

Model Matematika 2D Epidemi HIV dalam Populasi Heteroseksual Aktif pada Kasus HIV/AIDS di Bali dan Nusa Tenggara

Jafaruddin

Jurusan Matematika, FST, Undana Kupang
Jln Adisucipto Kampus Penfui Kupang NTT
Email: jafaruddin.hamid@yahoo.com

ABSTRAK

Pada paper ini dibangun model matematika penularan HIV dalam populasi heteroseksual aktif dan memakai model tersebut yang telah dibangun untuk menjelaskan kasus HIV/AIDS di Bali Nusa Tenggara. Metode yang digunakan adalah pemodelan matematika dalam sistem persamaan diferensial tak linier dengan langkah-langkah: identifikasi masalah, penetapan asumsi-asumsi, membangun model, analisis model, aplikasi model, memakai hasil aplikasi model untuk menjelaskan fenomena penularan HIV di Bali dan Nusa Tenggara. Terdapat dua tipe model 2D yang dibangun dalam penelitian yaitu model 2D dinamika populasi dan model 2D sebagai interaksi populasi heteroseksual ditinjau jenis kelamin. Beberapa hasil terpenting sebagai hasil aplikasi dari kedua model pada populasi HIV/AIDS di Bali, NTB, NTT antara lain adalah (1) Model dinamika populasi cukup realistis untuk memperkirakan pertumbuhan populasi hingga 6-8 tahun setelah tahun pengamatan, (2) Sistem model 2D penularan HIV berdasarkan jenis kelamin infektodi antara populasi dengan individu-individu heteroseksual dapat dipandang sebagai sistem predator-prey dengan peran saling bergantian (3) Penularan HIV/AIDS di Bali, NTB, dan NTT menurut model 2D infektor menunjukkan ketiga daerah konvergen ke keadaan setimbang endemik. Model infektor 2D masih dapat dikembangkan, misalnya dengan mempertimbangkan daya dukung lingkungan dan mekanisme diagnosis HIV/AIDS dan faktor lainnya, sehingga lebih realistis, dan lebih dekat ke masalah nyata HIV/AIDS.

Kata kunci: HIV/AIDS Bali dan Nusa Tenggara, model pertumbuhan populasi, model infektor 2D

ABSTRACT

In this paper, constructed a mathematical model of HIV transmission in heterosexual populations of active and use the model to explain HIV / AIDS cases on Bali Nusa Tenggara. By using mathematical modeling in a nonlinear system of differential equations with the step: problem identification, determination of assumptions, model building, model analysis , application models , using the results of application of the model to explain the phenomenon of HIV transmission in Bali and Nusa Tenggara . Model of two-dimensional (2D) which is constructed in this paper is a 2D model of population dynamics and the interaction of population in terms of sex heterosexual. Some of the most important results as a result of the application of the models in a population of HIV / AIDS in Bali, NTB, NT , among others, are (1) a population dynamics model is realistic enough to estimate population growth until 6-8 years after the year of observation , (2) 2D model system HIV transmission by sex between populations with heterosexual individuals can be seen as a predator - prey system with the role of each in turn (3) transmission of HIV / AIDS in Bali , NTB , and NTT according 2D model shows three regions converge to the equilibrium state endemic. 2D models can be developed, for example, taking into account the carrying capacity of the environment and mechanisms of the diagnosis of HIV/AIDS and other factors, so it is more realistic, and closer to the real problem of HIV/AIDS.

Keywords: HIV/AIDS Bali and Nusa Tenggara, population growth model, 2D model transmission.

1. Pendahuluan

Acquired Immunodeficiency Syndrome (AIDS) adalah salah satu jenis penyakit menular seksual (PMS) yang hingga saat ini belum dapat disembuhkan. AIDS disebabkan oleh *Human Immunodeficiency Virus* (HIV). Dunia dewasa ini telah dilanda penyakit AIDS. Dalam komperensi AIDS sedunia di Barcelona bulan Juli 2001, terungkap bahwa lebih dari 40 juta umat manusia di seluruh dunia hidup dengan HIV/AIDS, 30 juta diantaranya berada di Afrika. Di Afrika setiap 13 detik terjadi satu kasus kematian karena AIDS dan setiap 8 detik terjadi satu kasus infeksi baru (Almeder *et al* [1]). Di sub-Saharan Afrika, wanita 5 kali lebih banyak tertular HIV daripada pria. Sekitar 4,700 wanita di dunia tertular HIV setiap hari (Nicholas, [11]).

Broomberg [3] memperkirakan bahwa efisiensi penularan HIV untuk pasien PMS minimal 3,5 – 5 kali lebih tinggi dari pada efisiensi penularan HIV untuk orang yang tidak menderita PMS. Hal ini disebabkan karena beberapa jenis PMS menyebabkan luka pada vagina sehingga mempermudah masuknya HIV. Dengan demikian, tingginya kasus PMS merupakan salah satu indikator besarnya potensi penularan HIV/AIDS. Oleh karena itu, salah satu upaya penting untuk mengendalikan infeksi HIV/AIDS adalah menanggulangi PMS. Fakta bahwa penanganan PMS yang baik di Tanzania mampu menurunkan infeksi HIV/AIDS hingga 40% (UNAIDS and WHO 2005, [12])

Hasil observasi akhir tahun 2003 terhadap industri seks mengindikasikan bahwa sekitar 185,000-273,000 pekerja seks komersial (PSK) yang aktif. Sekitar 8,000 diantaranya diperkirakan terinfeksi HIV. Padahal dua tahun sebelumnya yakni akhir tahun 2001 dilaporkan bahwa 671 kasus AIDS dan 1904 kasus HIV. Terjadi peningkatan infeksi baru sejak tahun 1998, yakni 219 kasus AIDS dan 732 kasus HIV di tahun 2001. Hingga akhir tahun 2001 terdapat kasus AIDS yakni Jakarta (264), Papua (218), Jawa Timur (63), Jawa Barat (38), sedangkan NTT, Kalimantan Barat, dan Sumatera Selatan masing-masing 1 kasus. Dari 140 kasus AIDS yang disebabkan transfusi obat terlarang yang dilaporkan pada Desember 2001, 81% ditemukan di Jakarta, 9% di Jawa Barat, dan 10% di sejumlah daerah lain (Depkes 2007, [7]).

