Jurnal Matematika Integratif. p-ISSN:1412-6184, e-ISSN:2549-903
Vol. 17, No. 2 (2021), pp. 109–118. doi:10.24198/jmi.v17.n2.34441.109-118

Matriks *Circulant* Kompleks Bentuk Khusus 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat

Dewinta Mamula, Novianita Achmad, Resmawan*

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Gorontalo
***Penulis Koresponden: resmawan@ung.ac.id**

Abstrak

Artikel ini mengidentifikasi bentuk umum perpangkatan matriks dan trace matriks *Circulant* Kompleks Bentuk Khusus 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat. Langkah penelitian dimulai dengan menentukan bentuk umum matriks *circulant* kompleks bentuk khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat, dilanjutkan dengan menentukan bentuk umum trace matriks *Circulant* Kompleks Bentuk Khusus 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat. Pembuktian dilakukan dengan menggunakan induksi matematika. Hasil akhir dari artikel ini diperoleh bentuk umum matriks A^n dan $tr(A^n)$ untuk n bilangan bulat pada matriks *Circulant* kompleks bentuk khusus 3×3.

Kata Kunci: pangkat matriks, trace matriks, matriks circulant, bilangan kompleks, induksi matematika

Abstract

This article identifies the general form of matrix power and trace of a integer power of Special Form of the 3×3 Complex Circulant matrix. The research begins to determine the general form of a integer power of Special Form of the 3×3 Complex Circulant matrix, followed by determining the general form trace of a integer power of Special Form of the 3×3 Complex Circulant matrix. The proof is done by using mathematical induction. The final result of this article is to obtain the general form of the matrix A^n and $tr(A^n)$ for n integers in special form of the 3×3 complex Circulant matrix

Keywords: matrix power, trace of matrix, *Circulant* matrix, complex number, mathematical induction

2000 Mathematics Subject Classification: 15B05
Received: 07-07-2021, Revised: 25-11-2021, Accepted: 28-12-2021.

1. Pendahuluan

Salah satu kajian dasar dalam mempelajari ilmu matematika mengenai aljabar adalah matriks. Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan, yang kemudian bilangan tersebut dinamakan entri atau elemen dari matriks. Banyak hal yang dapat dihitung dari suatu matriks, seperti perkalian matriks, penjumlahan, determinan, invers, trace matriks dan sebagainya [1].

Dalam aljabar linear dipelajari tentang berbagai macam matriks, salah satu matriks yang bentuknya sangat unik adalah matriks *circulant*. Matriks *circulant* adalah matriks berordo $n \times n$ yang dibentuk dari n vektor dan hanya memiliki satu input pada baris pertama. Setiap entri dari baris sebelumnya bergeser satu posisi ke kanan yang menghasilkan baris berikutnya dan entri sepanjang diagonal matriksnya adalah sama. Matriks *circulant* pada umumnya digunakan untuk menyelesaikan persamaan polinomial. Untuk setiap $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \in \mathbb{C}$, Matriks *circulant* $Z_{n\times n}$ yang dinotasikan dengan $Circ(z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$ dapat dituliskan sebagai berikut [8].

$$Z_{n\times n} = \begin{bmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & \cdots & z_{n-3} & z_{n-2} & z_{n-1} \\ z_{n-1} & z_0 & z_1 & \cdots & z_{n-4} & z_{n-3} & z_{n-2} \\ z_{n-2} & z_{n-1} & z_0 & \cdots & z_{n-5} & z_{n-4} & z_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ z_3 & z_4 & z_5 & \cdots & z_0 & z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 & z_4 & \cdots & z_{n-1} & z_0 & z_1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_{n-2} & z_{n-1} & z_0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Matriks *circulant* sering dibahas dalam beberapa bidang keilmuan. Pada tahun 2018, matriks *circulant* digunakan untuk merekonstruksi atau mentransformasi suatu gambar, dimana proses transformasi ini secara signifikan mengurangi waktu komputasi dibandingkan menggunakan cara umum dalam merekonstruksi gambar [5]. Selanjutnya dalam bidang pemrosesan Sinyal (*Compressed Sensing*), matriks *circulant* digunakan untuk merekonstruksi sinyal secara efisien [7]. Selanjutnya DeVille, L. and Nijholt, E. [6] menemukan formula nilai eigen dalam penyelesaian masalah peta jaringan (*Network Mapping*). Pada bidang matematika aljabar, ditemukan teknik khusus dalam menentukan grup invers dari matriks *circulant* dan beberapa kelas matriks *circulant* [4]. Matriks *circulant* juga pernah dibahas oleh Aryani, F. et al [2] yang menemukan formula tertutup (*Closed Formula*) untuk trace matriks toeplitz kompleks bentuk khusus 3×3 berpangkat-n bilangan bulat positif. Dengan pembahasan yang sama, ditemukan formula dari trace matriks kompleks 2×2 berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif [3]. Kemudian Olii, I. et al [9] menemukan formula trace matriks toeplitz 2-tridiagonal 3×3 berpangkat bilangan bulat positif. Terakhir, ditemukan bentuk umum dari trace matriks real 3×3 berpangkat bilangan bulat positif dan negatif [10].

