan memperlihatkan pola-pola interferensi potensial yang khas. Penelitian ini menunjukkan bahwa metode numerik dapat digunakan secara efektif untuk memahami fenomena distribusi potensial dalam sistem elektrostatik.

Kata Kunci: persamaan poisson, potensial listrik, distribusi potensial, pendekatan numerik, elektrostatik

Abstract. The Poisson equation is the differential form of Gauss's Law, which describes the relationship between charge distribution and the resulting electric potential. This study aims to model and visualize the electric potential distribution from three different charge configurations: monopole, dipole, and a complex multipole consisting of more than five charges. The simulation is conducted using a numerical approach based on the finite difference method within a two-dimensional domain. The visualizations indicate that the potential distribution is strongly influenced by the configuration and relative positions of the charges, with field characteristics becoming increasingly complex as the number of charges increases. In the multipole case, the complexity of the field distribution rises significantly, revealing distinctive potential interference patterns. This research demonstrates that numerical methods can be effectively applied to understand potential distribution phenomena in electrostatic systems.

Keywords: *poisson equation, electric potential, potential distribution, numerical approach, electrostatics*

1. Pendahuluan

Distribusi potensial listrik yang dihasilkan oleh konfigurasi muatan merupakan aspek penting dalam kajian elektrostatis. Potensial listrik tidak hanya merepresentasikan besarnya energi potensial yang dialami oleh muatan uji di suatu titik, tetapi juga menjadi dasar dalam menentukan arah dan besar medan listrik. Pemahaman yang baik tentang distribusi potensial ini sangat dibutuhkan dalam berbagai bidang seperti fisika material, teknik elektro, sistem mikroelektronik, dan rekayasa medan tinggi, terutama pada skala mikro dan nano [1, 2].

Hubungan antara sebaran muatan dan distribusi potensial listrik dijelaskan oleh persamaan Poisson, yaitu bentuk diferensial dari hukum Gauss [3]. Persamaan ini digunakan secara luas dalam elektrostatis untuk menganalisis bagaimana muatan-muatan menghasilkan medan potensial di sekitarnya. Penyelesaian persamaan ini dapat dilakukan secara analitik pada kasus-kasus sederhana, seperti muatan titik atau konfigurasi simetris tertentu. Namun, dalam banyak kasus nyata, terutama ketika berhadapan dengan geometri tak teratur, kondisi batas kompleks, atau konfigurasi muatan multipol, solusi analitik tidak lagi memadai atau bahkan tidak tersedia [4].

Sebagai solusi, pendekatan numerik banyak digunakan, dan salah satu metode yang paling umum dan efisien adalah metode beda hingga (Finite Difference Method) yang mendiskretisasi turunan diferensial dalam persamaan menjadi bentuk aljabar pada grid spasial [4,7]. Dengan metode ini, kita dapat menyelesaikan distribusi potensial listrik untuk domain dua dimensi dengan berbagai kondisi batas dan konfigurasi muatan yang lebih kompleks [5, 6]. Pendekatan diskret seperti ini juga menjadi dasar bagi berbagai metode komputasi elektromagnetik modern [8].

Dalam konteks pembelajaran dan eksplorasi fenomena elektrostatis secara visual, pemodelan numerik yang disertai dengan visualisasi tiga dimensi menjadi sangat penting. Visualisasi ilmiah berperan dalam mengubah data numerik menjadi representasi grafis yang memungkinkan interpretasi pola spasial secara lebih intuitif [9]. Visualisasi juga memungkinkan pemahaman intuitif terhadap bagaimana perubahan posisi, jumlah, dan jenis muatan memengaruhi pola distribusi potensial di sekitarnya. Oleh karena itu, penelitian ini dilakukan untuk memodelkan dan memvisualisasikan distribusi potensial listrik dari berbagai konfigurasi muatan, yaitu monopoli (muatan tunggal), dipol (dua muatan berlawanan), dan multipol (kombinasi kompleks lebih dari dua muatan), dalam domain dua dimensi. Hasil simulasi divisualisasikan secara tiga dimensi untuk memperlihatkan struktur spasial dari medan potensial yang dihasilkan oleh konfigurasi tersebut.

