Jurnal Matematika Integratif.
Vol. 17, No. 2 (2021), pp. 85–96.
p-ISSN:1412-6184, e-ISSN:2549-903
doi:10.24198/jmi.v17.n2.35488.85-96

Radikal Prima-α Gabungan pada (R, S)-Modul

Dian Ariesta Yuwaningsih[1], Rusmining[2]

Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Ahmad Dahlan
[1]dian.ariesta@pmat.uad.ac.id, [2]rusmining@pmat.uad.ac.id

Abstrak

Diberikan R dan S masing-masing merupakan ring komutatif serta (R, S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Suatu (R, S)-submodul sejati P di M disebut (R, S)-submodul prima-α gabungan jika untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $r(m+m)S \subseteq P$ maka berakibat $r + r \in (P :_R M)$ atau $m + m \in P$. Jika M memiliki (R, S)-submodul prima-α gabungan maka radikal prima-α gabungan dari M adalah M atau merupakan irisan dari semua (R, S)-submodul prima-α gabungan di M. Pada artikel ini disajikan beberapa sifat dari radikal prima-α gabungan suatu (R, S)-modul. Lebih lanjut, pada akhir artikel ini disajikan sifat radikal prima-α gabungan pada suatu (R, S)-modul perkalian kiri.

Kata kunci:submodul prima-α, radikal prima, (R, S)-modul

Abstract

Given R and S are commutative rings, respectively, and (R, S)-module M with the property $S^2 = S$ and for each $a \in M$ satisfy $a \in RaS$. A proper (R, S)-submodule P of M is called jontly α-prime (R, S)-submodules if for each $r \in R$ and $m \in M$ with $r(m + m)S \subseteq P$ implies $r + r \in (P :_R M)$ or $m + m \in P$. If M has a jontly α-prime (R, S)-submodules then the jointly α-prime radical of M is M or is the intersection of all jontly α-prime (R, S)-submodule of M. In this article, we present some properties of jointly α-prime radicals of an (R, S)-module. Furthermore, at the end of this article, the jointly α-prime radical properties of a left multiplication (R, S)-module are presented.

Keywords: prime-α submodule, prime radical, (R, S)-module

1. Pendahuluan

Semua ring yang digunakan dalam artikel ini merupakan ring komutatif tanpa elemen satuan, kecuali dinyatakan selain itu. Penelitian terkait keprimaan pada suatu modul pertama kali diperkenalkan oleh Dauns [4]. Hasil dari penelitian Dauns [4] selanjutnya menjadi dasar dalam penelitian-penelitian lanjutan tentang keprimaan pada suatu modul hingga saat ini. Beberapa hasil pengembangan dari definisi submodul prima diantaranya adalah submodul semiprima Dauns [4], submodul endoprima Haghany dan Vedadi [5], submodul koprima Abuhlail [1], dan submodul prima lemah Jabbar [6]. Namun, beberapa perumuman dari submodul prima tersebut hanya fokus pada perkalian skalar di dalam modul. Padahal modul juga memiliki operasi penjumlahan yang dibawa dari struktur grupnya. Submodul prima-α merupakan salah satu

2000 Mathematics Subject Classification: 06F25, 16N80

Received: 28-08-2021, Revised: 17-10-2021, Accepted: 15-11-2021.

generalisasi dari submodul prima yang melibatkan semua operasi dari struktur modulnya, tidak hanya operasi perkalian skalarnya saja. Konsep terkait submodul prima-α ini diperkenalkan oleh Khumprapussorn [8].

Beberapa penelitian lanjutan terkait keprimaan pada suatu modul adalah penelitian tentang radikal primanya. Konsep radikal prima suatu modul diperkenalkan oleh Behboodi [3]. Dalam penelitiannya, Behboodi [3] juga mendefinisikan pembentukan himpunan sistem-m. Sistem-m pada suatu modul sendiri merupakan generalisasi himpunan tertutup multiplikatif pada suatu ring. Selanjutnya, Behboodi [3] telah menunjukkan bahwa submodul prima merupakan komplemen dari suatu sistem-m, sehingga sifat-sifat terkait radikal prima dapat dikaitkan dengan himpunan sistem-m pada suatu modul. Lebih lanjut, penelitian terkait keprimaan selalu diarahkan ke radikalnya bahkan hingga ke dualisasinya dengan mengembangkan sifat-sifat yang diperoleh sebelumnya. Di dalam papernya, Khumprapussorn [8] juga menyajikan generalisasi dari himpunan sistem-m suatu modul, yang didefinisikan oleh Behboodi [3]. Himpunan ini disebut sistem multiplikatif. Pemberian nama yang berbeda didasarkan pada perbedaan struktur keprimaan submodulnya. Di dalam papernya, Khumprapussorn [8] menyajikan beberapa sifat dari sistem multiplikatif dan hubungannya dengan submodul prima-α. Namun, konsep terkait radikal prima-α belum diteliti di sini. Padahal konsep terkait sistem multiplikatif ini dapat dijadikan sebagai dasar teori dalam penyelidikan sifat-sifat radikal prima-α pada suatu modul.