Nampak bahwa dinamika pengidap HIV/AIDS rentan terhadap perubahan waktu dan tingkat prevalensi epidemi HIV/AIDS serta interaksi antar individu dalam populasi heteroseksual (pria dengan wanita). Masalahnya adalah apakah interaksi antar individu-individu negatif HIV dengan individu-individu positif HIV/AIDS yang berpotensi menularkan HIV/AIDS dalam populasi heteroseksual aktif dapat dikaji dari aspek matematika yang dinyatakan dengan model matematika? Bagaimana model itu bisa digunakan untuk memprediksi pertumbuhan populasi sebagai akibat epidemi HIV/AIDS di Bali dan Nusa Tenggara.

2. Metode Penelitian

Populasi heteroseksual aktif sebagai infektor HIV. Ditjen PPM & PLP Depkes RI telah memiliki statistik kasus HIV/AIDS dari tahun 1995-2007 yang meliputi kasus HIV/AIDS menurut : jenis kelamin, kebangsaan, faktor resiko, golongan umur, dan propinsi. Faktor resiko meliputi heteroseksual, homo-biseksual, IDU (injection drug users), transfusi darah, Hemofilia, Transmisi Perinatal, dan sebagian tidak diketahui. Faktor heteroseksual aktif sangat sulit dikendalikan karena merupakan sifat laten dari manusia dan HIV/AIDS paling banyak menular melalui hubungan seksual dan hanya terjadi pada kedua populasi ini. Juga diyakini bahwa kedua populasi ini tetap ada sepanjang masa dan HIV/AIDS adalah bahaya laten untuk semua bangsa di dunia. (PPM & PLP Depkes RI, [7]).

Faktor resiko lainnya sedikit demi sedikit dapat dikendalikan dengan upaya perbaikan teknologi medis dan kepatutan manusia terhadap aturan. Alasan yang lain adalah karena proporsi kasus HIV/AIDS pada kedua faktor resiko (heteroseksual dan homo-biseksual) lebih tinggi dari faktor resiko lain dan termuat pada sumber kasus HIV/AIDS yang lain.

Mengapa Memilih Propinsi Bali dan Nusa Tenggara sebagai daerah target obyek penelitian? Beberapa alasan teknis antara lain faktor lokasi penelitian, geografis, dan tingkat prevalensi kasus HIV/AIDS (KPN 2001, [10]). Bali dan Nusa Tenggara dipilih karena lokasi penelitian lebih dekat ke Kupang NTT di mana tim peneliti berada, selain itu NTT berbatasan langsung dengan Negara Timor Leste sehingga NTT merupakan pintu utama di bagian Selatan masuk ke wilayah Indonesia. Bali dan NTB dipilih karena daerah pariwisata internasional. Selain itu fakta kuantitatif berupa prevalensi AIDS dari tahun ke tahun pada propinsi Bali dan Nusa Tenggara. Aplikasi model pada kasus HIV/AIDS di propinsi Bali dan Nusa Tenggara adalah tepat karena ketiga propinsi menduduki prevalensi AIDS per 100.000 penduduk tergolong sangat tinggi atau sedang, sehingga penanganan HIV/AIDS di tiga propinsi ini sangat tepat.

Terdapat dua hipotesis antara lain (1) terdapat perbedaan kekonvergenan solusi model epidemi HIV/AIDS dalam populasi heteroseksual aktif ke titik-titik kesetimbangan endemik, eliminasi HIV,

dan eliminasi populasi dengan individu-individu positif HIV dan populasi negatif HIV/AIDS, (2) tidak ada perbedaan interpretasi epidemi HIV/AIDS dalam populasi **heteroseksual aktif** berdasarkan jenis kelamin infektor sebagai hasil aplikasi model antar propinsi Bali, dan Nusa Tenggara.

Metode penetapan hasil penelitian ini adalah menggunakan pemodelan matematika dimensi dua (2D) dengan langkah-langkah: indentifikasi masalah HIV/AIDS, penetapan asumsi, membangun model, analisis model, aplikasi pada kasus HIV di Bali dan Nusa Tenggara model dan interpretasi hasil aplikasi model untuk penularan HIV di Bali dan Nusa Tenggara.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Membangun Sistem Model Interaksi Pria/Wanita HIV dengan Pria/Wanita Suspek HIV

Model transmisi HIV/AIDS sudah banyak dikerjakan seperti Almaiedr *et al* [1], Bromberg [3], Jafaruddin [8] dan Jafaruddin dan Lobo [9] tetapi semuanya merupakan model interaksi antara *infected* dan *susceptible* tanpa memperhatikan jenis kelamin. Pada piper dikembangkan model-model tersebut menjadi model *susceptible* dan *infected* dari pria ke wanita dan sebaliknya dalam populasi heteroseksual aktif.

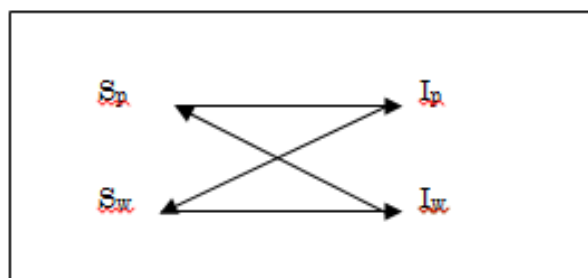
Misalkan $S_p(t)$ adalah subpopulasi pria dengan individu-individu sebagai suspek HIV, $S_w(t)$ adalah subpopulasi wanita sebagai suspek HIV, $I_p(t)$ adalah subpopulasi pria tertular HIV, dan $I_w(t)$ adalah populasi wanita dengan individu-individu positif HIV. Keempat populasi ini berinteraksi satu sama lain melalui suatu aktivitas seks wajar (antara pria dengan wanita) yang dinamakan heteroseksual.

Di sini, diasumsikan bahwa jumlah kedua populasi (pria dan wanita) konstan sebut N_p dan N_w sehingga

$$N_p = S_p(t) + I_p(t) \quad (1)$$

$$N_w = S_w(t) + I_w(t) \quad (2)$$

Berikut ini bagan model interaksi antar populasi pria dan wanita.