Selain memberikan kontribusi dalam aspek numerik dan visualisasi, penelitian ini juga diharapkan dapat berfungsi sebagai media pembelajaran interaktif dalam memahami konsep dasar elektrostatis secara komputasional. Penggunaan simulasi berbasis komputer dalam pendidikan fisika telah terbukti meningkatkan pemahaman konseptual melalui eksplorasi langsung terhadap parameter sistem [10]. Dengan pendekatan ini, pengguna tidak hanya melihat hasil akhir, tetapi juga dapat mengeksplorasi bagaimana perubahan konfigurasi muatan memengaruhi keseluruhan struktur medan, memberikan pemahaman lebih dalam terhadap prinsip-prinsip dasar dalam fisika medan listrik.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan numerik berbasis metode Finite Difference untuk menyelesaikan Persamaan Poisson dalam domain dua dimensi yang merepresentasikan sistem elektrostatik akibat konfigurasi berbagai jenis muatan. Persamaan Poisson digunakan untuk menentukan distribusi potensial listrik $\rho(x, y)$ sebagai akibat dari distribusi muatan volumetric $V(x, y)$ dan secara matematis dirumuskan sebagai:

$$\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0 \quad (1)$$

Persamaan (1) merupakan bentuk diferensial dari hukum Gauss dalam elektrostatika yang diturunkan secara sistematis dari hukum Coulomb [3]. Jackson membahas secara mendalam perluasan persamaan ini untuk sistem dengan kondisi batas kompleks serta ekspansi multipol dalam medan elektrostatik [12].

Karena solusi analitik dari persamaan ini hanya tersedia untuk kasus-kasus sederhana dan terbatas, maka pendekatan diskret numerik menjadi solusi yang esensial dalam mengkaji sistem kompleks yang terdiri atas muatan tunggal (monopol), pasangan muatan (dipol), maupun susunan multipol. Metode beda hingga merupakan salah satu teknik diskretisasi yang paling luas diterapkan dalam elektromagnetika komputasional karena kemudahan implementasinya serta stabilitas numeriknya yang baik untuk domain teratur [4].

Distribusi muatan dimodelkan secara diskrit dalam bentuk matriks dua dimensi, sedangkan penyelesaian potensial dilakukan secara iteratif menggunakan skema relaksasi dan over-relaksasi. Skema numerik ini dilakukan dengan memperbarui nilai potensial di setiap titik grid berdasarkan rata-rata tetangganya, disesuaikan dengan kontribusi muatan di titik tersebut.

Simulasi dilakukan dalam sebuah domain dua dimensi berbentuk lingkaran dengan jari-jari $R = 5$ satuan panjang, yang dibuat diskret menjadi grid persegi berukuran 50×50 titik menggunakan fungsi `linspace()` dari pustaka NumPy. Grid tersebut merepresentasikan ruang simulasi tempat muatan-muatan titik disusun secara arbitrer. Pemilihan resolusi grid merupakan keseimbangan antara akurasi komputasi dan efisiensi waktu proses; grid yang lebih rapat meningkatkan ketelitian namun membutuhkan sumber daya komputasi lebih besar [13]. Pendekatan serupa dalam diskritisasi domain untuk solusi numerik persamaan Poisson juga dibahas secara ekstensif dalam literatur metode numerik [14].