Di sisi lain berdasarkan Adkins [2] dan Wisbauer [10], suatu modul telah mengalami proses perumuman menjadi suatu bimodul. Bimodul sendiri telah diperumum menjadi struktur (R, S)-modul. Konsep terkait (R, S)-modul ini pertama kali diperkenalkan oleh Khumprapussorn *et al.* [9]. Dalam papernya, Khumprapussorn *et al.* [9] juga telah mengenalkan pendefinisian beberapa keprimaan di dalam (R, S)-modul, yaitu (R, S)-submodul prima penuh dan (R, S)-submodul prima gabungan. Beberapa sifat terkait (R, S)-submodul prima penuh dan (R, S)-submodul prima gabungan juga telah disajikan dalam paper Khumprapussorn *et al.* [9]. Dalam papernya yang lain, Khumprapussorn [7] juga mendefinisikan keprimaan lain di dalam (R, S)-modul, yang disebut (R, S)-submodul prima-R kiri. Selanjutnya, seiring perkembangan ilmu pengetahuan, konsep terkait (R, S)-submodul prima gabungan dan (R, S)-submodul prima-R kiri telah diperumum hingga radikalnya. Yuwaningsih dan Wijayanti [11] telah mendefinisikan radikal prima gabungan pada (R, S)-modul dan beberapa sifat-sifatnya. Selain itu, dalam papernya disajikan pula pendefinisian sistem-m^*, sebagai generalisasi sistem-m yang diperkenalkan Behboodi [3], serta hubungannya dengan (R, S)-submodul prima gabungan. Selain itu, Yuwaningsih [12] juga telah mendefinisikan konsep terkait radikal prima-R kiri pada (R, S)-modul serta menyajikan sifat-sifatnya.

Penelitian terkait submodul prima-α yang disajikan dalam Khumprapussorn [8] merupakan suatu hal yang baru. Namun, Khumprapussorn [8] hanya menyajikan hingga pendefinisian himpunan multiplikatif terkait submodul prima-α pada suatu modul. Konsep terkait submodul prima-α ini belum digeneralisasi ke dalam struktur (R, S)-modul. Selama ini peneliti berusaha mengembangkan konsep keprimaan di dalam struktur (R, S)-modul dengan cara mengamati perkembangan di seputar topik ini. Oleh karena itu, pada penelitian kali ini peneliti ingin mengembangkan konsep terkait submodul prima-α pada suatu modul ke dalam struktur (R, S)-modul. Apabila diberikan suatu (R, S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, maka suatu (R, S)-submodul sejati P di M disebut (R, S)-submodul prima-α gabungan jika untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $r(m + m)S \subseteq P$ maka berakibat $r + r \in (P :_R M)$ atau $m + m \in P$. Selanjutnya, peneliti telah mengkonstruksi pembentukan himpunan multiplikatif di dalam (R, S)-modul terkait dengan (R, S)-submodul prima-α gabungan, disebut himpunan sistem-m_α. Dengan menggunakan konsep radikal prima pada Behboodi [3], peneliti telah mengkonstruksi radikal prima-α gabungan suatu (R, S)-modul serta menyelidiki beberapa sifat dari radikal prima-α gabungan suatu (R, S)-modul. Lebih lanjut, pada akhir artikel ini disajikan suatu sifat radikal prima-α gabungan pada suatu (R, S)-modul perkalian kiri.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif yang melakukan tinjauan literatur komprehensif tentang pendefinisian radikal prima-α gabungan pada (R, S)-modul dan penyelidikan sifat-sifatnya. Tahapan pertama yang dilakukan dalam penelitian ini adalah mengkonstruksi pendefinisian radikal prima-α gabungan pada (R, S)-modul. Proses pendefinisian radikal prima-α gabungan ini merujuk pada proses pendefinisian radikal prima pada suatu modul Behboodi [3].

Pada teori modul, telah dikenal konsep sistem-m sebagai komplemen dari submodul prima Behboodi [3]. Konsep sistem-m ini digeneralisasi ke dalam struktur (R, S)-modul yang selanjutnya disebut himpunan sistem-m_α. Himpunan ini merupakan komplemen dari (R, S)-submodul prima-α gabungan. Dengan merujuk Behboodi [3], tahapan selanjutnya pada penelitian ini adalah menyelidiki beberapa sifat dari radikal prima-α gabungan suatu (R, S)-modul. Pada tahapan terakhir penelitian ini disajikan hasil penyelidikan terkait sifat radikal prima-α gabungan pada suatu (R, S)-modul perkalian kiri.

3. Radikal Prima-α Gabungan Suatu (R, S)-Modul

Berikut ini diberikan definisi dari himpunan α dan himpunan β.

Definisi 3.1. *Diberikan grup $(G, +)$ dan himpunan bagian H di G. Didefinisikan:*

a) $\alpha(H) = \{h \in G | h + h \in H\}$
b) $\beta(H) = \{h + h | h \in H\}$

Jika H merupakan ideal di dalam ring R, maka $\alpha(H)$ dan $\beta(H)$ masing-masing juga merupakan ideal di dalam ring R. Begitu pula jika H merupakan (R, S)-submodul di M, maka $\alpha(H)$ dan $\beta(H)$ masing-masing juga merupakan (R, S)-submodul di M. Selanjutnya, berikut diberikan definisi dari (R, S)-submodul prima-α gabungan.

Definisi 3.2. *Diberikan (R, S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Suatu (R, S)-submodul sejati P di M disebut (R, S)-submodul prima-α gabungan jika untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $r(m + m)S \subseteq P$ maka berakibat $r + r \in (P :_R M)$ atau $m + m \in P$.*

Definisi (R, S)-submodul prima-α gabungan di atas hanya melibatkan elemen-elemen di dalam ring R dan (R, S)-modul M. Berikut diberikan suatu proposisi yang merupakan definisi lain dari (R, S)-submodul prima-α gabungan, yaitu yang melibatkan ideal di dalam ring R dan (R, S)-submodul di dalam M.

