Jurnal Matematika Integratif
Volume 12 No 2, Oktober 2016, pp 99-106
p-ISSN:1412-6184, e-ISSN:2549-90
doi:10.24198/jmi.v12.n2.11926.99-106

Nilai Eigen Matriks Permutasi *Fuzzy* Berordo 2×2 dan 3×3

Ari Wardayani [1], Suroto [2]
[1,2)] Jurusan Matematika Unsoed
Kampus UNSOED Karangwangkal, Jl. Dr. Suparno
Email: ariwardayani@yahoo.co.id, suroto_80@yahoo.com

ABSTRAK

Joe Anand dan Edal Anand (2015) membahas nilai eigen matriks *fuzzy* melalui persamaan karakteristik seperti pada matriks biasa tetapi tidak mendefinisikan operasi pengurangan pada matriks fuzzy. Mengingat bahwa himpunan matriks *fuzzy* persegi hanya merupakan suatu semi ring yang belum tentu terjamin eksistensi invers penjumlahannya maka perlu dijelaskan pendefinisian operasi pengurangan pada saat membahas nilai eigen tersebut. Karena himpunan matriks permutasi *fuzzy* merupakan suatu semi lapangan, maka pembahasan mengenai nilai eigen dan beberapa sifat terkait melalui persamaan karakteristik kemungkinan dapat dilakukan.

Pada makalah ini hanya dibahas mengenai nilai eigen pada matriks permutasi *fuzzy* berordo 2×2 dan 3×3 dengan mengadopsi gagasan pada Joe Anand dan Edal Anand (2015) tetapi dengan memodifikasi operasi pengurangan seperti pada Sidky dan Emam (1992). Dengan menerapkan operasi pengurangan tersebut, diperoleh bahwa kemungkinan nilai eigen pada matriks permutasi *fuzzy* berordo 2×2 dan 3×3 adalah 1 atau sembarang nilai pada interval [0,1].

Kata kunci: nilai eigen, matriks fuzzy, operasi pengurangan, permutasi

ABSTRACT

Joe Anand dan Edal Anand (2015) discussed about eigen value of fuzzy matrices by characteristic equation in conventional matrices, but it's not defined substract operation in fuzzy matrices. The set all of square fuzzy matrices is just a semi ring that it's not valid in existence of addition inverse, then it's important to define substract operation in eigen value discussing. More than, the set all of fuzzy permutation matrices is a semi field so the discussing about eigen value and it's properties may be done.

This paper discussed about eigen value of 2×2 and 3×3 fuzzy permutation matrices by adopted idea in Joe Anand and Edal Anand (2015), and modified substract operation refers to Sidky and Emam (1992). By applying this substraction, it's yields that eigen value of 2×2 and 3×3 fuzzy permutation matrices is 1 or any value in closed interval [0,1].

Keywords: *Up to six keywords should also be included.*

1. Pendahuluan

Semi ring *fuzzy* (Mordeson and Nair, 2001) merupakan sistem matematika yang terbentuk dari interval tutup [0,1] dan dilengkapi dengan operasi penjumlahan serta perkalian yakni

$$a + b = maks(a, b)$$
$$ab = min\,(a, b)$$

untuk setiap $a, b \in [0,1]$. Matriks *fuzzy* merupakan matriks yang entri-entrinya merupakan elemen pada interval tutup [0,1] (Kandasamy, dkk., 2007). Dengan kata lain suatu matriks $A = [a_{ij}]$ dikatakan matriks *fuzzy* apabila $a_{ij} \in [0,1]$. Matriks *fuzzy* juga dapat didefinisikan melalui suatu fungsi keanggotaan (Pal, 2016). Pada Wang (1984), Chong-Xin dan Xiang (1984), dijelaskan entri matriks *fuzzy* melalui semi *simple* ring [0,1], kemudian operasi penjumlahan serta perkalian matriks *fuzzy* didefinisikan sebagaimana operasi penjumlahan dan perkalian pada matriks biasa. Misalkan $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ dan $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ masing-masing adalah matriks *fuzzy*, maka hasil penjumlahan matriks A dan B adalah

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n} = [maks(a_{ij}, b_{ij})]_{m\times n}$$