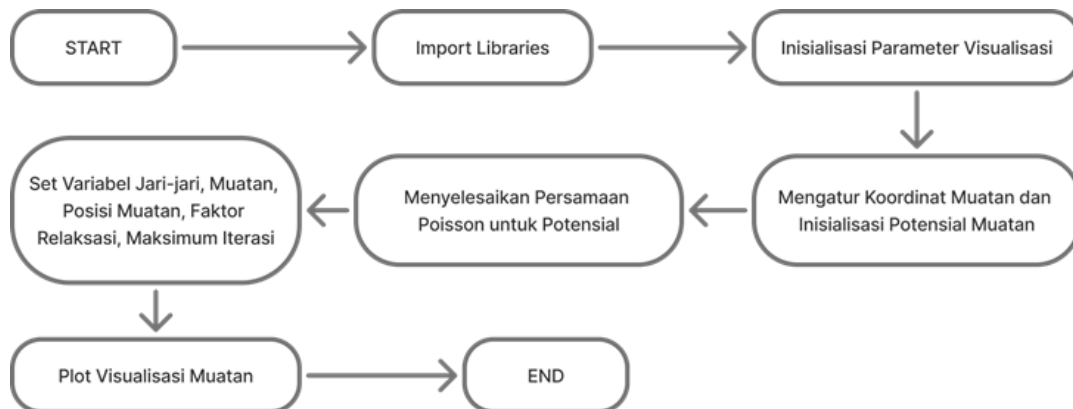
Distribusi muatan dibentuk melalui fungsi `muatan_titik()` dimana posisi dan besar masing-masing muatan ditentukan secara manual dalam bentuk pasangan koordinat dan nilai muatan. Muatan-muatan ini termasuk muatan positif dan negatif dengan besaran bervariasi, termasuk beberapa yang merupakan kelipatan atau pecahan dari muatan elementer e , sehingga menghasilkan konfigurasi kompleks menyerupai sistem multipol. Konversi posisi muatan dari koordinat kartesian ke indeks grid dilakukan melalui pencocokan terhadap elemen terdekat pada vektor posisi grid, menggunakan fungsi `terdekat()`. Teknik pemetaan ini merupakan praktik standar dalam simulasi berbasis grid dan diadopsi dari pendekatan yang dideskripsikan dalam literatur numerik [14]. Penyelesaian numerik dari potensial listrik dilakukan melalui fungsi `selesaikan_V()` yang mengimplementasikan skema eksplisit Finite Difference untuk operator Laplace.

Potensial pada titik grid diperbarui menggunakan rata-rata aritmatika dari empat titik tetangganya serta kontribusi lokal dari muatan melalui:

$$V_{i,j} = \frac{1}{4} (V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} + \frac{\rho_{i,j}}{\epsilon_0}) \quad (2)$$

Untuk meningkatkan kecepatan konvergensi iterasi, algoritma dilengkapi dengan metode over-relaxation menggunakan faktor relaksasi $\alpha = 2$. Pemilihan faktor relaksasi yang optimal sangat bergantung pada sifat matriks koefisien dan ukuran grid [7]. Analisis parameter relaksasi optimal untuk metode SOR dalam menyelesaikan persamaan Poisson di berbagai dimensi ruang menunjukkan bahwa nilai α mendekati 2 memberikan konvergensi tercepat untuk grid seragam [11]. Iterasi dihentikan ketika perubahan maksimum ΔV antara dua iterasi berturut-turut lebih kecil dari ambang toleransi 0.001, atau ketika jumlah iterasi mencapai batas maksimum 500. Pendekatan berbasis toleransi perubahan nilai dan pembatasan jumlah iterasi merupakan praktik umum dalam metode iteratif untuk menjamin konvergensi sekaligus mencegah komputasi tak berujung pada kasus yang lambat konvergen [13].

Visualisasi hasil dilakukan dalam dua bentuk: pertama, menggunakan matplotlib untuk menghasilkan permukaan 3D statik dari potensial listrik; dan kedua, menggunakan plotly untuk menghasilkan grafik interaktif yang memungkinkan eksplorasi ruang potensial secara dinamis. Matplotlib telah menjadi alat standar untuk visualisasi ilmiah di lingkungan Python yang mampu menghasilkan grafik publikasi berkualitas tinggi [9]. Visualisasi ini sangat penting dalam menganalisis secara kualitatif distribusi potensial dan memverifikasi bahwa konfigurasi muatan menghasilkan pola potensial sesuai dengan ekspektasi teoritis. Palet warna yang digunakan adalah Plasma, yang memberikan kontras tinggi antara nilai potensial rendah dan tinggi, sehingga mempermudah penafsiran visual terhadap perubahan gradien potensial. Gambar 1 merupakan diagram alur program visualisasi muatan dengan Persamaan Poisson.