Proposisi 3.3. *Diberikan (R, S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, serta (R, S)-submodul sejati P di M. P merupakan (R, S)-submodul prima-α gabungan jika dan hanya jika untuk setiap ideal I di R dan (R, S)-submodul N di M dengan $I(N + N)S \subseteq P$ maka berakibat $N + N \subseteq P$ atau $I + I \subseteq (P :_R M)$.*

Bukti. ($\Rightarrow$). Diambil sebarang ideal I di R dan (R, S)-submodul N di M dengan $I(N+N)S \subseteq P$ tetapi $N + N \nsubseteq P$. Diambil sebarang $x \in I$ dan $n \in N$ maka diperoleh $x(n + n)S \subseteq P$ tetapi $n + n \nsubseteq P$. Karena diketahui P merupakan (R, S)-submodul prima-α gabungan di M, maka diperoleh $x + x \in (P :_R M)$. Dengan kata lain, terbukti bahwa $I + I \subseteq (P :_R M)$.

($\Leftarrow$).Diambil sebarang $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $r(m + m)S \subseteq P$ tetapi $m + m \notin P$. Diperhatikan bahwa $RrR(m + m)SSS \subseteq RPS = P$, sehingga $Rr(RmS + RmS)S^2 = Rr(RmS + RmS)S \subseteq P$. Dari sini, maka diperoleh $Rr + Rr \subseteq (P :_R M)$ atau $RmS + RmS \subseteq P$. Dari $Rr + Rr \subseteq (P :_R M)$ diperoleh $RrMS + RrMS \subseteq P$. Karena $S^2 = S$, maka diperoleh $RrMSS + RrMSS \subseteq P$. Karena untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, maka diperoleh $rMS + rMS \subseteq P$, sehingga diperoleh $r + r \in (P :_R M)$. Selanjutnya, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, maka dari $RmS + RmS \subseteq P$ diperoleh $m + m \in P$. Dengan demikian, diperoleh $r+r \in (P :_R M)$ atau $m+m \in P$.Jadi, terbukti bahwa P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M.

Pada penelitian terkait radikal prima pada suatu modul, sebelum membahas ke pengertian radikal prima diperkenalkan dulu himpunan tertutup multiplikatif di dalam modul yang dikenal dengan himpunan sistem-m. Seperti halnya pada teori modul, pada (R,S)-modul juga dilakukan hal yang sama. Akan diperkenalkan terlebih dahulu himpunan tertutup multiplikatif yang disebut dengan himpunan sistem-m_α.

Definisi 3.4. *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Himpunan tak kosong $X \subseteq M \setminus 0$ disebut himpunan sistem-m_α M apabila untuk setiap ideal I di R serta untuk setiap (R,S)-submodul K dan N di M dengan sifat $(K+\beta(I)MS)\cap X \neq \varnothing$ dan $(K+\beta(N))\cap X \neq \varnothing$ maka berakibat $(K+I\beta(N)S)\cap X \neq \varnothing$.*

Himpunan sistem-m_α ini ternyata merupakan komplemen dari (R,S)-submodul prima-α gabungan. Namun sebelum membahas hal tersebut, berikut disajikan terlebih dahulu suatu sifat yang akan digunakan dalam pembuktian beberapa sifat selanjutnya.

Proposisi 3.5. *Diberikan grup $(G,+)$ serta subgrup A dan B di G. Subgrup $A \subseteq \alpha(B)$ jika dan hanya jika $\beta(A) \subseteq B$.*

Bukti. $(\Rightarrow)$. Diketahui $A \subseteq \alpha(B)$. Akan dibuktikan $\beta(A) \subseteq B$. Karena $A \subseteq \alpha(B)$ maka berarti bahwa untuk setiap elemen $a \in A$ memenuhi $a \in \alpha(B)$, yaitu $a + a \in B$. Dengan kata lain, untuk setiap $a \in A$ memenuhi $a + a \in B$. Selanjutnya, diambil sebarang $x + x \in \beta(A)$, maka diperoleh $x \in A$. Berdasarkan yang diketahui, maka diperoleh $x + x \in B$, sehingga terbukti bahwa $\beta(A) \subseteq B$.

$(\Leftarrow)$.Diketahui $\beta(A) \subseteq B$. Akan dibuktikan $A \subseteq \alpha(B)$. Karena $\beta(A) \subseteq B$, maka berarti bahwa untuk setiap $a + a \in \beta(A)$ memenuhi $a + a \in B$. Dengan kata lain, untuk setiap $a \in A$ apabila $a + a \in \beta(A)$ memenuhi $a + a \in B$. Selanjutnya, diambil sebarang $a \in A$, maka $a + a \in \beta(A)$ sehingga diperoleh $a + a \in B$. Akibatnya, diperoleh $a \in \alpha(B)$. Jadi, terbukti bahwa $A \subseteq \alpha(B)$.

Proposisi 3.6. *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$ serta (R,S)-submodul P di M. P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan jika dan hanya jika $M\backslash P$ merupakan himpunan sistem-m_α di M.*

Bukti. $(\Rightarrow)$. Diketahui P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M. Akan dibuktikan bahwa $M\backslash P$ merupakan himpunan sistem-m_α di M. Diambil sebarang ideal I di R serta (R,S)-submodul K dan N di M dengan $(K + I\beta(N)S) \cap M\backslash P = \varnothing$. Dari sini diperoleh $K + I\beta(N)S \subseteq P$. Akibatnya, diperoleh $K \subseteq P$ dan $I\beta(N)S \subseteq P$. Karena P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan maka dari $I\beta(N)S \subseteq P$ diperoleh $I \subseteq \alpha((P :_R M))$ atau $N \subseteq \alpha(P)$. Berdasarkan Proposisi 3.5 maka diperoleh $\beta(I) \subseteq (P :_R M)$ atau $\beta(N) \subseteq P$. Akibatnya diperoleh $K + \beta(I)MS \subseteq P$ atau $K + \beta(N) \subseteq P$. Dari sini diperoleh $(K + \beta(I)MS) \cap M\backslash P = \varnothing$ atau $(K + \beta(N)) \cap M\backslash P = \varnothing$. Dengan demikian, terbukti bahwa $M\backslash P$ merupakan himpunan sistem-m_α di M.