Gambar 1. Bagan Alir Perumusan Model $S_w S_p I_w I_p$

Terjadi interaksi seksual : $I_w S_p \rightarrow I_p^{+baru}$ atau $I_p S_w \rightarrow I_w^{+baru}$ dengan asumsi-asumsi (1) interaksi seks antara wanita HIV dengan pria suspek HIV menambah jumlah populasi pria HIV dengan laju $r_p S_p I_w$ tetapi jumlah populasi pria HIV menurun apabila terdapat sejumlah individu pria HIV/AIDS meninggal karena AIDS atau sebab-sebab lain dengan laju $a_p I_p$, (2) interaksi seks antara pria HIV dengan wanita suspek HIV menambah jumlah populasi wanita HIV dengan laju $r_w S_w I_p$ tetapi jumlah

populasi wanita HIV menurun apabila terdapat sejumlah individu wanita HIV/AIDS meninggal karena AIDS atau sebab-sebab lain dengan laju $a_w I_w$.

Atas dasar asumsi di atas maka dibangunlah model kualitatif yaitu (1) laju perubahan populasi pria HIV sebanding dengan pertambahan infeksi baru pria HIV dan penurunan pria HIV karena meninggal karena AIDS atau sebab-sebab lain, (2) laju perubahan populasi wanita HIV sebanding dengan pertambahan infeksi baru wanita HIV dan penurunan wanita HIV karena meninggal karena AIDS atau sebab-sebab lain (Jafaruddin, 2006, 2007)

Model kualitatif ini dapat dinyatakan dalam sistem persamaan diferensial non linier kontinu yaitu

$$\begin{cases} \frac{dS_p}{dt} = -r_p S_p I_w + a_p I_p \\ \frac{dS_w}{dt} = -r_w S_w I_p + a_w I_w \end{cases} \quad \text{atau} \quad \begin{cases} \frac{dI_p}{dt} = r_p S_p I_w - a_p I_p \\ \frac{dI_w}{dt} = r_w S_w I_p - a_w I_w \end{cases} \quad (3)$$

Berlaku hubungan

$$\frac{dI_p}{dt} = -\frac{dS_p}{dt} \quad \text{dan} \quad \frac{dI_w}{dt} = -\frac{dS_w}{dt}$$

Model penularan HIV dalam populasi heteroseksual adalah, yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{dI_p}{dt} &= r_p I_w (N_p - I_p) - a_p I_p \\ \frac{dI_w}{dt} &= r_w I_p (N_w - I_w) - a_w I_w \end{aligned} \quad (4)$$

Misalkan $T_*(I_{p^*}, I_{w^*})$ merupakan titik kesetimbangan sistem model (5) apabila $\left. \frac{dI_p}{dt} \right|_{T(I_{p^*}, I_{w^*})} = 0$ dan

$\left. \frac{dI_w}{dt} \right|_{T(I_{p^*}, I_{w^*})} = 0$. Dengan syarat ini diperoleh titik kesetimbangan eliminasi populasi $T_1(0,0)$ dan

titik kesetimbangan endemik yaitu $T_2(I_{p^*}, I_{w^*})$. Selanjutnya dicari I_{p^*} dan I_{w^*} . Dari persamaan (3) dengan menentukan I_{p^*} :

$$r_p (N_p - I_{p^*}) I_{w^*} - a_p I_{p^*} = 0 \Leftrightarrow r_p (N_p - I_{p^*}) I_{w^*} = a_p I_{p^*} \quad (5)$$

$$I_{w^*} = \frac{a_p I_{p^*}}{r_p (N_p - I_{p^*})} \quad (6)$$

Dari persamaan (4) dengan menentukan $\left. \frac{dI_p}{dt} \right|_{T_2(I_{p^*}, I_{w^*})} = 0$, yaitu:

$$r_w (N_w - I_{w^*}) I_{p^*} - a_w I_{w^*} = 0 \Leftrightarrow r_w (N_w - I_{w^*}) I_{p^*} = a_w I_{w^*} \quad (7)$$

$$I_{p^*} = \frac{a_w I_{w^*}}{r_w (N_w - I_{w^*})} \quad (8)$$

Substitusi (6) ke (7) dan (8) ke (5) dan dengan kalkulasi aljabar hingga diperoleh titik kesetimbangan endemik $T_2 = (I_{p^*}, I_{w^*})$ dengan I_{p^*} dan I_{w^*} masing-masing $T_2 = (I_{p^*}, I_{w^*})$

$I_{p^*} = \frac{r_p r_w N_p N_w - a_p a_w}{r_w (r_p N_w + a_p)} \quad I_{w^*} = \frac{r_p r_w N_p N_w - a_p a_w}{r_p (r_w N_p + a_w)}$. Titik kesetimbangan ini non negatif apabila

$N_w N_p > \frac{a_p a_w}{r_p r_w}$. Kondisi ini disebut kondisi *Threshold* yaitu suatu kondisi dimana kestabilan model mengalami gangguan (perturbasi) sehingga terjadi variasi atau perbedaan yang sangat besar pada kepadatan populasi sebelum akhirnya ke keadaan tetap (steady state).

Kondisi *Threshold* disebut juga sebagai kondisi ambang batas dapat dituliskan sebagai:

$$\frac{r_p r_w N_w N_p}{a_p a_w} = \left(\frac{r_p N_p}{a_p} \right) \left(\frac{r_w N_w}{a_w} \right) > 1$$

Dengan $\frac{r_p}{a_p}$ adalah perbandingan antara laju infeksi baru pada pria dan laju penurunan jumlah populasi penderita HIV pada pria, $\frac{r_w}{a_w}$ adalah perbandingan antara laju infeksi baru pada wanita dan laju penurunan jumlah populasi penderita HIV pada wanita, $\frac{r_p N_p}{a_p}$ adalah jumlah rata-rata pria yang berinteraksi dengan wanita tertular HIV, $\frac{r_w N_w}{a_w}$ adalah jumlah rata-rata dari wanita yang berinteraksi dengan pria tertular HIV.