Gambar 1. Diagram Alur Program Visualisasi Muatan dengan Persamaan Poisson

3. Hasil dan Pembahasan

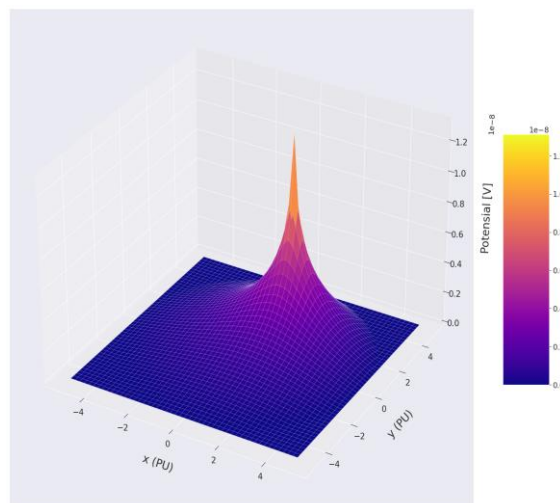
Distribusi potensial listrik yang disebabkan konfigurasi muatan dalam sistem dua dimensi dapat dianalisis secara menyeluruh melalui penyelesaian numerik dari persamaan Poisson. Persamaan ini menghubungkan distribusi muatan volumetric $\rho(x, y)$ terhadap potensial listrik $V(x, y)$ melalui operator Laplace, dengan bentuk umum $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$, dimana ϵ_0 adalah permitivitas vakum yaitu konstanta fisika yang menggambarkan kemampuan ruang hampa (vakum) untuk mengizinkan terbentuknya medan listrik. Dalam kasus ini,

metode numerik berbasis Finite Difference digunakan untuk membuat diskret domain kontinu menjadi grid dua dimensi, sehingga memungkinkan perhitungan potensial secara iteratif. Strategi ini menjadi sangat esensial mengingat bentuk solusi analitik dari persamaan Poisson hanya tersedia untuk kondisi batas dan geometri yang sederhana.

Simulasi dilakukan dalam domain diskret berbentuk lingkaran dengan jari-jari $R = 5$, dibagi menjadi grid dengan resolusi 50×50 titik. Domain ini dipilih untuk menjaga batasan fisik sistem dan meminimalisasi efek tepi yang tidak realistis. Sebanyak delapan muatan titik dengan nilai dan posisi berbeda ditempatkan dalam domain, menghasilkan konfigurasi kombinatorik dari sistem monopol, dipol, dan multipol. Secara khusus, konfigurasi ini memungkinkan visualisasi interaksi potensial yang kompleks, yang merepresentasikan sistem fisika nyata seperti molekul polar, susunan kisi kristal, atau medan elektrostatik dalam mikrostruktur bahan.

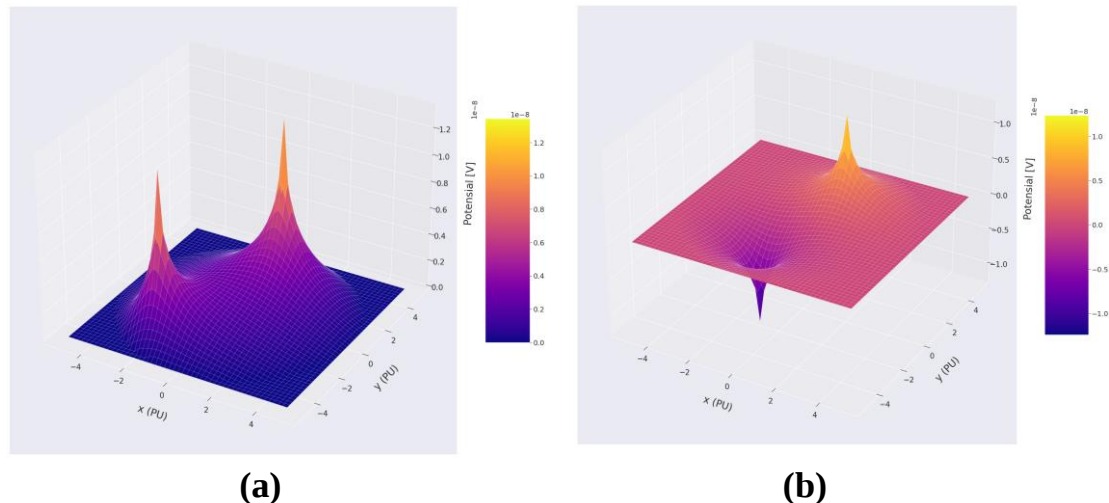
Distribusi muatan divisualisasikan sebagai matriks dua dimensi $\rho(x, y)$, dan potensial awal $V(x, y)$ diinisialisasi dengan nol pada seluruh titik. Solusi kemudian diperoleh melalui metode iteratif berbasis relaksasi, dengan formulasi diskret dari operator Laplace dua dimensi. Potensial diperbarui di setiap titik menggunakan rerata empat titik tetangganya, ditambah kontribusi dari muatan lokal melalui $\rho_{i,j}/\epsilon_0$. Untuk meningkatkan efisiensi konvergensi, skema *Successive Over-Relaxation (SOR)* digunakan dengan faktor relaksasi $\alpha = 2$, serta batas toleransi perubahan $\Delta V < 10^{-3} \Delta$ dan maksimum iterasi sebanyak 500 langkah. Hasil simulasi menunjukkan bahwa metode ini mampu mencapai kestabilan numerik tanpa munculnya fluktuasi ekstrem atau divergensi pada grid.