Selain itu misalkan $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ dan $B = [b_{ij}]_{n\times t}$ masing-masing matriks *fuzzy*, serta k adalah skalar pada [0,1] maka hasil perkalian A dan B, serta hasil perkalian skalar k dengan A adalah

$$AB = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right]_{m\times t} = [maks(min(a_{ik}, b_{kj}))]_{m\times t}$$
$$kA = [k.a_{ij}]_{m\times n} = [min\,(k, a_{ij})]_{m\times n}\ .$$

Sementara itu, pada Sidky dan Emam (1992) dijelaskan operasi pengurangan pada interval tutup [0,1] yakni

$$a - b = \begin{cases} a, \text{untuk } a > b \\ 0, \text{untuk } a \leq b \end{cases}$$

untuk setiap $a, b \in [0,1]$. Dengan mengadopsi operasi pengurangan tersebut, didefinisikan operasi pengurangan matriks *fuzzy* yakni

$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m\times n}$$

untuk setiap matriks f*uzzy* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ dan $B = [b_{ij}]_{m\times n}$. Pada pembahasan Wang (1984) dijelaskan bahwa suatu matriks *fuzzy* bersifat invertibel jika dan hanya jika matriks tersebut merupakan suatu matriks permutasi. Pada Chong-Xin, dkk (1984) juga dijelaskan beberapa jenis matriks *fuzzy* khusus yang salah satunya adalah matriks *fuzzy* non singular.

Pembahasan mengenai nilai eigen matriks *fuzzy* dijelaskan antara lain pada Salahshour, dkk (2012),Triantaphyllou dan Mann (1990), Theodoru dan Alevizos (2006) serta Chiao (1998). Selanjutnya Joe Anand dan Edal Anand (2015) membahas nilai eigen matriks *fuzzy* dan beberapa sifatnya melalui persamaan karakteristik, akan tetapi tidak menjelaskan pendefinisian operasi pengurangannya. Mengingat bahwa himpunan matriks *fuzzy* persegi hanya merupakan suatu semi ring yang dengan kata lain belum tentu terjamin eksistensi invers penjumlahannya maka perlu dijelaskan pendefinisian operasi pengurangan pada saat membahas nilai eigen tersebut. Hal ini perlu dilakukan karena pada saat membahas mengenai persamaan karakteristik akan melibatkan operasi pengurangan. Selanjutnya, karena himpunan matriks permutasi *fuzzy* merupakan suatu semi lapangan dan operasi pengurangan telah didefinikan dalam rangka untuk memodifikasi invers penjumlahan, maka akan dapat dimungkinkan untuk melakukan pembahasan mengenai nilai eigen dan sifat-sifatnya pada matriks permutasi *fuzzy* melalui persamaan karakteristik.
Tulisan ini akan membahas mengenai nilai eigen suatu matriks permutasi *fuzzy* berordo 2×2 dan 3×3 dengan mengadopsi pada pembahasan Joe Anand dan Edal Anand (2015) dan pendefinisian pengurangan matriks *fuzzy* seperti pada Sidky dan Emam (1992). Pada bagian awal tulisan ini dijelaskan mengenai motivasi dan beberapa hal terkait matriks permutasi *fuzzy*. Selanjutnya pada bagian utama yang merupakan hasil utama pada tulisan ini dijelaskan mengenai nilai eigen matriks permutasi *fuzzy* berordo 2×2 dan 3×3. Hasil ini akan digunakan sebagai *counter example* untuk menunjukkan beberapa sifat nilai eigen matriks *fuzzy* pada pembahasan Joe Anand dan Edal Anand (2015) belum tentu berlaku (tidak dibahas pada tulisan ini).

2. Matriks Permutasi Fuzzy

Matriks *fuzzy* merupakan matriks yang entri-entrinya merupakan elemen pada pada interval tutup [0,1] seperti dijelaskan pada definisi berikut ini.

Definisi 1. (Kandasamy, 2007) *Matriks fuzzy merupakan matriks* $A = [a_{ij}]$ *dengan* $a_{ij} \in [0,1]$.