Analisis Kestabilan di Sekitar Titik Keseimbangan $T_1(0,0)$

Misalkan model sistem (3) ditulis sebagai :

$$\begin{aligned} f(I_p, I_w) &= r_p I_w (N_p - I_p) - a_p I_p \\ g(I_p, I_w) &= r_w I_p (N_w - I_w) - a_w I_w \end{aligned} \quad (9)$$

Matriks Jacobian sistem (12) adalah

$$J(I_p, I_w) = \frac{\partial(f, g)}{\partial(I_p, I_w)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial I_p} & \frac{\partial f}{\partial I_w} \\ \frac{\partial g}{\partial I_p} & \frac{\partial g}{\partial I_w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_p I_w - a_p & r_p (N_p - I_p) \\ r_w (N_w - I_w) & -r_w I_p - a_w \end{bmatrix} \quad (10)$$

Di titik kesetimbangan $T_1(0,0)$ adalah $J(0,0) = \begin{bmatrix} -a_p & r_p N_p \\ r_w N_w & -a_w \end{bmatrix}$ sehingga persamaan karakteristik adalah :

$$|\lambda I - J(0,0)| = \begin{vmatrix} \lambda + a_p & -r_p N_p \\ -r_w N_w & \lambda + a_w \end{vmatrix} = \lambda^2 + (a_p + a_w)\lambda + a_p a_w - r_p r_w N_p N_w = 0$$

Analisis kestabilan titik kesetimbangan $T_1(0,0)$ berdasarkan kondisi *Threshold* terbagi menjadi dua kasus (1) Jika $\frac{r_p r_w N_p N_w}{a_p a_w} < 1$ (kondisi *threshold* tidak terpenuhi) maka nilai eigen keduanya bernilai negatif. Dengan demikian sistem model (2) stabil asimtotik di sekitar titik kesetimbangan $T_1(0,0)$

(2) Jika $\frac{r_p r_w N_p N_w}{a_p a_w} > 1$ (kondisi *threshold* terpenuhi) maka akar-akar persamaan karakteristik

sebagai nilai eigen berlawanan tanda. Dengan demikian sistem model (2) tidak stabil di sekitar titik kesetimbangan $T_1(0,0)$.

Analisis Kestabilan di Sekitar Titik Kesetimbangan T_2

$T_2(I_{p^*}, I_{w^*})$ dengan merupakan titik kesetimbangan nonnegatif apabila $\frac{r_p r_w N_p N_w}{a_w a_p} > 1$. Dapat pula dinyatakan dalam persamaan garis kesetimbangan dengan persamaan sebagai berikut:

$$F(I_{p^*}, I_{w^*}) = r_w(r_p N_w + a_p)I_{p^*} - r_p(r_w N_p + a_w)I_{w^*} \quad (11)$$

Persamaan karakteristik pada titik kesetimbangan ini adalah

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \left(\frac{r_w N_p (r_p N_w + a_p)}{r_w N_p + a_w} + \frac{r_p N_w (r_w N_p + a_w)}{r_p N_w + a_p} \right) \lambda + r_w N_w r_p N_p + a_p a_w \quad (12)$$

Karena koefisien dari $\lambda^2, \lambda^1, \lambda^0$ pada persamaan (12) adalah positif maka bagian real dari akar-akar persamaan (12) bertanda negatif.

4. Aplikasi Model pada Kasus HIV/AIDS

Aplikasi Model pada Kasus HIV/AIDS di Bali

Karena keterbatasan informasi data tentang jumlah penduduk propinsi Bali tiga tahun terakhir, maka data yang dipakai adalah data penduduk dan pengidap HIV/AIDS di Bali tahun 2001-2003 (BPS Bali [6]).

Tabel 1. Jumlah Penduduk dan Jumlah Individu HIV/AIDS di Bali tahun 2001-2003 berdasarkan jenis kelamin

Tahun	Jumlah Penduduk	Jumlah Pria (N_p)	Jumlah Wanita (N_w)	PDHA (I_p)	WDHA (I_w)
2001	3 048 317	1 521 461	1 526 856	64	66
2002	3 090 497	1 543 678	1 546 819	104	108
2003	3 139 022	1 568 198	1 570 824	245	250

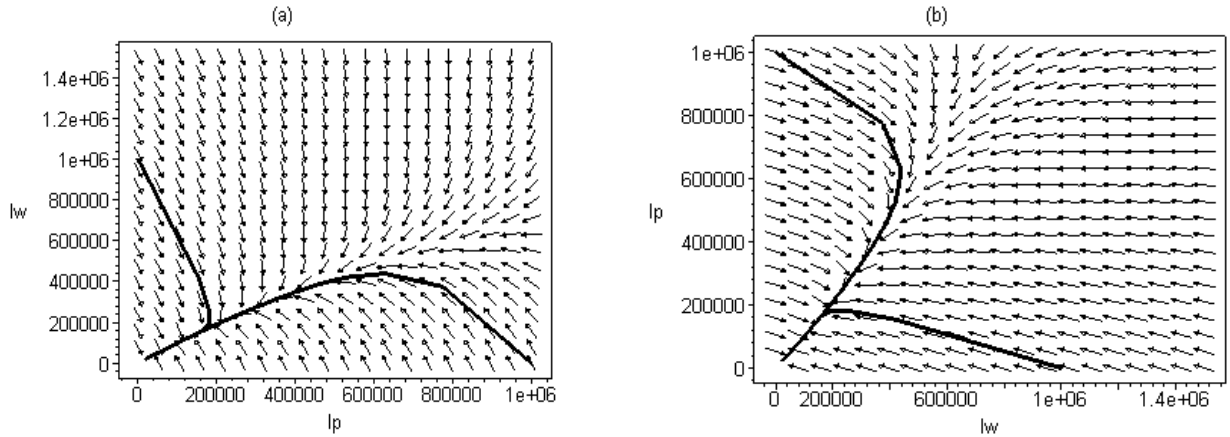
Tabel 2. Nilai parameter penularan HIV/AIDS di Bali tahun 2001-2003

Parameter	r_p	a_p	r_w	a_w	amb	$\frac{r_p N_p}{a_p}$	$\frac{r_w N_w}{a_w}$
	0.000022	33.095	0.000076	112.202	1.0248	0.988	1.037