Visualisasi hasil dilakukan melalui dua pendekatan: permukaan potensial tiga dimensi (3D) statis menggunakan Matplotlib dan plot interaktif menggunakan Plotly. Representasi ini memperlihatkan peta potensial yang membentang dari nilai maksimum hingga minimum, tergantung pada polaritas dan posisi muatan. Pada konfigurasi dipol, permukaan potensial menunjukkan simetri yang khas dengan gradien tinggi di antara pasangan muatan. Sementara itu, konfigurasi multipol menghasilkan pola kontur kompleks, mencerminkan interaksi simultan dari banyak kutub. Perubahan ketinggian pada permukaan potensial sebanding dengan gradien medan listrik, sehingga pola-pola ini juga mengindikasikan distribusi medan di sekitar sistem muatan.



Gambar 2. Visualisasi distribusi potensial listrik dalam konfigurasi, dengan satu muatan titik positif di pusat domain.

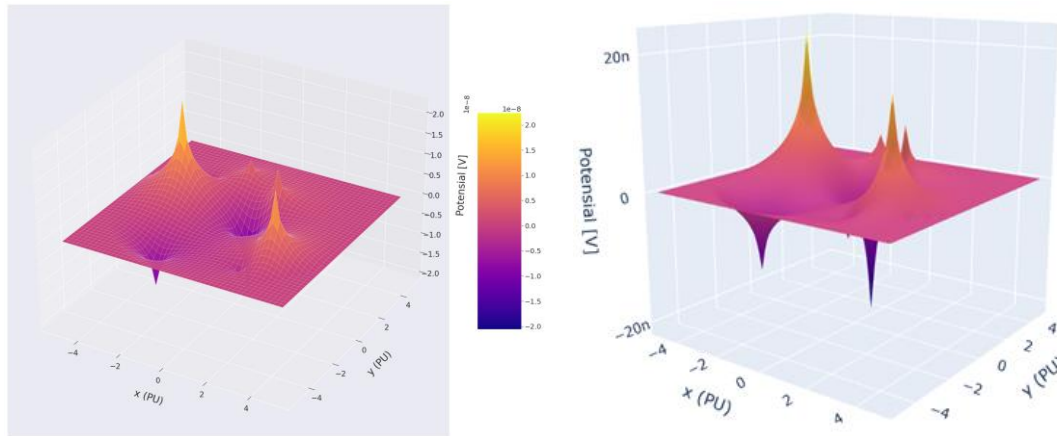
Pada model pertama untuk konfigurasi secara monopol, satu muatan bernilai positif di pusat domain. Hasil visualisasi memperlihatkan distribusi potensial yang menyebar secara radial dan simetris, dengan nilai yang menurun secara halus menjauhi pusat muatan. Hal ini sesuai dengan bentuk solusi analitik untuk muatan dalam ruang dua dimensi, di mana $V(r) \propto \frac{q}{r}$, dengan r merupakan jarak dari pusat muatan. Pada visualisasi terlihat bahwa gradien potensial yang paling tajam berada di dekat muatan, hal ini menandakan bahwa medan listrik maksimum berada di wilayah tersebut. Seiring menjauhi pusat, gradien ini mulai mengecil yang menandakan adanya pelemahan pada medan listrik yang sesuai dengan prinsip hukum coulomb.



Gambar 3. Visualisasi potensial listrik untuk konfigurasi dipol. (a) Dua muatan positif. (b) Konfigurasi dipol dari satu muatan positif dan satu muatan negatif.