Pada artikel ini dibahas bentuk umum matriks *circulant* kompleks 3×3 berpangkat-n, untuk n bilangan bulat positif dan bilangan bulat negatif, dilanjutkan dengan penentuan bentuk umum dari trace matriks *circulant* kompleks 3×3 berpangkat-n, untuk n bilangan bulat positif dan bilangan bulat negatif.

2. Metode Penelitian

Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah studi literatur dengan menggunakan sumber dari buku, jurnal ilmiah, artikel dan referensi lainnya yang berkaitan. Adapun langkah-langkah yang digunakan adalah sebagai berikut:

(1) Diberikan Matriks *Circulant* Kompleks bentuk khusus berukuran 3×3 Sebagai Berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & z & z \\ z & 0 & z \\ z & z & 0 \end{bmatrix}, \text{dengan } \ z = a + ib \ \ \forall a, b \in \mathbb{R}, \ \text{ dan } \ i = \sqrt{-1}. \tag{2}$$

(2) Menentukan A^2 sampai A^k, dengan $k > 2$ dimana k adalah batas pangkat jika pola perpangkatan matriks sudah terlihat.
(3) Menentukan A^{-2} sampai A^{-k}, dengan $k > 2$.
(4) Menentukan bentuk umum perpangkatan matriks (A^n), untuk n bilangan bulat dengan mengamati pola rekursifnya.
(5) Menentukan bentuk umum $tr(A^n)$, untuk n bilangan bulat dengan mengamati pola rekursifnya.
(6) Membuktikan bentuk umum perpangkatan matriks (A^n), untuk n bilangan bulat dengan metode induksi matematika.
(7) Membuktikan bentuk umum dari $tr(A^n)$, untuk n bilangan bulat dengan metode pembuktian langsung

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Matriks Berpangkat Bilangan Bulat.

Pada bagian ini dibahas mengenai bentuk umum dari matriks *circulant* kompleks bentuk khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat seperti pada Persamaan (2). Menentukan A^2 sampai A^k, dengan $k > 2$ dimana k adalah batas pangkat jika pola perpangkatan matriks sudah terlihat.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2z^2 & z^2 & z^2 \\ z^2 & 2z^2 & z^2 \\ z^2 & z^2 & 2z^2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 2z^3 & 3z^3 & 3z^3 \\ 3z^3 & 2z^3 & 3z^3 \\ 3z^3 & 3z^3 & 2z^3 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 6z^4 & 5z^4 & 5z^4 \\ 5z^4 & 6z^4 & 5z^4 \\ 5z^4 & 5z^4 & 6z^4 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} 10z^5 & 11z^5 & 11z^5 \\ 11z^5 & 10z^5 & 11z^5 \\ 11z^5 & 11z^5 & 10z^5 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$A^6 = \begin{bmatrix} 22z^6 & 21z^6 & 21z^6 \\ 21z^6 & 22z^6 & 21z^6 \\ 21z^6 & 21z^6 & 22z^6 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$A^7 = \begin{bmatrix} 42z^7 & 43z^7 & 43z^7 \\ 43z^7 & 42z^7 & 43z^7 \\ 43z^7 & 43z^7 & 42z^7 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$A^8 = \begin{bmatrix} 86z^8 & 85z^8 & 85z^8 \\ 85z^8 & 86z^8 & 85z^8 \\ 85z^8 & 85z^8 & 86z^8 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$A^9 = \begin{bmatrix} 170z^9 & 171z^9 & 171z^9 \\ 171z^9 & 170z^9 & 171z^9 \\ 171z^9 & 171z^9 & 170z^9 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 342z^{10} & 341z^{10} & 341z^{10} \\ 341z^{10} & 342z^{10} & 341z^{10} \\ 341z^{10} & 341z^{10} & 342z^{10} \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$A^{11} = \begin{bmatrix} 682z^{11} & 683z^{11} & 683z^{11} \\ 683z^{11} & 682z^{11} & 683z^{11} \\ 683z^{11} & 683z^{11} & 682z^{11} \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$A^{12} = \begin{bmatrix} 1366z^{12} & 1365z^{12} & 1365z^{12} \\ 1365z^{12} & 1366z^{12} & 1365z^{12} \\ 1365z^{12} & 1365z^{12} & 1366z^{12} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Selanjutnya untuk menentukan matriks berpangkat bilangan bulat negatif kita perlu mencari invers dari matriks A terlebih dahulu. Invers matriks A dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{det(A)} Adj(A) \\ &= \frac{1}{2z^3} \begin{bmatrix} -z^2 & z^2 & z^2 \\ z^2 & -z^2 & z^2 \\ z^2 & z^2 & -z^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2z} & \frac{1}{2z} & \frac{1}{2z} \\ \frac{1}{2z} & -\frac{1}{2z} & \frac{1}{2z} \\ \frac{1}{2z} & \frac{1}{2z} & -\frac{1}{2z} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