$(\Leftarrow)$. Diketahui $M\backslash P$ merupakan himpunan sistem-m_α di M. Akan dibuktikan bahwa P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M. Diambil sebarang ideal I di R dan (R,S)-submodul N di M dengan $I\beta(N)S \subseteq P$. Dari sini, berarti diperoleh $I\beta(N)S \cap M\backslash P = \varnothing$. Karena diketahui $M\backslash P$ merupakan himpunan sistem-m_α di M, maka diperoleh $\beta(I)MS \cap M\backslash P = \varnothing$ atau $\beta(N) \cap M\backslash P = \varnothing$. Dari sini diperoleh $\beta(I)MS \subseteq P$ atau $\beta(N) \subseteq P$. Dengan kata lain, diperoleh $\beta(I) \subseteq (P :_R M)$ atau $\beta(N) \subseteq P$. Berdasarkan Proposisi 3.5, diperoleh $I \subseteq \alpha((P :_R M))$ atau $N \subseteq \alpha(P)$. Dengan demikian, terbukti bahwa P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M.

Selanjutnya, berikut diberikan hubungan antara (R,S)-submodul maksimal dengan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M terkait dengan sistem-m_α suatu (R,S)-modul.

Proposisi 3.7. *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$ serta himpunan sistem-$m_\alpha X$ di M. Jika P merupakan (R,S)-submodul di M yang maksimal terhadap sifat $P \cap X = \varnothing$, maka P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M.*

Bukti. Diketahui P merupakan (R,S)-submodul di M yang maksimal terhadap sifat $P \cap X = \varnothing$. Akan dibuktikan bahwa P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M. Diambil sebarang ideal I di R dan (R,S)-submodul N di M dengan $I\beta(N)S \subseteq P$. Andaikan $I \nsubseteq \alpha((P :_R M))$ dan $N \nsubseteq \alpha(P)$. Dari sini diperoleh $\beta(I) \nsubseteq (P :_R M)$ dan $\beta(N) \nsubseteq P$. Dengan kata lain, diperoleh bahwa $\beta(I)MS \nsubseteq P$ dan $\beta(N) \nsubseteq P$. Oleh karena diketahui P maksimal terhadap sifat $P \cap X = \varnothing$ maka diperoleh $(P + \beta(I)MS) \cap X \neq \varnothing$ dan $(P + \beta(N)) \cap X \neq \varnothing$. Karena X merupakan himpunan sistem-m_α di M, maka diperoleh $(P + I\beta(N)S) \cap X \neq \varnothing$. Karena $I\beta(N)S \subseteq P$, maka diperoleh $P \cap X \neq \varnothing$. Kontradiksi dengan $P \cap X = \varnothing$. Berarti pengandaian salah dan harus diingkar, sehingga haruslah $I \subseteq \alpha((P :_R M))$ atau $N \subseteq \alpha(P)$. Dengan demikian, terbukti bahwa P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M.

Sebelum mendefinisikan radikal prima-α gabungan suatu (R,S)-modul, berikut didefinisikan terlebih dahulu himpunan ${}^{(R,S)}\sqrt[\alpha]{N}$ untuk suatu (R,S)-submodul N di M.

Definisi 3.8. *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$ serta (R,S)-submodul N di M. Apabila terdapat (R,S)-submodul prima-α gabungan yang memuat N, maka didefinisikan himpunan*

$$ {}^{(R,S)}\sqrt[\alpha]{N} := \{x \in M | (\forall sistem - m_a X \ di \ M) a \in X \Rightarrow X \cap N \neq \varnothing\}. $$

Apabila tidak terdapat (R,S)-submodul prima-α gabungan yang memuat N, maka didefinisikan himpunan ${}^{(R,S)}\sqrt[\alpha]{N} := M$.

Selanjutnya, untuk memperingkas penulisan, didefinisikan pula himpunan spektrum prima-α gabungan dari (R,S)-modul M sebagai berikut.

Definisi 3.9. *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, serta (R,S)-submodul N di M. Didefinisikan himpunan*

$$ Spec_\alpha^{jp}(M) := \{P | P merupakan \ (R,S) - \ submodul \ prima \ - \alpha \ gabungan \ di \ M\} $$

dan himpunan

$$ V_\alpha^{jp}(N) := \{P \in Spec_\alpha^{jp}(M) | N \subseteq P\}. $$

Selanjutnya, $Spec_\alpha^{jp}(M)$ disebut himpunan spektrum prima-α gabungan dari (R,S)-modul M. Berikut diberikan beberapa sifat dari himpunan $V_\alpha^{jp}(N)$, untuk suatu (R,S)-submodul N di M.

Proposisi 3.10. *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$.*

(a) Jika diberikan $\{N_i\}_{i \in I}$ merupakan koleksi (R,S)-submodul di M, maka diperoleh

$$ V_\alpha^{jp}(N) \bigcap_{i \in I} V_\alpha^{jp}(N_i) = V_\alpha^{jp}(\sum_{i \in I} N_i). \tag{1} $$

(b) Jika N dan L merupakan (R,S)-submodul di M, maka diperoleh

$$ V_\alpha^{jp}(N) \cup V_\alpha^{jp}(L) \subseteq V_\alpha^{jp}(N \cap L). \tag{2} $$

Bukti.