Pada model kedua untuk konfigurasi dipol, visualisasi menggambarkan distribusi potensial listrik akibat dua konfigurasi muatan yang berbeda namun sama-sama terdiri dari dua titik muatan. Pada subgambar (a), dua buah muatan positif ditempatkan secara terpisah dalam domain dua dimensi. Hal ini menghasilkan permukaan potensial yang memperlihatkan dua puncak tajam (maksimum) pada masing-masing lokasi muatan dengan perubahan pada potensial yang menurun secara radial ke arah luar. Visualisasi ini mampu mencerminkan fenomena superposisi potensial dari dua muatan sejenis yang saling memperkuat, namun masih tidak membentuk konfigurasi dipol secara fisis dikarenakan untuk dapat membentuk dipol dibutuhkan bentuk polaritas yang berlawanan.

Pada subgambar (b) ditampilkan bentuk konfigurasi dipol sejati, dengan adanya satu muatan positif dan satu muatan negatif yang diletakkan simetris terhadap sumbu tertentu. Hal ini tercermin dalam output yang membentuk suatu pola permukaan satu puncak berwarna kuning (muatan positif) dan satu lembah berwarna ungu (muatan negatif). Di antara kedua kutub tersebut, terbentuk gradien potensial yang sangat tajam, yang mencerminkan medan listrik yang terarah dari muatan positif ke negatif. Fenomena ini sesuai dengan konsep bahwa medan listrik E merupakan turunan spasial dari potensial listrik $E = -\nabla V$, yang akan selalu bergerak dari potensial tinggi menuju potensial rendah. Hal ini sesuai dengan teori, di mana konfigurasi dipol menghasilkan potensial yang berperilaku sebagai $V(r, \theta) \propto \frac{p \cos \theta}{r^2}$ dalam sistem dua dimensi jarak jauh, di mana p merupakan momen dipol dan θ adalah sudut terhadap sumbu dipol.



Gambar 4. Visualisasi permukaan potensial listrik hasil simulasi konfigurasi multipol dengan delapan muatan titik (empat positif dan empat negatif) pada domain dua dimensi.

Pada model ketiga untuk konfigurasi multipol, visualisasi menggambarkan distribusi potensial listrik dari delapan muatan titik yang tersebar secara acak dalam domain dua dimensi. Terdapat empat muatan positif dan empat muatan negatif dengan nilai dan posisi yang bervariasi, sehingga hal ini menyebabkan output berupa potensial yang kompleks dan tidak teratur. Hal ini mencerminkan karakteristik dan sifat khusus dari sistem multipol yang terdiri dari ketidaksimetrisan spasial dan ketergantungan suatu medan terhadap konfigurasi posisi serta besar muatan. Secara teoritis, sistem multipol tidak memiliki bentuk ekspresi potensial yang sederhana seperti pada monopol atau dipol, melainkan dijelaskan menggunakan pendekatan ekspansi multipol dalam teori medan. Dalam visualisasi ini, efek interaksi antarkutub tidak saling meniadakan, tetapi justru menghasilkan distribusi medan listrik yang fluktuatif dengan arah medan yang berubah secara signifikan dalam skala spasial kecil. Sehingga simulasi ini berhasil menangkap dinamika kompleks tersebut, di mana pola gradien tajam dan arah kontur yang melengkung secara lokal memperlihatkan adanya interferensi potensial antar kutub.

Secara numerik, metode ini terbukti efektif dalam menyelesaikan sistem dengan banyak singularitas muatan, tanpa memerlukan aproksimasi tambahan terhadap nilai batas eksplisit. Selain itu, ketelitian spasial yang dicapai melalui diskretisasi resolusi tinggi memungkinkan interpretasi visual yang presisi, serta kompatibilitas dengan pendekatan analitik pada kasus ideal. Efektivitas metode finite difference pada domain diskrit juga membuka kemungkinan integrasi dengan teknik numerik lanjut seperti multigrid atau metode elemen hingga, untuk meningkatkan efisiensi komputasi pada domain berskala besar.

4. Kesimpulan

Simulasi distribusi potensial listrik menggunakan persamaan Poisson dan metode finite difference berhasil divisualisasikan secara 3D untuk berbagai konfigurasi muatan seperti monopol, dipol, dan multipol. Visualisasi ini memperlihatkan secara jelas pengaruh posisi dan jenis muatan terhadap bentuk medan potensial. Pendekatan ini tidak hanya memberikan pemahaman konseptual yang lebih intuitif, tetapi juga relevan untuk aplikasi dalam desain sensor medan, analisis isolasi mikroelektronika, dan pemodelan medan dalam material kompleks. Visualisasi numerik terbukti menjadi alat yang efektif dalam eksplorasi dan pembelajaran elektrostatika.