Maka,

$$A^{-2} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4z^2} & \frac{-1}{4z^2} & \frac{-1}{4z^2} \\ \frac{-1}{4z^2} & \frac{3}{4z^2} & \frac{-1}{4z^2} \\ \frac{-1}{4z^2} & \frac{-1}{4z^2} & \frac{3}{4z^2} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$A^{-3} = \begin{bmatrix} \frac{-5}{8z^3} & \frac{3}{8z^3} & \frac{3}{8z^3} \\ \frac{3}{8z^3} & \frac{-5}{8z^3} & \frac{3}{8z^3} \\ \frac{3}{8z^3} & \frac{3}{8z^3} & \frac{-5}{8z^3} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$A^{-4} = \begin{bmatrix} \frac{11}{16z^4} & \frac{-5}{16z^4} & \frac{-5}{16z^4} \\ \frac{-5}{16z^4} & \frac{11}{16z^4} & \frac{-5}{16z^4} \\ \frac{-5}{16z^4} & \frac{-5}{16z^4} & \frac{11}{16z^4} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$A^{-5} = \begin{bmatrix} \frac{-21}{32z^5} & \frac{11}{32z^5} & \frac{11}{32z^5} \\ \frac{11}{32z^5} & \frac{-21}{32z^5} & \frac{11}{32z^5} \\ \frac{11}{32z^5} & \frac{11}{32z^5} & \frac{-21}{32z^5} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$A^{-6} = \begin{bmatrix} \frac{43}{64z^6} & \frac{-21}{64z^6} & \frac{-21}{64z^6} \\ \frac{-21}{64z^6} & \frac{43}{64z^6} & \frac{-21}{64z^6} \\ \frac{-21}{64z^6} & \frac{-21}{64z^6} & \frac{43}{64z^6} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$A^{-7} = \begin{bmatrix} \frac{-85}{128z^7} & \frac{43}{128z^7} & \frac{43}{128z^7} \\ \frac{43}{128z^7} & \frac{-85}{128z^7} & \frac{43}{128z^7} \\ \frac{43}{128z^7} & \frac{43}{128z^7} & \frac{-85}{128z^7} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$A^{-8} = \begin{bmatrix} \frac{171}{256z^8} & \frac{-85}{256z^8} & \frac{-85}{256z^8} \\ \frac{-85}{256z^8} & \frac{171}{256z^8} & \frac{-85}{256z^8} \\ \frac{-85}{256z^8} & \frac{-85}{256z^8} & \frac{171}{256z^8} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$A^{-9} = \begin{bmatrix} \frac{-341}{512z^9} & \frac{171}{512z^9} & \frac{171}{512z^9} \\ \frac{171}{512z^9} & \frac{-341}{512z^9} & \frac{171}{512z^9} \\ \frac{171}{512z^9} & \frac{171}{512z^9} & \frac{-341}{512z^9} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$A^{-10} = \begin{bmatrix} \frac{683}{1024z^{10}} & \frac{-341}{1024z^{10}} & \frac{-341}{1024z^{10}} \\ \frac{-341}{1024z^{10}} & \frac{683}{1024z^{10}} & \frac{-341}{1024z^{10}} \\ \frac{-341}{1024z^{10}} & \frac{-341}{1024z^{10}} & \frac{683}{1024z^{10}} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$A^{-11} = \begin{bmatrix} \frac{-1365}{2048z^{11}} & \frac{683}{2048z^{11}} & \frac{683}{2048z^{11}} \\ \frac{-683}{2048z^{11}} & \frac{-1365}{2048z^{11}} & \frac{683}{2048z^{11}} \\ \frac{683}{2048z^{11}} & \frac{683}{2048z^{11}} & \frac{-1365}{2048z^{11}} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$A^{-12} = \begin{bmatrix} \frac{2731}{4096z^{12}} & \frac{-1365}{4096z^{12}} & \frac{-1365}{4096z^{12}} \\ \frac{-1365}{4096z^{12}} & \frac{2731}{4096z^{12}} & \frac{-1365}{4096z^{12}} \\ \frac{-1365}{4096z^{12}} & \frac{-1365}{4096z^{12}} & \frac{2731}{4096z^{12}} \end{bmatrix} \tag{25}$$

Dengan melihat pola pada koefisien yang terbentuk dari elemen-elemen matriks pada Persamaan (3) sampai Persamaan (25), maka diperoleh bentuk umum perpangkatan matriks yang dinyatakan dalam Teorema 1.

Theorem 1. *Diberikan matriks circulant kompleks bentuk khusus* 3×3 *dengan bentuk*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & z & z \\ z & 0 & z \\ z & z & 0 \end{bmatrix} \text{ dengan } z = a + ib \ \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \text{dan } i = \sqrt{-1}$$

maka,

$$A^n = \begin{bmatrix} [\frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [(-1)^{n-1} + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [(-1)^{n-1} + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n \\ [(-1)^{n-1} + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [\frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [(-1)^{n-1} + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n \\ [(-1)^{n-1} + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [(-1)^{n-1} + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [\frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n \end{bmatrix}$$

Bukti. Diberikan

$$p(n) : A^n = \begin{bmatrix} [\frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [(-1)^{n-1} + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [(-1)^{n-1} + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n \\ [(-1)^{n-1} + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [\frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [(-1)^{n-1} + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n \\ [(-1)^{n-1} + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [(-1)^{n-1} + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [\frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n \end{bmatrix}$$

untuk n bilangan bulat,

(1) Akan ditunjukan $p(1)$ benar.