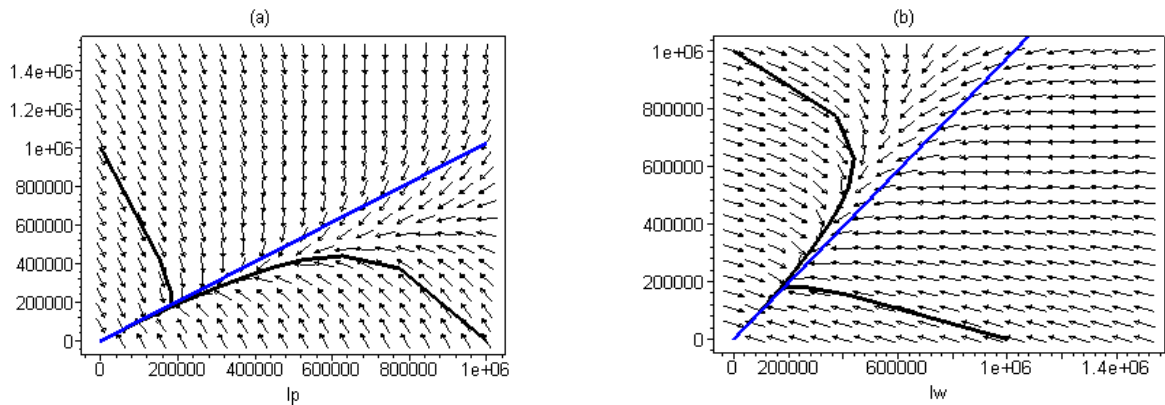
Karena $amb = \frac{r_p r_w N_p N_w}{a_w a_p} = 1.0248 > 1$ maka nilai eigen di sekitar titik kesetimbangan $T_1(0,0)$

berlawanan tanda dan titik kesetimbangan $T_2(I_p, I_w)$ nonnegatif serta nilai eigennya keduanya negatif. Nilai eigen di $T_1(0,0)$ adalah 0.629829198 dan -145.9270369. Titik kesetimbangan $T_2(I_p, I_w) = (18296.2266; 18742.87811)$ dengan nilai eigen -0.627507349 atau -146.4669789. Dengan demikian T_1 adalah titik eliminasi kedua populasi tidak stabil, sedangkan T_2 adalah titik endemik yang stabil asimtotik.

Dapat dikemukakan bahwa di Bali tahun 2001 hingga 2003 rata-rata seorang pria suspek berinteraksi dengan seorang wanita tertular HIV, dan rata-rata 1 atau 2 orang wanita suspek berinteraksi seorang pria tertular HIV. Gambar 10 adalah dinamika phase plane epidemi HIV/AIDS di Bali di sekitar titik kesetimbangan endemik.



Gambar 2. Phase plane dinamika interaksi populasi pria HIV (I_p) dengan populasi wanita HIV (I_w) di sekitar titik kesetimbangan $T_2(I_{ps}, I_{ws}) = (18296.2266; 18742.87811)$ dengan nilai eigen -0.6275073494 atau -146.4669789 .



Gambar 3. Garis kesetimbangan $g(I_p, I_w) = 0.005023391381I_p - 0.004903681627I_w$ sistem model linier dengan sistem model non linier di sekitar titik kesetimbangan.

Tampak dari Gambar 2 dan 3 bahwa walau keadaan awal populasi $I_p \gg I_w$ tetapi I_w menurunkan I_p dan sebaliknya keadaan awal $I_w \gg I_p$ tetapi I_p menurunkan I_w . Situasi ini berlangsung dalam waktu yang sangat lama hingga mencapai titik kesetimbangan di mana $I_{ws} > I_{ps}$.

Gambar 3 menunjukkan bahwa di dekat titik kesetimbangan garis kesetimbangan antara sistem model linier dan sistem model non linier adalah sama yakni merupakan garis tetap linier, tetapi di kejauhan dari titik kesetimbangan garis tetap berupa lengkungan mulus tetapi mereka melalui titik kesetimbangan. Semua titik yang terletak pada garis g baik pada Gambar 3 (a) atau (b) adalah titik kesetimbangan yang terkait dengan data yang tidak seluruhnya sama. Tidak semua titik pada garis g adalah titik kesetimbangan sebab jika awalnya pada garis g maka suatu saat titik tersebut tidak lagi terletak pada g . Garis g merupakan garis tetap disekitar titik kesetimbangan sistem model.

Aplikasi Model pada Kasus HIV/AIDS di NTB

Karena keterbatasan informasi data tentang jumlah penduduk propinsi Bali tiga tahun terakhir, maka data yang dipakai adalah data penduduk dan pengidap HIV/AIDS di NTB tahun 2003-2005 (BPS NTB [5]).

Tabel 3. Jumlah Penduduk dan Jumlah Individu HIV/AIDS di NTB tahun 2003-2005 berdasarkan jenis kelamin

Tahun	Jumlah Penduduk	Jumlah Pria (N_p)	Jumlah Wanita (N_w)	PDHA (I_p)	WDHA (I_w)
2003	4.005.360	1.932.242	2.073.118	3	5
2004	4.076.040	1.940.875	2.131.15	13	11
2005	4.143.292	1.999.820	2.143.472	20	38

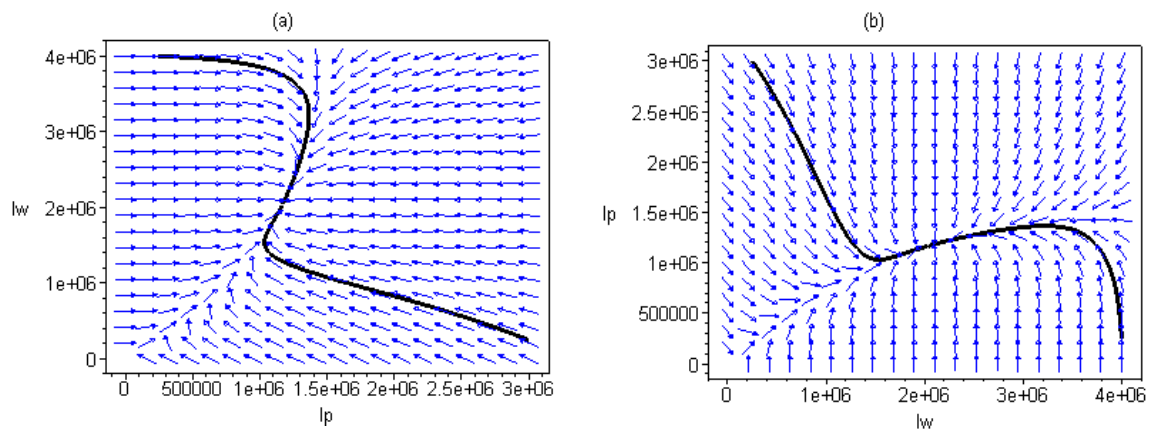
Tabel 4. Nilai parameter penularan HIV/AIDS di NTB tahun 2003-2005