(a) Diambil sebarang $P \in \bigcap_{i \in I} V_\alpha^{jp}(N_i)$, maka $N_i \subseteq P$ untuk setiap $i \in I$. Karena P merupakan (R,S)-submodul di M, maka $\sum_{i \in I} N_i \subseteq P$. Jadi diperoleh $P \in V_\alpha^{jp}(\sum i \in I N_i)$. Dengan demikian, diperoleh $\bigcap_{i \in I} V_\alpha^{jp}(N_i \subseteq V_\alpha^{jp}(\sum_{i \in I} N_i)$. Selanjutnya, diambil sebarang $K \in V_\alpha^{jp}(\sum_{i \in I} N_i)$, maka diperoleh $\sum_{i \in I} N_i \subseteq K$. Akibatnya, diperoleh $N_i \subseteq K$ untuk setiap $i \in I$, sehingga diperoleh $K \in V_\alpha^{jp}(N_i)$, untuk setiap $i \in I$. Dari sini, diperoleh

$K \in \bigcap_(i \in I) V_\alpha^{jp}(N_i)$ sehingga $V_\alpha^{jp}(\sum_{i\in I} N_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} V_\alpha jp(N_i)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $\bigcap_{i\in I} V_\alpha^{jp}(N_i) = V_\alpha^{jp}(\sum_{i\in I} N_i)$.

(b) Diambil sebarang $P \in V_\alpha^{jp}(N) \cup V_\alpha^{jp}(L)$, maka $N \subseteq P$ atau $L \subseteq P$. Akibatnya, diperoleh $N \cap L \subseteq P$. Jadi, diperoleh $P \in V_\alpha^{jp}(N \cap L)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $V_\alpha^{jp}(N) \cup V_\alpha^{jp}(L) \subseteq V_\alpha^{jp}(N \cap L)$.

Berikut diberikan karakteristik dari himpunan ${}^{(R,S)}\sqrt[\alpha]{N}$, untuk suatu (R,S)-submodul N di M.

Proposisi 3.11. *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Jika diberikan (R,S)-submodul N di M, maka ${}^{(R,S)}\sqrt[\alpha]{N} = M$ atau ${}^{(R,S)}\sqrt[\alpha]{N} := \bigcap_{P\in V_\alpha^{jp}(N)} P$.*

Bukti. Misalkan ${}^{(R,S)}\sqrt[\alpha]{N} \neq M$, berarti himpunan $V_\alpha^{jp}(N) \neq \varnothing$. Diambil sebarang $m \in {}^{(R,S)}\sqrt[\alpha]{N}$ dan sebarang $P \in V_\alpha^{jp}(N)$. Selanjutnya, dibentuk sistem-$m_\alpha X := M \backslash P$ di M. Karena $N \subseteq P$ maka $X \cap N = \varnothing$. Akibatnya diperoleh $m \notin X$, sehingga $m \in P$. Jadi, terbukti bahwa ${}^{(R,S)}\sqrt[\alpha]{N} \subseteq \bigcap_{P\in V_\alpha^{jp}(N)} P$. Sebaliknya, diambil sebarang $a \in \bigcap_{P\in V_\alpha^{jp}(N)} P$. Andaikan $a \notin {}^{(R,S)}\sqrt[\alpha]{N}$, maka terdapat sistem-$m_\alpha X$ sedemikian sehingga $a \in X$ tetapi $N \cap X = \varnothing$. Selanjutnya, dibentuk himpunan

$$\mathcal{H} = \{J | N \subseteq J, J(R,S) - \text{ submodel di } M \text{ dengan } J \cap X = \varnothing\}$$

Himpunan $\mathcal{H}$ merupakan relasi terurut parsial dengan relasi inklusi. Dengan menggunakan Lemma Zorn, maka $\mathcal{H}$ memiliki elemen maksimal yaitu (R,S)-submodul $K \supseteq N$ yang maksimal terhadap sifat $K \cap X = \varnothing$. Berdasarkan Proposisi 3.7 maka diperoleh bahwa K merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M, sehingga diperoleh $K \in V_\alpha^{jp}(N)$. Dengan demikian diperoleh $a \in K$. Padahal $a \in X$, sehingga diperoleh $K \cap X \neq \varnothing$. Terjadi kontradiksi, sehingga pengandaian salah dan harus diingkar, sehingga haruslah $a \in {}^{(R,S)}\sqrt[\alpha]{N}$. Dengan demikian, diperoleh $\bigcap_{P\in V_\alpha^{jp}(N)} P \subseteq {}^{(R,S)}\sqrt[\alpha]{N}$. Jadi, terbukti bahwa ${}^{(R,S)}\sqrt[\alpha]{N} := \bigcap_{P\in V_\alpha^{jp}(N)} P$.

Berikut ini diberikan hubungan antara himpunan ${}^{(R,S)}\sqrt[\alpha]{N}$ dengan himpunan $\sqrt{(N :_R M)}$, untuk suatu (R,S)-submodul N di M.