$$p(1) : A = \begin{bmatrix} [\frac{2^1+2(-1)^1}{3}]z^1 & [(-1)^{1-1} + \frac{2^1+2(-1)^1}{3}]z^1 & [(-1)^{1-1} + \frac{2^1+2(-1)^1}{3}]z^1 \\ [(-1)^{1-1} + \frac{2^1+2(-1)^1}{3}]z^1 & [\frac{2^1+2(-1)^1}{3}]z^1 & [(-1)^{1-1} + \frac{2^1+2(-1)^1}{3}]z^1 \\ [(-1)^{1-1} + \frac{2^1+2(-1)^1}{3}]z^1 & [(-1)^{1-1} + \frac{2^1+2(-1)^1}{3}]z^1 & [\frac{2^1+2(-1)^1}{3}]z^1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [\frac{2-2}{3}]z & [1 + \frac{2-2}{3}]z & [1 + \frac{2-2}{3}]z \\ [1 + \frac{2-2}{3}]z & [\frac{2-2}{3}]z & [1 + \frac{2-2}{3}]z \\ [1 + \frac{2-2}{3}]z & [1 + \frac{2-2}{3}]z & [\frac{2-2}{3}]z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & z & z \\ z & 0 & z \\ z & z & 0 \end{bmatrix}$$

dengan memperhatikan Persamaan (2) maka $p(1)$ benar.

(2) Asumsikan $p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k) : A^k = \begin{bmatrix} [\frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^k & [(-1)^{k-1} + \frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^k & [(-1)^{k-1} + \frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^k \\ [(-1)^{k-1} + \frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^k & [\frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^k & [(-1)^{k-1} + \frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^k \\ [(-1)^{k-1} + \frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^k & [(-1)^{k-1} + \frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^k & [\frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^k \end{bmatrix}$$

untuk k bilangan bulat.

(3) Akan dibuktikan $p(k+1)$ juga benar yaitu:

$p(k+1) : A^{k+1}$

$$= \begin{bmatrix} [\frac{2^{k+1}+2(-1)^{k+1}}{3}]z^{k+1} & [(-1)^k + \frac{2^{k+1}+2(-1)^{k+1}}{3}]z^{k+1} & [(-1)^k + \frac{2^{k+1}+2(-1)^{k+1}}{3}]z^{k+1} \\ [(-1)^k + \frac{2^{k+1}+2(-1)^{k+1}}{3}]z^{k+1} & [\frac{2^{k+1}+2(-1)^{k+1}}{3}]z^{k+1} & [(-1)^k + \frac{2^{k+1}+2(-1)^{k+1}}{3}]z^{k+1} \\ [(-1)^k + \frac{2^{k+1}+2(-1)^{k+1}}{3}]z^{k+1} & [(-1)^k + \frac{2^{k+1}+2(-1)^{k+1}}{3}]z^{k+1} & [\frac{2^{k+1}+2(-1)^{k+1}}{3}]z^{k+1} \end{bmatrix} \tag{26}$$