Parameter	r_p	a_p	r_w	a_w	amb	$\frac{r_p N_p}{a_p}$	$\frac{r_w N_w}{a_w}$
	0.18×10^{-5}	2.37	0.98×10^{-6}	0.0196	149.65	1.444	103.645

Karena $amb = \frac{r_p r_w N_p N_w}{a_w a_p} = 149.65 > 1$ maka nilai eigen di sekitar titik kesetimbangan

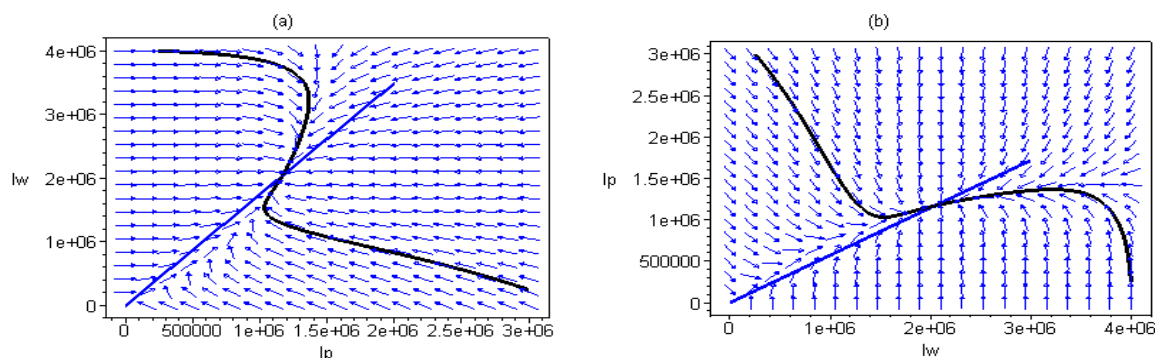
$T_1(0,0)$ berlawanan tanda dan titik kesetimbangan $T_2(I_p, I_w)$ nonnegatif serta nilai eigennya keduanya negatif. Nilai eigen di $T_1(0,0)$ adalah -4.0823 dan 1.6926. Titik kesetimbangan $T_2(I_{ps}, I_{ws}) = (1,166,403; 2,038,167)$ dengan nilai eigen -5.989 atau -1.154. Dengan demikian T_1 adalah titik eliminasi kedua populasi tidak stabil, sedangkan T_2 adalah titik endemik yang stabil asimtotik.

Berdasarkan data pada dua kolom terakhir pada tabel 2 dapat dikatakan bahwa di NTB tahun 2003 hingga 2005 rata-rata 1 atau 2 orang pria suspek berinteraksi dengan seorang wanita tertular HIV, dan rata-rata 103 atau 104 orang wanita suspek berinteraksi seorang pria tertular HIV. Berikut dinamika phase plane epidemi HIV/AIDS di NTB di sekitar titik kesetimbangan endemik.



Gambar 4. Phase plane dinamika interaksi populasi pria HIV (I_p) dengan populasi wanita HIV (I_w) di sekitar titik kesetimbangan $T_2(I_{ps}, I_{ws}) = (1,166,403; 2,038,167)$ dengan nilai eigen dengan nilai eigen -5.989 atau -1.154.

Tampak bahwa walau keadaan awal populasi $I_p \gg I_w$ tetapi I_w meningkat seiring meningkatnya laju infeksi baru HIV sebagai akibat interaksi I_p dengan wanita suspek HIV dan menurunnya populasi pria HIV/AIDS karena meninggal akibat AIDS atau sebab-sebab lain. Sebaliknya keadaan awal $I_w \gg I_p$ tetapi I_p meningkat karena interaksi I_w dengan pria suspek HIV dan menurunnya jumlah I_w akibat meninggal karena AIDS atau sebab-sebab lain.



Gambar 5. Garis kesetimbangan $G(I_p, I_w) = 0.592 \times 10^{-5} I_p - 0.339 \times 10^{-5} I_w$ sistem model linier dengan sistem model non linier pada titik kesetimbangan.

Fakta lain dari Gambar 4 atau Gambar 5 menunjukkan bahwa di NTB walaupun jumlah awal populasi pria HIV/AIDS dan wanita HIV/AIDS keduanya masih rendah seperti saat ini tetapi keduanya akan meningkat terus hingga mencapai titik kesetimbangan endemik dengan pria HIV/AIDS sebanyak 1,166,403 jiwa dan wanita HIV/AIDS sebanyak 2,038,167 jiwa.

Aplikasi Model pada Kasus HIV/AIDS di NTT

Karena keterbatasan informasi data tentang jumlah penduduk propinsi Bali tiga tahun terakhir, maka data yang dipakai adalah data penduduk dan pengidap HIV/AIDS di NTT tahun 2005-2007, (BPS NTT [4]).