Proposisi 3.12. *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Jika diberikan (R,S)-submodul N di M maka $\sqrt{(N :_R M)}MS \subseteq {}^{(R,S)}\sqrt[\alpha]{N}$.*

Bukti. Diketahui bahwa $\sqrt{(N :_R M)}$ sama dengan R atau merupakan irisan dari semua ideal prima di R yang memuat $(N :_R M)$. Jika ${}^{(R,S)}\sqrt[\alpha]{N} = M$, maka karena $\sqrt{(N :_R M)} \subseteq R$ diperoleh $\sqrt{(N :_R M)}MS \subseteq RMS \subseteq M \subseteq {}^{(R,S)}\sqrt[\alpha]{N}$. Selanjutnya, jika ${}^{(R,S)}\sqrt[\alpha]{N} \neq M$, berarti bahwa ${}^{(R,S)}\sqrt[\alpha]{N} = \bigcap_{P\in V_\alpha^{jp}(N)} P$. Diambil sebarang $P \in V_\alpha^{jp}(N)$, maka P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M dengan $N \subseteq P$. Sehingga diperoleh $(P :_R M)$ merupakan ideal prima di R. Selanjutnya, karena $N \subseteq P$ maka diperoleh $(N :_R M) \subseteq (P :_R M)$. Karena $(P :_R M)$ merupakan ideal prima di R dan memuat $(N :_R M)$, maka diperoleh $\sqrt{(N :_R M)} \subseteq (P :_R M)$. Akibatnya, diperoleh $\sqrt{(N :_R M)}MS \subseteq (P :_R M)MS \subseteq P$. Karena pengambilan (R,S)-submodul prima-$\alpha P \in V_\alpha^{jp}(N)$ sebarang, maka diperoleh $\sqrt{(N :_R M)}MS \subseteq \bigcap_{P\in V_\alpha^{jp}(N)} P = {}^{(R,S)}\sqrt[\alpha]{N}$. Dengan demikian, pada kedua kasus terbukti bahwa $(N :_R M)MS \subseteq {}^{((R,S)}\sqrt[\alpha]{N}$.

Dengan merujuk pada pendefinisian radikal prima suatu modul, berikut disajikan definisi dari radikal prima-α gabungan suatu (R,S)-modul.

Definisi 3.13. *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Jika terdapat (R,S)-submodul prima-α gabungan di M maka didefinisikan radikal prima-α gabungan dari M adalah $rad_{(R,S)_\alpha}(M) := {}^{(R,S)}\sqrt[\alpha]{0} := \bigcap_{P\in Spec_\alpha^{jp}(M)} P$. Namun, jika tidak terdapat (R,S)-submodul prima-α gabungan di M maka didefinisikan radikal prima-α gabungan dari M adalah $rad_{(R,S)_\alpha}(M) := M$.*

Selanjutnya, berikut disajikan suatu contoh radikal prima-α gabungan suatu (R, S)-modul M.

Contoh 3.14. *Diberikan $\mathbb{Z}$ sebagai $(2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z})$-modul. Dapat ditunjukkan bahwa $\{0\}$ merupakan $(2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z})$-submodul prima-$\alpha$ gabungan di $\mathbb{Z}$. Karena setiap $(2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z})$-submodul prima-$\alpha$ gabungan di $\mathbb{Z}$ memuat $\{0\}$, maka radikal prima-α gabungan dari $(2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z})$-modul $\mathbb{Z}$ adalah $rad_{(2\mathbb{Z},2\mathbb{Z})_\alpha}(\mathbb{Z}) = \{0\}$.*

4. Beberapa Sifat Radikal Prima-α Gabungan Suatu (R, S)-Modul

Setelah mengetahui definisi radikal prima-α gabungan suatu (R, S)-modul, pada bab ini akan disajikan beberapa sifat radikal prima-α gabungan suatu (R, S)-modul. Sifat pertama radikal prima-α gabungan suatu (R, S)-modul adalah mengenai hubungan antara radikal prima-α gabungan suatu (R, S)-modul M dengan radikal prima-α gabungan suatu (R, S)-submodul N di M. Namun, sebelumnya berikut diberikan suatu sifat yang akan digunakan dalam pembuktian sifat pertama radikal prima-α gabungan suatu (R, S)-modul.

Proposisi 4.1. *Diberikan (R, S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, dan (R, S)-submodul N di M. Jika P merupakan (R, S)-submodul prima-α gabungan di M, maka $N \cap P$ merupakan (R, S)-submodul prima-α gabungan di N.*

Bukti. Diambil sebarang ideal I di R dan (R, S)-submodul L di N dengan $I\beta(L)S \subseteq N \cap P$. Dari sini diperoleh bahwa $I\beta(L)S \subseteq P$. Karena L merupakan (R, S)-submodul di N, maka K juga merupakan (R, S)-submodul di M. Akibatnya, karena P merupakan (R, S)-submodul prima-α gabungan di M, maka dari $I\beta(L)S \subseteq P$ diperoleh $I \subseteq \alpha((P :_R M))$ atau $L \subseteq \alpha(P)$. Dari sini diperoleh $\beta(I) \subseteq (P :_R M)$ atau $\beta(L) \subseteq P$. Dengan kata lain, $\beta(I)MS \subseteq P$ atau $\beta(L) \subseteq P$. Karena N merupakan (R, S)-submodul di M, maka diperoleh $\beta(I)NS \subseteq \beta(I)MS \subseteq P$ dan $\beta(I)NS \subseteq N$. Akibatnya, diperoleh $\beta(I)NS \subseteq N \cap P$, sehingga $I \subseteq \alpha((N \cap P :_R N))$. Selanjutnya, karena L merupakan (R, S)-submodul di N, maka diperoleh $\beta(L) \subseteq N$. Akibatnya, diperoleh $\beta(L) \subseteq N \cap P$, sehingga $L \subseteq \alpha(N \cap P)$. Dengan demikian, dari $I\beta(L)S \subseteq N \cap P$ berakibat $I \subseteq \alpha((N \cap P :_R N))$ atau $L \subseteq \alpha(N \cap P)$. Jadi terbukti bahwa $N \cap P$ merupakan (R, S)-submodul prima-α gabungan di N.