Pembuktiannya sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
A^{k+1} &= A^k \cdot A \\
&= \begin{bmatrix} [\frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^k & [(-1)^{k-1}+\frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^k & [(-1)^{k-1}+\frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^k \\ [(-1)^{k-1}+\frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^k & [\frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^k & [(-1)^{k-1}+\frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^k \\ [(-1)^{k-1}+\frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^k & [(-1)^{k-1}+\frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^k & [\frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & z & z \\ z & 0 & z \\ z & z & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \begin{array}{c} [(-1)^{k-1}+\frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^{k+1} \\ +[(-1)^{k-1}+\frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^{k+1} \end{array} & \begin{array}{c} [\frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^{k+1} \\ +[(-1)^{k-1}+\frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^{k+1} \end{array} & \begin{array}{c} [\frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^{k+1} \\ +[(-1)^{k-1}+\frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^{k+1} \end{array} \\ \begin{array}{c} [\frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^{k+1} \\ +[(-1)^{k-1}+\frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^{k+1} \end{array} & \begin{array}{c} [(-1)^{k-1}+\frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^{k+1} \\ +[(-1)^{k-1}+\frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^{k+1} \end{array} & \begin{array}{c} [\frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^{k+1} \\ +[(-1)^{k-1}+\frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^{k+1} \end{array} \\ \begin{array}{c} [\frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^{k+1} \\ +[(-1)^{k-1}+\frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^{k+1} \end{array} & \begin{array}{c} [\frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^{k+1} \\ +[(-1)^{k-1}+\frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^{k+1} \end{array} & \begin{array}{c} [(-1)^{k-1}+\frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^{k+1} \\ +[(-1)^{k-1}+\frac{2^k+2(-1)^k}{3}]z^{k+1} \end{array} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} [2(-1)^{k-1}+\frac{2^{k+1}+2^2(-1)^k}{3}]z^{k+1} & [(-1)^{k-1}+2(\frac{2^k+2(-1)^k}{3})]z^{k+1} & [(-1)^{k-1}+2(\frac{2^k+2(-1)^k}{3})]z^{k+1} \\ [(-1)^{k-1}+2(\frac{2^k+2(-1)^k}{3})]z^{k+1} & [2(-1)^{k-1}+\frac{2^{k+1}+2^2(-1)^k}{3}]z^{k+1} & [(-1)^{k-1}+2(\frac{2^k+2(-1)^k}{3})]z^{k+1} \\ [(-1)^{k-1}+2(\frac{2^k+2(-1)^k}{3})]z^{k+1} & [2(-1)^{k-1}+\frac{2^{k+1}+2^2(-1)^k}{3}]z^{k+1} & [2(-1)^{k-1}+\frac{2^{k+1}+2^2(-1)^k}{3}]z^{k+1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} [\frac{2^{k+1}+2(-1)^k(-1)}{3}]z^{k+1} & [\frac{2^{k+1}+[3(-1)^{-1}+2^2](-1)^k}{3}]z^{k+1} & [\frac{2^{k+1}+[3(-1)^{-1}+2^2](-1)^k}{3}]z^{k+1} \\ [\frac{2^{k+1}+[3(-1)^{-1}+2^2](-1)^k}{3}]z^{k+1} & [\frac{2^{k+1}+2(-1)^k(-1)}{3}]z^{k+1} & [\frac{2^{k+1}+[3(-1)^{-1}+2^2](-1)^k}{3}]z^{k+1} \\ [\frac{2^{k+1}+[3(-1)^{-1}+2^2](-1)^k}{3}]z^{k+1} & [\frac{2^{k+1}+[3(-1)^{-1}+2^2](-1)^k}{3}]z^{k+1} & [\frac{2^{k+1}+2(-1)^k(-1)}{3}]z^{k+1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} [\frac{2^{k+1}+2(-1)^{k+1}}{3}]z^{k+1} & [\frac{2^{k+1}-2(-1)^k+3(-1)^k}{3}]z^{k+1} & [\frac{2^{k+1}-2(-1)^k+3(-1)^k}{3}]z^{k+1} \\ [\frac{2^{k+1}-2(-1)^k+3(-1)^k}{3}]z^{k+1} & [\frac{2^{k+1}+2(-1)^{k+1}}{3}]z^{k+1} & [\frac{2^{k+1}-2(-1)^k+3(-1)^k}{3}]z^{k+1} \\ [\frac{2^{k+1}-2(-1)^k+3(-1)^k}{3}]z^{k+1} & [\frac{2^{k+1}-2(-1)^k+3(-1)^k}{3}]z^{k+1} & [\frac{2^{k+1}+2(-1)^{k+1}}{3}]z^{k+1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} [\frac{2^{k+1}+2(-1)^{k+1}}{3}]z^{k+1} & [(-1)^k+\frac{2^{k+1}+2(-1)^{k+1}}{3}]z^{k+1} & (-1)^k+\frac{2^{k+1}+2(-1)^{k+1}}{3}]z^{k+1} \\ (-1)^k+\frac{2^{k+1}+2(-1)^{k+1}}{3}]z^{k+1} & [\frac{2^{k+1}+2(-1)^{k+1}}{3}]z^{k+1} & (-1)^k+\frac{2^{k+1}+2(-1)^{k+1}}{3}]z^{k+1} \\ (-1)^k+\frac{2^{k+1}+2(-1)^{k+1}}{3}]z^{k+1} & (-1)^k+\frac{2^{k+1}+2(-1)^{k+1}}{3}]z^{k+1} & [\frac{2^{k+1}+2(-1)^{k+1}}{3}]z^{k+1} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Dengan melihat persamaan (26) maka $p(k+1)$ benar, dan karena langkah (1), (2) dan (3) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti untuk n bilangan bulat. □

3.2. **Trace Matriks *Circulant* Kompleks Bentuk Khusus 3 3 Berpangkat Bilangan Bulat.**

Berdasarkan Teorema 1 maka diperoleh trace matriks *circulant* kompleks bentuk khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat, yang dinyatakan dalam Teorema 2.

Theorem 2. *Diberikan matriks circulant kompleks bentuk khusus* 3×3 *dengan bentuk:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & z & z \\ z & 0 & z \\ z & z & 0 \end{bmatrix} \text{ dengan } z = a + ib \ \ \forall a, b \in \mathbb{R}, \ \ \text{dan } \ i = \sqrt{-1}$$

maka,

$$tr(A^n) = (2^n + 2(-1)^n)z^n$$

BUKTI. Berdasarkan Teorema 1 maka bentuk umum $tr(A^n)$ untuk n bilangan bulat yaitu:

$$tr(A^n) = ([\frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n + [\frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n + [\frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n$$
$$= 3[\frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n$$
$$= (2^n+2(-1)^n)z^n$$

Berdasarkan pembuktian langsung seperti yang telah dituliskan diatas, maka Teorema 2 terbukti. □

3.3. **Contoh Penerapan Matriks Berpangkat dan Trace Matriks *Circulant* Kompleks Berpangkat Bilangan Bulat.**

Pada bagian ini, diberikan beberapa contoh yang berhubungan dengan Teorema 1 dan Teorema 2.