Suatu matriks *fuzzy* dikatakan persegi apabila banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom. Operasi penjumlahan, perkalian dan perkalian skalar matriks *fuzzy* didefinisikan sebagaimana operasi penjumlahan, perkalian dan perkalian skalar matriks biasa. Sementara pada tulisan ini, operasi pengurangan didefinisikan dengan

$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m\times n}$$
untuk setiap matriks f*uzzy* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ dengan

$$a_{ij} - b_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, \text{untuk } a_{ij} > b_{ij} \\ 0, \text{untuk } a_{ij} \leq b_{ij} \end{cases}$$

 p-ISSN:1412-6184, e-ISSN:2549-90
doi:10.24198/jmi.v12.n2.11926.99-106

untuk setiap $a_{ij}, b_{ij} \in [0,1]$.

Teorema 1. *Misalkan M adalah himpunan semua matriks fuzzy persegi, maka M merupakan suatu semi ring, dan selanjutnya dinamakan semi ring matriks fuzzy persegi*
Bukti.
Misal diambil sembarang matriks *fuzzy* persegi $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ dan $C = [c_{ij}]$ yang berordo n, maka hasil penjumlahan dari A dan B juga merupakan matriks *fuzzy* persegi. Operasi penjumlahan bersifat assosiatif pada M yaitu

$$(A+B)+C = [maks\{a_{ij}, b_{ij}\}] + [c_{ij}] = [a_{ij}] + [maks\{b_{ij}, c_{ij}\}] = A + (B + C).$$

Matriks $0 = [0_{ij}]$ dengan $0_{ij} = 0$ untuk setiap i dan j, merupakan elemen identitas terhadap operasi penjumlahan pada M. Sementara itu operasi penjumlahan pada matriks *fuzzy* juga bersifat komutatif, yakni

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] = [maks\{a_{ij}, b_{ij}\}] = [maks\{b_{ij}, a_{ij}\}] = [b_{ij} + a_{ij}] = B + A$$

Dengan demikian M merupakan monoid komutatif terhadap operasi penjumlahan.

Sementara itu hasil perkalian dari A dan B juga merupakan matriks fuzzy persegi. Selain itu operasi perkaliannya bersifat assosiatif pada M, yakni

$$(AB)C = \left[maks_{k=1}^{n}\left\{min\{a_{ik}, b_{kj}\}\right\}\right] . [c_{ij}] = [a_{it}].\{maks_{k=1}^{n}\left\{min\{b_{ik}, c_{kj}\}\right\}_{it}.$$
$$= A(BC).$$

Matriks $I = [a_{ij}]$ merupakan elemen identitas terhadap operasi perkalian di M dengan $a_{ij} = 1$ untuk setiap $i = j$ dan $a_{ij} = 0$ untuk setiap $i \neq j$. Berdasarkan uraian tersebut diperoleh bahwa M merupakan suatu monoid terhadap operasi perkalian.

Selanjutnya sifat distribusi operasi perkalian terhadap operasi penjumlahan juga berlaku pada M, dan elemen identitas penjumlahan pada M merupakan elemen penyerap terhadap operasi perkalian karena untuk setiap matriks *fuzzy* persegi $A = [a_{ij}]$ berlaku

$$A0 = [\, maks\,\{min\{a_{ik}\,, 0\}] = 0 \text{ dan } 0A = [\, maks\,\{min\{0\,, a_{kj}\}] = 0.$$

Menurut uraian tersebut diperoleh bahwa himpunan semua matriks *fuzzy* persegi merupakan suatu semi ring, yang selanjutnya dinamakan **semi ring matriks *fuzzy* persegi**.□

Misalkan $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ merupakan matriks *fuzzy*, maka A memiliki invers perkalian apabila A merupakan matriks *fuzzy* yang hanya memiliki tepat entri 1 pada setiap baris dan kolomnya, serta entri 0 pada baris dan kolom lainnya. Dengan demikian banyaknya matriks *fuzzy* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ yang memiliki invers adalah sebanyak $n!$ yang diperoleh dari semua kemungkinan posisi entri 1 dan 0 pada setiap baris dan kolom matriks *fuzzy* A. Misalkan untuk $n = 2$ maka matriks *fuzzy* yang memiliki invers adalah sebanyak $2! = 2$ yakni $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Untuk $n = 3$ maka matriks *fuzzy* yang memiliki invers ada sebanyak $3! = 6$ yakni $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Definisi 2. (Wang, 1984) *Matriks permutasi fuzzy adalah matriks fuzzy persegi yang setiap baris dan kolomnya hanya tepat berisi entri* 1 *dan lainnya* 0.