Tabel 5. Jumlah Penduduk dan Jumlah Individu HIV/AIDS di NTT tahun 2005-2007 berdasarkan jenis kelamin

Tahun	Jumlah Penduduk	Jumlah Pria (N_p)	Jumlah Wanita (N_w)	PDHA (I_p)	WDHA (I_w)
2003	4.005.360	1.932.242	2.073.118	3	5
2004	4.076.040	1.940.875	2.131.15	13	11
2005	4.143.292	1.999.820	2.143.472	20	38

Tabel 6. Nilai parameter penularan HIV/AIDS di NTT tahun 2005-2007

Parameter	r_p	a_p	r_w	a_w	amb	$\frac{r_p N_p}{a_p}$	$\frac{r_w N_w}{a_w}$
	0.56×10^{-5}	12.22	0.65×10^{-5}	12.88	1.053	0.98	1.07

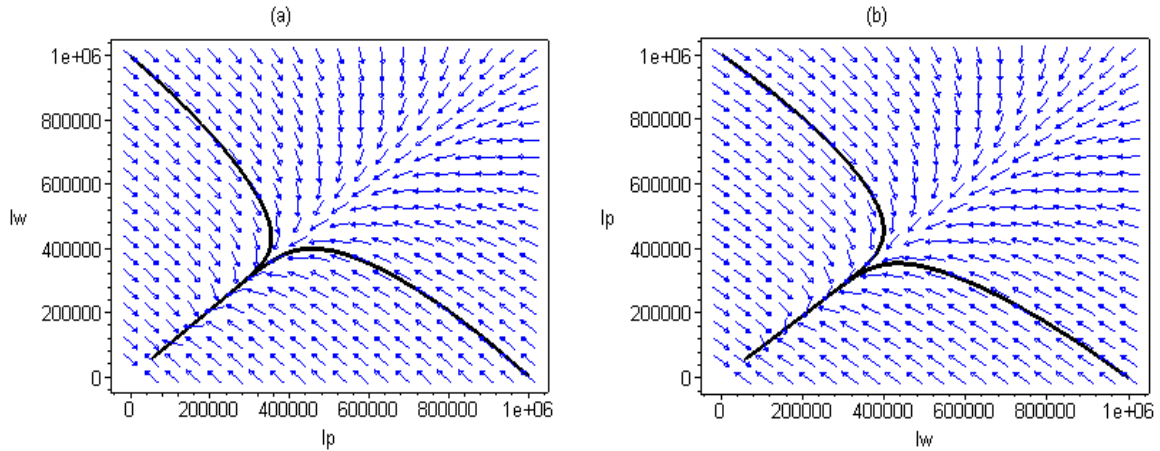
Karena $amb = \frac{r_p r_w N_p N_w}{a_w a_p} = 1.053 > 1$ maka nilai eigen di sekitar titik kesetimbangan $T_1(0,0)$

berlawanan tanda dan titik kesetimbangan $T_2(I_p, I_w)$ nonnegatif serta nilai eigennya keduanya negatif. Nilai eigen di $T_1(0,0)$ adalah 0.33 dan -25.44. Titik kesetimbangan $T_2(I_{ps}, I_{ws}) = (52761; 55178)$ dengan nilai eigen -0.33 atau -25.44. Dengan demikian T_1 adalah titik eliminasi kedua populasi tidak stabil, sedangkan T_2 adalah titik endemik yang stabil asimtotik.

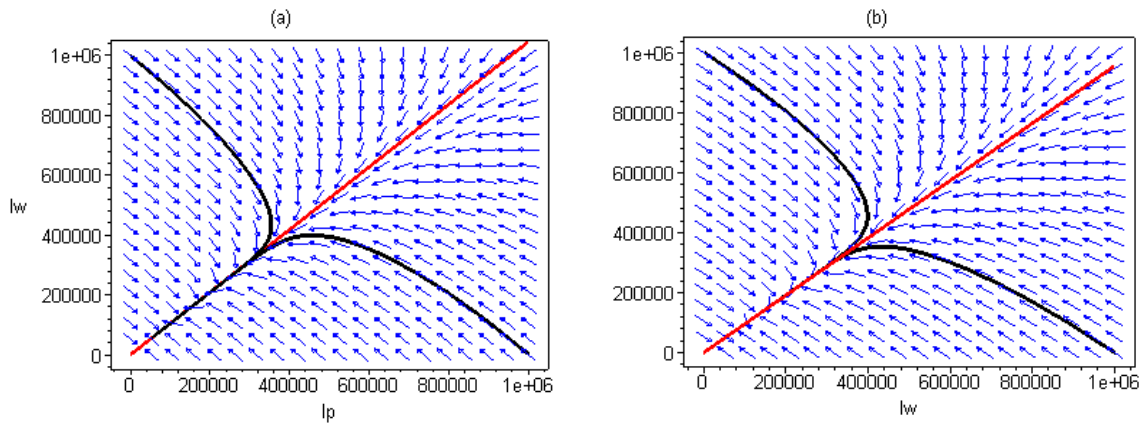
Berdasarkan data pada dua kolom terakhir pada tabel 4 dapat dikatakan bahwa di NTT tahun 2005 hingga 2007 rata seorang pria suspek berinteraksi dengan seorang wanita tertular HIV, dan rata-rata 1 atau 2 orang wanita suspek berinteraksi seorang pria tertular HIV. Berikut dinamika phase plane epidemi HIV/AIDS di NTT di sekitar titik kesetimbangan endemik.

Tampak bahwa walau keadaan awal populasi $I_p \gg I_w$ tetapi I_w meningkat seiring meningkatnya laju infeksi baru HIV sebagai akibat interaksi I_p dengan wanita suspek HIV dan menurunnya populasi pria HIV/AIDS karena meninggal akibat AIDS atau sebab-sebab lain.

Sebaliknya keadaan awal $I_w \gg I_p$ tetapi I_p meningkat karena interaksi I_w dengan pria suspek HIV dan menurunnya jumlah I_w akibat meninggal karena AIDS atau sebab-sebab lain.



Gambar 6. Phase plane dinamika interaksi populasi pria HIV (I_p) dengan populasi wanita HIV (I_w) di sekitar titik kesetimbangan $T_2(I_{ps}, I_{ws}) = (52761; 55178)$ dengan nilai eigen -0.33 atau -25.44.



Gambar 7. Garis kesetimbangan $G(I_p, I_w) = 0.000157I_p - 0.000150I_w = 0$ sistem model linier dengan sistem model non linier pada titik kesetimbangan.

Fakta lain dari Gambar 6 (a) atau (b) menunjukkan bahwa walaupun jumlah awal populasi pria HIV/AIDS dan wanita HIV/AIDS keduanya masih rendah seperti saat ini tetapi keduanya akan meningkat terus hingga mencapai titik kesetimbangan endemik dengan pria HIV/AIDS sebanyak 52761 orang dan wanita HIV/AIDS sebanyak 55178 orang.