Contoh 3.1. *Diberikan matriks* 3×3 *sebagai berikut :*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2+i3 & 2+i3 \\ 2+i3 & 0 & 2+i3 \\ 2+i3 & 2+i3 & 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan matriks A^6 *menggunakan Teorema 1.*

Penyelesaian :

Menurut Teorema 1

$$A^n = \begin{bmatrix} [\frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [(-1)^{n-1}+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [(-1)^{n-1}+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n \\ [(-1)^{n-1}+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [\frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [(-1)^{n-1}+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n \\ [(-1)^{n-1}+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [(-1)^{n-1}+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [\frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n \end{bmatrix}$$

Untuk n bilangan bulat, diperoleh:,

$$A^6 = \begin{bmatrix} [\frac{2^6+2(-1)^6}{3}](2+i3)^6 & [(-1)^{6-1}+\frac{2^6+2(-1)^6}{3}](2+i3)^6 & [(-1)^{6-1}+\frac{2^6+2(-1)^6}{3}](2+i3)^6 \\ [(-1)^{6-1}+\frac{2^6+2(-1)^6}{3}](2+i3)^6 & [\frac{2^6+2(-1)^6}{3}](2+i3)^6 & [(-1)^{6-1}+\frac{2^6+2(-1)^6}{3}](2+i3)^6 \\ [(-1)^{6-1}+\frac{2^6+2(-1)^6}{3}](2+i3)^6 & [(-1)^{6-1}+\frac{2^6+2(-1)^6}{3}](2+i3)^6 & [\frac{2^6+2(-1)^6}{3}](2+i3)^6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [\frac{2^6+2}{3}](2+i3)^6 & [-1+\frac{2^6+2}{3}](2+i3)^6 & [-1+\frac{2^6+2}{3}](2+i3)^6 \\ [-1+\frac{2^6+2}{3}](2+i3)^6 & [\frac{2^6+2}{3}](2+i3)^6 & [-1+\frac{2^6+2}{3}](2+i3)^6 \\ [-1+\frac{2^6+2}{3}](2+i3)^6 & [-1+\frac{2^6+2}{3}](2+i3)^6 & [\frac{2^6+2}{3}](2+i3)^6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22(2+i3)^6 & 21(2+i3)^6 & 21(2+i3)^6 \\ 21(2+i3)^6 & 22(2+i3)^6 & 21(2+i3)^6 \\ 21(2+i3)^6 & 21(2+i3)^6 & 22(2+i3)^6 \end{bmatrix}$$

Untuk menyelesaikan bentuk $(2+i3)^6$ maka digunakan aturan perpangkatan bilangan kompleks, yaitu:

$$z^n = r^n(cos(n\theta) + i \cdot sin(n\theta))$$

Selanjutnya akan dicari nilai dari r dan θ, yaitu:

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} = 3,6055$

$\theta = arc\ tan(\frac{y}{x}) = arc\ tan(\frac{3}{2}) = 56,309932474$

sehingga:

$(2+i3)^6 = (3,6055)^6[cos(6 \cdot 56,309932474) + i \cdot sin(6 \cdot 56,309932474)]$

$= (3,6055)^6 cos(337,859594844) + i(3,6055)^6 sin(337,859594844)$ Jadi didapat matriks

$= 2034,8264 - i827,9293$

A^6 yaitu:

$$A^6 = \begin{bmatrix} 22(2034,8264-i827,9293) & 21(2034,8264-i827,9293) & 21(2034,8264-i827,9293) \\ 21(2034,8264-i827,9293) & 22(2034,8264-i827,9293) & 21(2034,8264-i827,9293) \\ 21(2034,8264-i827,9293) & 21(2034,8264-i827,9293) & 22(2034,8264-i827,9293) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 44766,1808-i18214,4457 & 42731,3544-i17386,5164 & 42731,3544-i17386,5164 \\ 42731,3544-i17386,5164 & 44766,1808-i18214,4457) & 42731,3544-i17386,5164 \\ 42731,3544-i17386,5164 & 42731,3544-i17386,5164 & 44766,1808-i18214,4457 \end{bmatrix}$$

Contoh 3.2. *Diberikan matriks* 3×3 *sebagai berikut :*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4-i\frac{2}{3} & 4-i\frac{2}{3} \\ 4-i\frac{2}{3} & 0 & 4-i\frac{2}{3} \\ 4-i\frac{2}{3} & 4-i\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan matriks A^{-7} *menggunakan Teorema 1.*

Penyelesaian :

Menurut Teorema 1

$$A^n = \begin{bmatrix} [\frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [(-1)^{n-1}+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [(-1)^{n-1}+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n \\ [(-1)^{n-1}+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [\frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [(-1)^{n-1}+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n \\ [(-1)^{n-1}+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [(-1)^{n-1}+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [\frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n \end{bmatrix}$$