Proposisi 4.2. *Diberikan (R, S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Jika N merupakan (R, S)-submodul di M, maka $rad_{(R,S)_\alpha}(N) \subseteq rad_{(R,S)_\alpha}$ (M).*

Bukti. Diambil sebarang (R, S)-submodul prima-α gabungan $P \in Spec^{jp}_\alpha(M)$. Jika $N \subseteq P$, maka diperoleh $rad_{(R,S)_\alpha}(N) \subseteq P$. Jika $N \nsubseteq P$, maka berdasarkan Proposisi 4.1, diperoleh bahwa $N \cap P$ merupakan (R, S)-submodul prima-α gabungan di N. Akibatnya diperoleh $rad_{(R,S)_\alpha}(N) \subseteq N \cap P \subseteq P$. Dengan demikian, dalam kedua kasus tersebut diperoleh bahwa $rad_{(R,S)_\alpha}(N) \subseteq P$. Karena pengambilan $P \in Spec^{jp}_\alpha(M)$ sebarang, maka terbukti bahwa $rad_{(R,S)_\alpha}(N) \subseteq rad_{(R,S)_\alpha}(M)$.

Apabila (R, S)-modul M merupakan hasil tambah langsung dari submodul-submodulnya, ternyata radikal prima-α gabungan dari M juga merupakan hasil tambah langsung dari radikal prima-α gabungan submodul-submodulnya. Hal ini dijelaskan dalam proposisi berikut ini.

Proposisi 4.3. *Diberikan (R, S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Jika $M = \bigoplus_(i \in I)N_i$, yakni M merupakan hasil tambah langsung dari (R, S)-submodul N_i di M untuk setiap $i \in I$, maka diperoleh $rad_{(R,S)_\alpha}(M) = \bigoplus_{i\in I} rad_{(R,S)_\alpha}(N_i)$.*

Bukti. Karena N_i merupakan (R, S)-submodul di M untuk setiap $i \in I$, maka $rad_{(R,S)_\alpha}(N_i) \subseteq rad_{(R,S)_\alpha}(M)$, untuk setiap $i \in I$. Jadi diperoleh $\bigoplus_{i\in I} rad_{(R,S)_\alpha}(N_i) \subseteq rad_{(R,S)_\alpha}(M)$. Selanjutnya, diambil sebarang $m \in M$, maka $m = \sum_{i\in I} m_i$ dengan $m_i \in N_i$ untuk setiap $i \in I$ dan $m_i = 0$ kecuali untuk berhingga banyak indeks I. Misalkan $m \notin \bigoplus_{i\in I} rad_{(R,S)_\alpha}(N_i)$, akan ditunjukkan bahwa $m \notin rad_{(R,S)_\alpha}(M)$. Karena $m \notin \bigoplus_{i\in I} rad_{(R,S)_\alpha}(N_i)$, maka terdapar

$k \in I$ sehingga $m_k \notin rad_{(R,S)_\alpha}(N_k)$. Berarti terdapat (R,S)-submodul prima-α gabungan N_k^* di N_k sehingga $m_k \notin N_k^*$. Dibentuk $K = N_k^* \bigoplus(\bigoplus_{i\neq k} N_i)$. Pertama, akan dibuktikan bahwa K merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M. Diambil sebarang ideal I di R dan $a \in M$ dengan $I(a+a)S \subseteq K$. Karena $a \in M$, maka diperoleh $a = \sum_{i\in I} a_i$ dengan $a_i \in N_i$ untuk setiap $i \in I$ dan $a_i = 0$ kecuali untuk berhingga banyak indeks I. Berarti diperoleh $I(a+a)S = I(\sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} a_i)S = I(a_k+a_k)S + I(\sum_{i\neq k} a_i + \sum_{i\neq k} a_i)S \subseteq K$, sehingga $I(a_k+a_k)S \subseteq N_k^*$. Karena N_k^* merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di N_k, maka $a_k + a_k \subseteq N_k^*$ atau $(I+I)N_kS \subseteq N_k^*$. Selanjutnya, karena $a_i \in N_i$ untuk setiap $i \in I$ maka diperoleh $\sum_{i\neq k} a_i + \sum_{i\neq k} a_i \in \bigoplus_{i\neq k} N_i$. Karena untuk setiap $i \in I$ diketahui bahwa N_i merupkan (R,S)-submodul di M, amak diperoleh $(I+I)(\bigoplus_{i\neq k} N_i)S \subseteq \bigoplus_{i\neq k} N_i$. Dengan demikian, diperoleh $a+a = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} a_i \in K$ atau $(I+I)(\bigoplus_{i\in I} N_i)S = (I+I)MS \subseteq K$. Jadi, terbukti bahwa K merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M. Selanjutnya, karena $m_k \notin N_k^*$ maka $m \notin K$. Karena K merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M, maka $m \notin rad_{(R,S)_\alpha}(M)$. Jadi diperoleh $rad_{(R,S)_\alpha}(M) \subseteq \bigoplus_{i\in I} rad_{(R,S)_\alpha}(N_i)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $rad_{(R,S)_\alpha}(M) = \bigoplus_{i\in I} rad_{(R,S)_\alpha}(N_i)$.

Pada teori modul, telah diketahui bahwa setiap submodul prima memuat submodul prima minimal. Sifat ini juga berlaku pada (R,S)-modul, yaitu setiap (R,S)-submodul prima-α gabungan memuat (R,S)-submodul prima-α gabungan minimal. Dengan menggunakan sifat ini, berikut disajikan sifat radikal prima-α gabungan suatu (R,S)-modul dikaitkan dengan (R,S)-submodul prima-α gabungan minimal.