Teorema 2. (Wang, 1984) *Matriks fuzzy A memiliki invers jika dan hanya jika A merupakan matriks permutasi*
Bukti.
Misalkan A adalah matriks permutasi maka berlaku sifat $AA^T = A^TA = I$. Dengan demikian A memiliki invers yakni transpose A. Sebaliknya misalkan B adalah invers dari A, maka berlaku $AB = BA = I$. Andaikan A bukan matriks permutasi, maka terdapat beberapa kondisi yakni

Kondisi 1
Misalkan suatu baris pada A tidak hanya memiliki tepat sebuah entri 1 saja, tetapi memiliki sebuah entri lainnya yang tak nol. Tanpa mengurangi keumuman misalkan diambil baris pertama yakni $(1, a, 0, \dots, 0)$ dengan $a \in (0,1]$. Selanjutnya, karena $AB = I$, maka haruslah
Kolom ke-1 matriks B adalah $(1,0,*, \dots ,*)^T$
⋮
Kolom ke-n matriks B adalah $(0,0,*, \dots ,*)^T$

Dengan demikian matriks $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \cdots & * \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$ dan $BA = \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \cdots & * \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix} \neq I$.

Kondisi 2
Misalkan suatu baris pada A tidak memuat entri 1 maka untuk setiap B hasil perkalian dari $AB \neq I$ □

Teorema 3. *Himpunan semua matriks permutasi fuzzy A merupakan suatu semi lapangan.*

Bukti.
Bukti langsung diperoleh dari hasil Teorema 1 dan Teorema 2.□

3. Nilai Eigen Matriks Permutasi *Fuzzy*

Joe Anand dan Edal Anand (2015) menjelaskan bahwa apabila diketahui suatu matriks fuzzy A, vektor *fuzzy* X dan suatu skalar *fuzzy* α yang memenuhi persamaan $\alpha X = AX$. Dengan demikian $\alpha X = AX$ jika dan hanya jika $AX - \alpha IX = (A - \alpha I)X = 0$, dengan I adalah matriks identitas *fuzzy* berordo n. Sistem persamaan ini akan konsisten dan memiliki solusi yang non trivial jika $|A - \alpha I| = 0$. Persamaan ini selanjutnya dinamakan persamaan karakteristik dari matriks *fuzzy* A. Dengan menyelesaikan persamaan ini maka diperoleh n buah akar untuk α dan akar-akar tersebut dinamakan akar karakteristik atau nilai eigen dari matriks *fuzzy* A. Untuk setiap nilai α yang berkorespondensi maka persamaan $\alpha X = AX$ memiliki solusi vektor tak nol X. Misalkan X_t adalah vektor tak nol yang memenuhi persamaan $\alpha X = AX$, maka pada saat $\alpha = \alpha_t$ maka X_t dikatakan sebagai vektor eigen matriks *fuzzy* A yang berkorespondensi dengan α_t. Hasil penguraian dari $|A - \alpha I|$ akan menghasilkan suatu polinomial yang dinamakan polinomial karakteristik matriks *fuzzy A*.

Pada pembahasan ini hanya akan disajikan untuk matriks *fuzzy* permutasi berordo 2×2 dan 3×3. Misalkan diketahui matriks *fuzzy* permutasi $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ maka polinomial karakteristik dari matriks *fuzzy A* diperoleh dari $|A - \alpha I|$ yakni

$$\begin{aligned}
\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| &= \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha.1 & \alpha.0 \\ \alpha.0 & \alpha.1 \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \min(\alpha,1) & \min(\alpha,0) \\ \min(\alpha,0) & \min(\alpha,1) \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 1-\alpha & 0-0 \\ 0-0 & 1-\alpha \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}\right| \\
&= (1-\alpha)(1-\alpha) - 0.0 \\
&= min\big((1-\alpha),(1-\alpha)\big) - min(0,0) \\
&= min\big((1-\alpha),(1-\alpha)\big) - 0
\end{aligned}$$