Untuk n bilangan bulat, diperoleh:,

$$A^{-7} = \begin{bmatrix} [\frac{2^{-7}+2(-1)^{-7}}{3}](4-i\frac{2}{3})^{-7} & [(-1)^{-7-1}+\frac{2^{-7}+2(-1)^{-7}}{3}](4-i\frac{2}{3})^{-7} & [(-1)^{-7-1}+\frac{2^{-7}+2(-1)^{-7}}{3}](4-i\frac{2}{3})^{-7} \\ [(-1)^{-7-1}+\frac{2^{-7}+2(-1)^{-7}}{3}](4-i\frac{2}{3})^{-7} & [\frac{2^{-7}+2(-1)^{-7}}{3}](4-i\frac{2}{3})^{-7} & [(-1)^{-7-1}+\frac{2^{-7}+2(-1)^{-7}}{3}](4-i\frac{2}{3})^{-7} \\ [(-1)^{-7-1}+\frac{2^{-7}+2(-1)^{-7}}{3}](4-i\frac{2}{3})^{-7} & [(-1)^{-7-1}+\frac{2^{-7}+2(-1)^{-7}}{3}](4-i\frac{2}{3})^{-7} & [\frac{2^{-7}+2(-1)^{-7}}{3}](4-i\frac{2}{3})^{-7} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [\frac{2^{-7}-2}{3}](4-i\frac{2}{3})^{-7} & [1+\frac{2^{-7}-2}{3}](4-i\frac{2}{3})^{-7} & [1+\frac{2^{-7}-2}{3}](4-i\frac{2}{3})^{-7} \\ [1+\frac{2^{-7}-2}{3}](4-i\frac{2}{3})^{-7} & [\frac{2^{-7}-2}{3}](4-i\frac{2}{3})^{-7} & [1+\frac{2^{-7}-2}{3}](4-i\frac{2}{3})^{-7} \\ [1+\frac{2^{-7}-2}{3}](4-i\frac{2}{3})^{-7} & [1+\frac{2^{-7}-2}{3}](4-i\frac{2}{3})^{-7} & [\frac{2^{-7}-2}{3}](4-i\frac{2}{3})^{-7} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-85}{128}(4-i\frac{2}{3})^{-7} & \frac{43}{128}(4-i\frac{2}{3})^{-7} & \frac{43}{128}(4-i\frac{2}{3})^{-7} \\ \frac{43}{128}(4-i\frac{2}{3})^{-7} & \frac{-85}{128}(4-i\frac{2}{3})^{-7} & \frac{43}{128}(4-i\frac{2}{3})^{-7} \\ \frac{43}{128}(4-i\frac{2}{3})^{-7} & \frac{43}{128}(4-i\frac{2}{3})^{-7} & \frac{-85}{128}(4-i\frac{2}{3})^{-7} \end{bmatrix}$$

Untuk menyelesaikan bentuk $(4-i\frac{2}{3})^{-7}$ maka digunakan aturan perpangkatan bilangan kompleks, yaitu:

$$z^n = r^n(cos(n\theta) + i \cdot sin(n\theta))$$

Selanjutnya akan dicari nilai dari r dan θ, yaitu:

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{4^2+(-\frac{2}{3})^2} = 4,272002$

$\theta = arc\,tan(\frac{y}{x}) = arc\,tan(\frac{-3/2}{4}) = -20,5560452196$

sehingga:

$$\begin{aligned}(4-i\frac{2}{3})^{-7} &= (4,272002)^{-7}[cos[(-7)\cdot(-20,5560452196)] + i \cdot sin[(-7)\cdot(-20,5560452196)]] \\ &= (4,272002)^{6}cos((143,8923165371)) + i(4,272002)^{6}sin((143,8923165371)) \\ &= -0,0000311131 + i0,0000226945\end{aligned}$$

Jadi didapat matriks A^{-7} yaitu:

$$A^{-7} = \begin{bmatrix} \frac{-85}{128}(-0,0000311131+i0,0000226945) & \frac{43}{128}(-0,0000311131+i0,0000226945) & \frac{43}{128}(-0,0000311131+i0,0000226945) \\ \frac{43}{128}(-0,0000311131+i0,0000226945) & \frac{-85}{128}(-0,0000311131+i0,0000226945) & \frac{43}{128}(-0,0000311131+i0,0000226945) \\ \frac{43}{128}(-0,0000311131+i0,0000226945) & \frac{43}{128}(-0,0000311131+i0,0000226945) & \frac{-85}{128}(-0,0000311131+i0,0000226945) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,0000206610 - i0,0000150706 & -0,0000104521 + i0,00000762393i & -0,0000104521 + i0,00000762393i \\ -0,0000104521 + i0,00000762393i & 0,0000206610 - i0,0000150706i & 42731,3544 - i17386,5164 \\ -0,0000104521 + i0,00000762393i & -0,0000104521 + i0,00000762393i & 0,0000206610 - i0,0000150706 \end{bmatrix}$$

Contoh 3.3. *Diberikan matriks* 3×3 *sebagai berikut :*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1-i\sqrt{3} & 1-i\sqrt{3} \\ 1-i\sqrt{3} & 0 & 1-i\sqrt{3} \\ 1-i\sqrt{3} & 1-i\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Hitunglah $tr(A^{10})$ *menggunakan Teorema 2.*

Penyelesaian :

Menurut Teorema 2

$$tr(A^n) = (2^n + 2(-1)^n)z^n$$

Untuk n bilangan bulat, diperoleh:,

$$\begin{aligned} tr(A^{10}) &= (2^{10} + 2(-1)^{10})(1 - i\sqrt{3})^{10} \\ &= (2^{10} + 2)(1 - i\sqrt{3})^{10} \\ &= 1026(1 - i\sqrt{3})^{10} \end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan bentuk $(1 - i\sqrt{3})^{10}$ maka digunakan aturan perpangkatan bilangan kompleks, yaitu:

$$z^n = r^n(cos(n\theta) + i \cdot sin(n\theta))$$

Selanjutnya akan dicari nilai dari r dan θ, yaitu:

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

$\theta = arc\ tan(\frac{y}{x}) = arc\ tan(\frac{-\sqrt{3}}{1}) = -60$

sehingga:

$$\begin{aligned} (1 - i\sqrt{3})^{10} &= (2)^{10}[cos[10 \cdot (-60)] + i \cdot sin[10 \cdot (-60)]] \\ &= (2)^{10} cos[-600] + i(2)^{10} sin[-600] \\ &= -512 + i886,81 \end{aligned}$$