Daftar Pustaka

1. X. H. Qiu, G. C. Qi, Y. L. Yang, and C. Wang, "Electrostatic characteristics of nanostructures investigated using electric force microscopy," *Journal of Solid State Chemistry*, vol. 181, no. 7, pp. 1670–1677, 2008 doi: 10.1016/j.jssc.2008.06.036.
2. R. W. Boyd, *Nonlinear Optics*, 4th ed., Academic Press, 2020.
3. D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 4th ed., Pearson Education, 2017.
4. S. S. Sadiku, *Numerical Techniques in Electromagnetics with MATLAB*, 4th ed., Boca Raton, FL: CRC Press, 2018.
5. A. J. Dastgerdi, S. F. S. Takami, E. Z. Iraj, Y. Safari, M. Zameni, and P. Pasha, "Numerical analysis of potential in electrostatic amplitude caused by paint splashing," *Heliyon*, vol. 10, no. 11, e32191, 2024 doi: 10.1016/j.heliyon.2024.e32191.
6. M. Salem and O. Aldabbagh, "Numerical solution to Poisson's equation for estimating electrostatic properties resulting from an axially symmetric Gaussian charge density distribution: Charge in free space," *Mathematics*, vol. 12, no. 13, p. 1948, 2024 doi: 10.3390/math12131948.
6. S. Seager, D. Deming, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 48 (2010) 631.
7. W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, 3rd ed., Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 2007.
8. A. Taflove and S. C. Hagness, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, 3rd ed., Norwood, MA, USA: Artech House, 2005.
9. J. D. Hunter, "Matplotlib: A 2D graphics environment," *Computing in Science & Engineering*, vol. 9, no. 3, pp. 90–95, 2007, doi: 10.1109/MCSE.2007.55.
10. C. E. Wieman, W. K. Adams, and K. K. Perkins, "PhET: Simulations that enhance learning," *Science*, vol. 322, no. 5902, pp. 682–683, 2008, doi: 10.1126/science.1161948.
11. S. Yang and M. K. Gobbert, "The optimal relaxation parameter for the SOR method applied to the Poisson equation in any space dimensions," *Appl. Math. Lett.*, vol. 22, no. 3, pp. 325–331, 2009, doi: 10.1016/j.aml.2008.03.028.
12. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed. New York: Wiley, 1999.
13. S. C. Chapra and R. P. Canale, *Numerical Methods for Engineers*, 7th ed. New York: McGraw-Hill Education, 2015.
14. J. D. Hoffman, *Numerical Methods for Engineers and Scientists*, 2nd ed. New York: Marcel Dekker, 2001.
15. M. A. Zaman, "Numerical Solution of the Poisson Equation Using Finite Difference Matrix Operators," *Electronics*, vol. 11, no. 15, Art. no. 2365, Jul. 2022, doi: 10.3390/electronics11152365.
16. M.-C. Lai, Z. Li, and X. Lin, "Fast solvers for 3D Poisson equations involving interfaces in a finite or the infinite domain," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 191, no. 1, pp. 106–125, May 2006, doi: 10.1016/j.cam.2005.04.025.
17. A. Schugardt, L. Kaiser, F. Avcilar, and U. Schäfer, "Interactive and educational simulation tool for permanent magnet synchronous machines," *COMPEL - Int. J. Comput. Math. Electr. Electron. Eng.*, vol. 43, no. 3, pp. 691–703, 2024, doi: 10.1108/COMPEL-11-2023-0554.
18. Y. Zhang, S. Zhang, and J. Li, "A Fast 3D Poisson Solver for Geopotential Field Modeling Based on Discrete Sine Transform," *Geosciences*, vol. 15, no. 4, Art. no. 127, Apr. 2026, doi: 10.3390/geosciences15040127.
19. Landau, R. H., Páez, M. J., & Bordeianu, C. C. (2015). *Computational physics: Problem solving with Python* (3rd ed.). Wiley-VCH
20. Newman, M. (2013). *Computational physics*. CreateSpace Independent Publishing Platform