Nilai akar karakteristik dari matriks A diperoleh dari persamaan yakni

$$\begin{aligned}
&|A - \alpha I| = 0 \\
&\Leftrightarrow min\big((1-\alpha),(1-\alpha)\big) - 0 = 0 \\
&\Leftrightarrow min\big((1-\alpha),(1-\alpha)\big) = 0
\end{aligned}$$

 p-ISSN:1412-6184, e-ISSN:2549-90
doi:10.24198/jmi.v12.n2.11926.99-106

Perhatikan bahwa $min\big((1-\alpha),(1-\alpha)\big) = (1-\alpha)$ maka diperoleh hasil $(1-\alpha) = 0$. Dari persamaan $(1-\alpha) = 0$ maka kemungkinan yang terjadi hanyalah $\alpha \geq 1$, sehingga haruslah $\alpha = 1$.
Vektor *fuzzy* X yang berkorespondensi dengan nilai eigen $\alpha = 1$ dan memenuhi persamaan $(A - \alpha I)X = 0$ yakni

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} - \alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\alpha.1 & \alpha.0\\\alpha.0 & \alpha.1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}min\,(\alpha,1) & min\,(\alpha,0)\\min\,(\alpha,0) & min\,(\alpha,1)\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}1-\alpha & 0-0\\0-0 & 1-\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}1-\alpha & 0\\0 & 1-\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}1-1 & 0\\0 & 1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0.x_1 + 0\,.x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad min\,(0,x_1) + min\,(0\,,x_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad maks(min(0,x_1)\,, min(0\,,x_2)) = 0$$

Nilai x_1 dan x_2 yang memenuhi adalah sembarang nilai pada interval $[0,1]$. Misal $x_1 = s$ dan $x_2 = t$ untuk sembarang $s,t \in [0,1]$ maka diperoleh vektor $X = \begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.
Dengan cara yang analog, untuk matriks *fuzzy* permutasi $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ maka polinomial karakteristik dari matriks *fuzzy* A diperoleh dari $|A - \alpha I|$ yakni polinomial 0. Karena polinomial karakteristik dari matriks selalu menghasilkan 0 maka untuk mencari nilai akar karakteristik dari matriks A yakni $|A - \alpha I| = 0$ langsung terpenuhi untuk setiap $\alpha \in [0,1]$. Dari sini diperoleh bahwa vektor *fuzzy* X yang berkorespondensi dengan nilai eigen α dan memenuhi persamaan $(A - \alpha I)X = 0$ yakni

$$\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} - \alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \; x_2 = 0\,, x_1 = 0.$$

Dengan demikian diperoleh vektor X yang terkait dengan sembarang nilai $\alpha \in [0,1]$ adalah vektor $X = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Dalam hal tidak ada vektor tak nol X yang memenuhi persamaan $(A - \alpha I)X = 0$, maka menyalahi pendefinisan vektor eigen sebagai vektor tak nol.
Untuk matriks fuzzy permutasi $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ maka polinomial karakteristik dari matriks fuzzy A diperoleh dari $|\,A - \alpha I\,|$ yakni

$$\left|\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} - \alpha\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\alpha.1 & \alpha.0 & \alpha.0\\\alpha.0 & \alpha.1 & \alpha.0\\\alpha.0 & \alpha.0 & \alpha.1\end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\0 & \alpha & 0\\0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\begin{pmatrix}1-\alpha & 0-0 & 0-0\\0-0 & 1-\alpha & 0-0\\0-0 & 0-0 & 1-\alpha\end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\begin{pmatrix}1-\alpha & 0 & 0\\0 & 1-\alpha & 0\\0 & 0 & 1-\alpha\end{pmatrix}\right|$$

$$= (1-\alpha)(1-\alpha)(1-\alpha) + 0.0.0 + 0.0.0 - 0(1-\alpha)0 - 0.0.(1-\alpha) - 0.0.0$$

$$= (1-\alpha) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = (1-\alpha)$$

Untuk mencari nilai akar karakteristik dari matriks A dengan memanfaatkan persamaan $|A - \alpha I| = 0 \Leftrightarrow (1-\alpha) = 0$. Dari persamaan $(1-\alpha) = 0$ maka kemungkinan yang terjadi adalah

$\alpha \geq 1$, sehingga haruslah $\alpha = 1$. Vektor *fuzzy* X yang berkorespondensi dengan nilai eigen $\alpha = 1$ dan memenuhi persamaan $(A - \alpha I)X = 0$ yakni