Jadi didapat nilai $tr(A^{10})$ yaitu:

$$\begin{aligned} tr(A^{10}) &= 1026(1 - i\sqrt{3})^{10} \\ &= 1026(-512 + i886,81) \\ &= -525312 + i909867,0738 \end{aligned}$$

Contoh 3.4. *Diberikan matriks* 3×3 *sebagai berikut :*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} + i\frac{1}{3} & \frac{1}{2} + i\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} + i\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} + i\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} + i\frac{1}{3} & \frac{1}{2} + i\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Hitunglah $tr(A^{-11})$ *menggunakan Teorema 2.*

Penyelesaian :

Menurut Teorema 2

$$tr(A^n) = (2^n + 2(-1)^n)z^n$$

Untuk n bilangan bulat, diperoleh:,

$$\begin{aligned} tr(A^{-11}) &= (2^{-11} + 2(-1)^{-11})(\frac{1}{2} + i\frac{1}{3})^{-11} \\ &= (2^{-11} - 2)(\frac{1}{2} + i\frac{1}{3})^{-11} \\ &= -\frac{4095}{2048}(\frac{1}{2} + i\frac{1}{3})^{-11} \end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan bentuk $(\frac{1}{2} + i\frac{1}{3})^{-11}$ maka digunakan aturan perpangkatan bilangan kompleks, yaitu:

$$z^n = r^n(cos(n\theta) + i \cdot sin(n\theta))$$

Selanjutnya akan dicari nilai dari r dan θ, yaitu:

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{3})^2} = 0.6009252126$

$\theta = arc\ tan(\frac{y}{x}) = arc\ tan(\frac{1/3}{1/2}) = 33,690067526$

sehingga:

$$\begin{aligned} (\frac{1}{2} + i\frac{1}{3})^{-11} &= (0,6009252126)^{-11}[cos[(-11) \cdot (33,690067526)] + i \cdot sin[(-11) \cdot (33,690067526)]] \\ &= (0,6009252126)^{-11} cos(-370,5907428) + i(0,6009252126)^{-11} sin(-370,5907428) \\ &= 266,3872263 - i49,80846849 \end{aligned}$$

Jadi didapat nilai $tr(A^{-11})$ yaitu:

$$\begin{aligned} tr(A^{-11}) &= -\frac{4095}{2048}(\frac{1}{2}+i\frac{1}{3})^{-11} \\ &= -\frac{4095}{2048}(266,3872263 - i49,80846849) \\ &= -532,6443807 + 99,59261644 \end{aligned}$$

4. Simpulan

Diberikan Matriks *Circulant* Kompleks Bentuk Khusus 3 3 berpangkat bilangan bulat sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & z & z \\ z & 0 & z \\ z & z & 0 \end{bmatrix}, \text{dengan } \ z = a+ib \ \ \forall a,b \in \mathbb{R}, \ \ \text{dan } \ i = \sqrt{-1}.$$

Maka diperoleh,

$$A^n = \begin{bmatrix} [\frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [(-1)^{n-1} + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [(-1)^{n-1} + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n \\ [(-1)^{n-1} + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [\frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [(-1)^{n-1} + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n \\ [(-1)^{n-1} + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [(-1)^{n-1} + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [\frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n \end{bmatrix}$$

dengan n bilangan bulat, dan

$$tr(A^n) = (2^n + 2(-1)^n)z^n$$

dengan n bilangan bulat.

Daftar Pustaka

[1] Anton, H. 1987, *Aljabar Linear Elementer (Edisi Kelima)*. Jakarta: Erlangga.

[2] Aryani, F. et al. 2018 Trace Matriks Toeplitz Kompleks Khusus Ukuran 3 × 3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif, *Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri*, pp. 673681.

[3] Aryani F., Titik F. 2019, 'Trace Matriks Berbentuk Khusus 2 × 2 Berpangkat Bilangan Bulat Positif', *Talenta Conference Series: Science and Technology (ST)*, 2(2).

[4] Carmona, A. et al. 2020, The group inverse of some circulant matrices, *Linear Algebra and Its Applications*. doi: 10.1016/j.laa.2020.11.002.

[5] Carrasquinha, E. et al. 2018, Image reconstruction based on circulant matrices, *Signal Processing: Image Communication*, 63, pp. 7280.

[6] DeVille, L. and Nijholt, E. 2021, Circulant type formulas for the eigenvalues of linear network maps, *Linear Algebra and Its Applications*, 610, pp. 379439.

[7] Feng, J. M., Krahmer, F. and Saab, R. 2019, Quantized compressed sensing for random circulant matrices, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 47(3), pp. 10141032.

[8] Kannan, K. R., Elumalai, N. and Kavitha, M. 2018, 'On s-normal Circulant and con-s-normal Circulant Matrices', *International Journal of Scientific Research in Mathematical and Statistical Sciences*, 5(5), pp. 173178.

[9] Olii, I., Resmawan, R. and Yahya, L. 2021, Trace Matriks Toeplitz 2-Tridiagonal 3 × 3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif, *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 15(3), pp. 441-452. doi: https://doi.org/10.30598/barekengvol15iss3pp441-452.

[10] Rahmawati, Wartono and Jelita, M. 2019, Trace of Integer Power of Real 3 × 3 Specific Matrices, *International Journal of Advances in Scientific Research and Engineering*, 5(3), pp. 4856.