Beberapa aspek penularan HIV/AIDS di NTT yang dapat diamati dari Gambar 7 (a) atau (b) di atas adalah (1) kehadiran populasi pria suspek HIV/AIDS dalam jumlah yang besar dibandingkan dengan wanita HIV akan meningkatkan populasi wanita HIV hingga mencapai maksimum dan populasi pria menurun karena meninggal akibat AIDS atau sebab lain hingga akhirnya dalam waktu yang sangat lama mencapai titik kesetimbangan endemik yakni pria HIV berjumlah 52761 orang dan wanita HIV 55178 orang. (2) kehadiran populasi wanita suspek HIV/AIDS dalam jumlah yang besar dalam populasi pria HIV akan meningkatkan populasi pria HIV hingga mencapai maksimum dan populasi wanita menurun karena meninggal akibat AIDS atau sebab lain hingga akhirnya dalam waktu yang sangat lama mencapai titik kesetimbangan endemik yakni pria HIV berjumlah 52761 orang dan wanita HIV 55178 orang. (3) Saat ini, keadaan setimbang masih sangat besar tetapi akan dicapai kelak, jika populasi pria HIV dan wanita HIV terus bertambah dengan angka pertambahan populasi terus meningkat. Tidak ada cara lain, bukan dengan pengobatan tetapi dengan menurunkan

laju pertumbuhan populasi pria HIV ($a_p < 12.22$) dan menurunkan laju pertumbuhan populasi wanita HIV ($a_w < 12.88$).

5. Simpulan

Model dinamika HIV/AIDS dalam populasi heteroseksual yang telah diaplikasikan pada data HIV/AIDS di Bali, NTB, dan NTT dapat dipakai untuk memprediksi dinamika populasi HIV/AIDS 1, 2, 3 tahun dan seterusnya untuk masa mendatang. Efek daya dukung lingkungan dan perbedaan data awal mengakibatkan berbeda hingga pada akhirnya sama dalam waktu yang sangat lama. Di Bali tahun 2001 hingga 2003 rata-rata seorang pria suspek berinteraksi dengan seorang wanita tertular HIV, dan rata-rata 1 atau 2 orang wanita suspek berinteraksi dengan seorang pria tertular HIV, Di NTB tahun 2003 hingga 2005 rata-rata 1 atau 2 orang pria suspek berinteraksi dengan seorang wanita tertular HIV, dan rata-rata 103 atau 104 orang wanita suspek berinteraksi dengan seorang pria tertular HIV, dan di NTT tahun 2005 hingga 2007 rata-rata seorang pria suspek berinteraksi dengan seorang wanita tertular HIV, dan rata-rata 1 atau 2 orang wanita suspek berinteraksi dengan seorang pria tertular HIV. Kehadiran populasi wanita suspek HIV/AIDS dalam jumlah yang besar dalam populasi pria HIV akan meningkatkan populasi pria HIV hingga mencapai maksimum dan populasi wanita menurun karena meninggal akibat AIDS atau sebab lain hingga akhirnya dalam waktu yang sangat lama mencapai titik kesetimbangan endemik. Saat ini, keadaan setimbang masih sangat besar di ketiga propinsi untuk individu HIV/AIDS tetapi akan dicapai kelak, jika populasi pria HIV dan wanita HIV terus bertambah dengan angka pertumbuhan populasi terus meningkat.

Model infektor 2D belum mempertimbangkan daya dukung lingkungan dan mekanisme diagnosis HIV sehingga pada penelitian pengembangan model ini dapat difokuskan dengan melibatkan kedua parameter ini. Berubahnya data akan mengakibatkan perubahan nilai parameter HIV/AIDS sehingga masih perlu dikaji model estimasi parameter dengan variabel state adalah data HIV/AIDS dan variabel bebas adalah waktu.

Ucapan Terima Kasih

Paper ini adalah sebagian dari hasil penelitian yang dibiayai oleh DIPA Universitas Nusa Cendana (Undana) tahun 2009. Penulis menyampaikan terima kasih kepada Lembaga Penelitian Undana atas pelayanan administrasi pengusulan, evaluasi dan pelaporan. Terima kasih yang setinggi-tingginya kepada Pimpinan Undana atas pendanaan penelitian ini.

Daftar Pustaka

1. Almeder, Ch., Feichtinger, G., Sanderson, W., and Veliov, V.M., 2004, *Prevention and Medication of HIV/AIDS-The Case of Botswana*, University of Vienna, Austria, www.univie.ac.at.
2. Burghes, D.N., and Borrie, M.S., 1981, *Modeling With Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, New York.
3. Broomberg, J., Soderlund, N., and Mills, A., 1996, *Economic analysis at the global level: a resource requirement model for HIV prevention in developing countries*, Health Policy **38**: pp 45-65.
4. BPS NTT, 2008, Penduduk NTT berdasarkan jenis kelamin. Kupang.
5. BPS NTB, 2006, Penduduk NTB berdasarkan jenis kelamin. Mataram.
6. BPS Bali, 2004, Penduduk Bali berdasarkan Jenis Kelamin. Denpasar.
7. Ditjen PPM & PLP Depkes, 2007 Statistik HIV/AIDS Indonesia. Jakarta.

8. Jafaruddin. 2005. *Analisis Epidemiologi Model Predator-Prey HIV/AIDS*, Buletin Penelitian dan Pengembangan, Pasca IAEUP, ISSN 1412-3703.
9. Jafaruddin, and Lobo, M., 2007. *Model Sederhana Epidemi HIV/AIDS*, Jurnal MIPA, FST Undana, ISSN 0216-583X
10. KPAN, 2001, *Rencana Strategi Penanggulangan AIDS di Indonesia*.
11. Nicholas, I., 2005, *HIV/AIDS and Prevention Options for Women*, Interagency Coalition on AIDS and Development : www.icad.cisd.com :1-4.
12. WHO dan UNAIDS, 2005, *700.000 ODHA di Negera berkembang Telah Mendapatkan Pengobatan HIV/AIDS*, Joint Media Release WHO/UNAIDS/Global Fund/US Government, www.kesrepro.info