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 0.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad min\,(0, x_1) + min\,(0, x_2) + min\,(0, x_3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad maks(min(0, x_1)\,, min(0, x_2), min\,(0, x_3)) = 0$$

Nilai x_1, x_2 dan x_3 yang memenuhi adalah sembarang nilai pada interval [0,1]. Misalkan $x_1 = s$, $x_2 = t$ dan $x_3 = u$ untuk sembarang $s, t, u \in [0,1]$ maka diperoleh vektor

$$X = \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dengan cara yang serupa, untuk matriks *fuzzy* permutasi $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ maka polinomial karakteristik dari matriks *fuzzy* A diperoleh dari $|A - \alpha I|$ yakni polinomial 0 dan nilai akar karakteristik dari matriks A yakni $|A - \alpha I| = 0$ akan langsung terpenuhi untuk setiap $\alpha \in [0,1]$. Vektor *fuzzy* X yang berkorespondensi dengan sembarang nilai eigen α dan memenuhi persamaan $(A - \alpha I)X = 0$ yakni $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ jika hanya jika $x_2 = 0$, $x_1 = 0$ dan $(1 - \alpha).x_3 = 0$. Untuk $\alpha = 1$ hasil dari $(1 - \alpha).x_3 = 0$ adalah $x_3 = s$ untuk sembarang $s \in [0,1]$ dan diperoleh vektor $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Selain itu, untuk $\alpha \in [0,1)$ hasil dari $(1 - \alpha).x_3 = 0$ adalah $x_3 = 0$ sehingga diperoleh vektor $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dengan demikian tidak ada vektor tak nol X yang memenuhi persamaan $(A - \alpha I)X = 0$, dan hal ini menyalahi pendefinisan vektor eigen sebagai vektor tak nol.

Untuk matriks *fuzzy* permutasi $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ maka polinomial karakteristik dari matriks fuzzy A diperoleh dari $|A - \alpha I|$ yakni polinomial 1. Karena hasil dari $|A - \alpha I| = 1$ maka tidak pernah terdapat nilai α yang memenuhi persamaan $|A - \alpha I| = 0$ sehingga tidak ada nilai α yang memenuhi persamaan karakteristik dari matriks A. Untuk matriks fuzzy permutasi $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ maka polinomial karakteristik dari matriks fuzzy A diperoleh dari $|A - \alpha I|$ yakni polinomial 0 dan nilai akar karakteristik dari matriks A diperoleh dari persamaan $|A - \alpha I| = 0$ yakni setiap nilai $\alpha \in [0,1]$. Vektor fuzzy X yang berkorespondensi dengan sembarang nilai eigen α dan memenuhi persamaan $(A - \alpha I)X = 0$ yakni $\begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan diperoleh $(1 - \alpha).x_1 = 0$, $x_3 = 0$ dan $x_2 = 0$. Untuk $\alpha = 1$ hasil dari $(1 - \alpha).x_1 = 0$ adalah $x_1 = s$ untuk sembarang $s \in [0,1]$ sehingga diperoleh vektor $X = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Selanjutnya untuk $\alpha \in [0,1)$ hasil dari $(1 - \alpha).x_1 = 0$ adalah $x_1 = 0$ sehingga diperoleh vektor $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Jadi tidak ada vektor tak nol X yang memenuhi persamaan $(A - \alpha I)X = 0$ dan hal ini menyalahi pendefinisan vektor eigen sebagai vektor tak nol.

p-ISSN:1412-6184, e-ISSN:2549-90
doi:10.24198/jmi.v12.n2.11926.99-106

Untuk matriks *fuzzy* permutasi $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ maka polinomial karakteristik dari matriks *fuzzy* A diperoleh dari $|A - \alpha I|$ dan menghasilkan polinomial 1. Karena hasil dari $|A - \alpha I|$ selalu 1, maka selalu tidak pernah terdapat nilai α yang memenuhi persamaan $|A - \alpha I| = 0$. Dengan demikian nilai akar karakteristik dari matriks A tidak ada.

Untuk matriks *fuzzy* permutasi $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ maka polinomial karakteristik dari matriks fuzzy A diperoleh dari $|A - \alpha I|$ yakni polinomial 0. Selanjutnya untuk mencari nilai akar karakteristik matriks A diperoleh dari persamaan $|A - \alpha I| = 0$ dan akan terpenuhi untuk setiap $\alpha \in [0,1]$. Vektor *fuzzy* X yang berkorespondensi dengan sembarang nilai eigen α dan memenuhi $(A - \alpha I)X = 0$ jika dan hanya jika $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sehingga diperoleh $x_3 = 0$, $(1-\alpha).x_2 = 0$ dan $x_1 = 0$. Untuk $\alpha = 1$ hasil dari $(1-\alpha).x_2 = 0$ adalah $x_2 = s$ untuk sembarang $s \in [0,1]$ dan dengan demikian diperoleh vektor $X = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Untuk $\alpha \in [0,1)$ hasil dari $(1-\alpha).x_2 = 0$ adalah $x_2 = 0$, kemudian diperoleh vektor $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Hal ini menyalahi pendefinisan vektor eigen sebagai vektor tak nol.

5. Simpulan

Nilai eigen pada suatu matriks *fuzzy* permutasi dapat ditentukan dengan mengadopsi gagasan pada Joe Anand dan Edal Anand (2015) dan memodifikasi operasi pengurangan seperti pada Sidky dan Emam (1992). Pada matriks *fuzzy* permutasi berordo 2×2 dan 3×3 diperoleh kemungkinan nilai eigen adalah 1 atau sembarang nilai pada interval [0,1]. Untuk matriks yang nilai eigennya adalah sembarang nilai pada interval [0,1], maka vektor yang berkorespondensi dengan nilai pada interval [0,1) hanyalah berupa vektor nol sehingga menyalahi pendefinisian vektor eigen sebagai vektor tak nol.

Daftar Pustaka

1. Chiao, K.P. (1998). Generalized Fuzzy Eigen Value Problem. *Tamsui Oxford Journal of Mathematical Science, 14(1998) pp. 31-37*

2. Chongxin, Y. dan Xiang, T. (1984). *Fuzzy Singular Matrix.* Dept of Basis Qiqihar College of Light Industry, Qiqihar, China

3. Chongxin, Y. Jie, Y., Mai, L. dan Chengde, Y. (1984). *The Research of Special Fuzzy Matrices*. Qiqihar Light-Chemical Engineering Institute, Qiqihar, China

4. Joe Anand, C.M dan Edal Anand, M. (2015). Eigen Values and Eigen Vectors for Fuzzy Matrices. *IJERGS. Vol. 3 Issue 1 January 2015*. pp. 878-890

5. Kandasamy, V.B.W., Smarandache, F. dan Ilanthenral, K. (2007). *Elementary Fuzzy Matrix Theory and Fuzzy Models for Social Scientists.*

6. Mordeson, J.N dan Nair, P.S, (2001). *Fuzzy Mathematics* : *An Introduction for Engineers and Scientists*. New York : Physica-Verlag

7. Pal, M. (2016). *Fuzzy Matrix and Its Application*. Department of Applied Mathematics with Oceanology and Computer Programming, Vidyasagar University, India

8. Salahshour, S., Lopez, R.R., Karimi, F. dan Kumar, A. (2012). Computing the Eigen Values and Eigen Vectors of Fuzzy Matrix, *Journal of Fuzzy Set Valued Analysis. doi:10.5899/2012/jfsva-00120*

9. Sidky, F.I dan Emam, E.G. (1992). Some Remarks on Sections of a Fuzzy Matrix. *J.K.A.U. Sci. Vol 4. pp* 144-155. 1992

10. Theodoru, Y. dan Alevizos, P. (2006). The Eigen Value Fuzzy Problem of Fuzzy Correspondence Analysis. *Journal of Interdisciplinary Mathematics 9 (2006) No 1, pp. 115-137*

11. Triantaphyllou, E. dan Mann, S.H. (1990). An Evaluation of the Eigen Value Approach for Determining the Membership Values in Fuzzy Sets, *Fuzzy Sets and Systems, 35 (1990) pp. 295-301*

12. Wang, H. 1984. *The Fuzzy Non Singular Matrices*. Dept of Basis Liaoyang of Petrochemistry China