Proposisi 4.4. *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Radikal prima-α gabungan dari M adalah M atau merupakan irisan dari semua (R,S)-submodul prima-α gabungan minimal di M.*

Bukti. Misalkan $rad_{(R,S)_\alpha}(M) \neq M$, maka M memuat (R,S)-submodul prima-α gabungan sehingga diperoleh $Spec_\alpha^{jp}(M) \neq \varnothing$. Karena setiap (R,S)-submodul prima-α gabungan di M memuat (R,S)-submodul prima-α gabungan minimal, maka untuk setiap $P \in Spec_\alpha^{jp}(M)$ terdapat (R,S)-submodul prima-α gabungan minimal $P' \in Spec_\alpha^{jp}(M)$ sedemikian sehingga memenuhi $P' \in P$. Selanjutnya, dibentuk himpunan

$$\wp = \{P' \subseteq P | P'(R,S) - \text{submodul prima} - \alpha\text{gabungan minimal } \& P \in Spec_\alpha^{jp}(M)\}.$$

Akan ditunjukkan bahwa $rad_{(R,S)_\alpha}(M) = \cap_{P'\in I} P'$. Karena $I \subseteq Spec_\alpha^{jp}(M)$, maka diperoleh $rad_{(R,S)_\alpha}(M) \subseteq \cap_{P'\in I} P'$. Sebaliknya, diambil sebarang $a \notin rad_{(R,S)_\alpha}(M)$, maka terdapat (R,S)-submodul prima-α gabungan $P \in Spec_\alpha^{jp}(M)$ sehingga memenuhi $a \notin P$. Karena $P' \subseteq P$ untuk suatu (R,S)-submodul prima-α gabungan minimal $P' \in I$, maka diperoleh $a \notin P'$. Akibatnya, diperoleh $a \notin \cap_{P'\in I} P'$ sehingga terbukti bahwa $\cap_{P'\in I} P' \subseteq rad_{(R,S)_\alpha}(M)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $rad_{(R,S)_\alpha}(M)$ merupakan irisan dari semua (R,S)-submodul prima-α gabungan minimal di M.

Selanjutnya, berikut diberikan dua buah sifat yang nantinya akan digunakan dalam pembuktian sifat radikal prima-α gabungan suatu (R,S)-modul faktor.

Proposisi 4.5. *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, serta (R,S)-submodul prima-α gabungan P_1 dan P_2 di M. Jika*

$$P_1 / rad_{(R,S)_\alpha}(M) \quad \textit{dan} \quad P_2 / rad_{(R,S)_\alpha}(M)$$

merupakan (R,S)-submodul di $M / rad_{(R,S)_\alpha}(M)$, maka berlaku

$$P_1 / rad_{(R,S)_\alpha}(M) \cap P_2 / rad_{(R,S)_\alpha}(M) = (P_1 \cap P_2) / rad_{(R,S)_\alpha}(M)$$

.

Bukti. Diambil sebarang $\bar{a} \in {}^{(P_1 \cap P_2)}\!/_{rad_{(R,S)_\alpha}(M)}$ maka $\bar{a} = a + rad_{(R,S)_\alpha}(M)$ dengan $a \in P_1 \cap P_2$. Berarti $a \in P_1$ dan $a \in P_2$, sehingga diperoleh $\bar{a} \in {}^{P_1}\!/_{rad_{(R,S)_\alpha}(M)}$ dan $\bar{a} \in {}^{P_2}\!/_{rad_{(R,S)_\alpha}(M)}$. Dengan demikian, diperoleh bahwa $\bar{a} \in {}^{P_1}\!/_{rad_{(R,S)_\alpha}(M)} \cap {}^{P_2}\!/_{rad_{(R,S)_\alpha}(M)}$. Jadi, terbukti bahwa ${}^{(P_1 \cap P_2)}\!/_{rad_{(R,S)_\alpha}(M)} \subseteq {}^{P_1}\!/_{rad_{(R,S)_\alpha}(M)} \cap {}^{P_2}\!/_{rad_{(R,S)_\alpha}(M)}$. Selanjutnya, diambil sebarang $\bar{b} \in {}^{P_1}\!/_{rad_{(R,S)_\alpha}(M)} \cap {}^{P_2}\!/_{rad_{(R,S)_\alpha}(M)}$. Berarti diperoleh $\bar{b} \in {}^{P_1}\!/_{/rad_{(R,S)_\alpha}(M)}$ dan $\bar{b} \in {}^{P_2}\!/_{rad_{(R,S)_\alpha}(M)}$. Dengan demikian, diperoleh $\bar{b} = p_1 + rad_{(R,S)_\alpha}(M)$ dan $\bar{b} = p_2 + rad_{(R,S)_\alpha}(M)$, untuk suatu $p_1 \in P_1$ dan $p_2 \in P_2$. Akibatnya, diperoleh $\bar{b} = p_1 + rad_{(R,S)_\alpha}(M) = p_2 + rad_{(R,S)_\alpha}(M)$, sehingga $p_1 - p_2 \in rad_{(R,S)_\alpha}(M)$. Berarti terdapat $k \in rad_{(R,S)_\alpha}(M)$ sehingga memenuhi $p_1 - p_2 = k$. Dengan demikian, diperoleh $p_1 = p_2 + k \in P_2$ dan $p_2 = p_1 + k \in P_1$. Jadi, diperoleh $\bar{b} \in {}^{(P_1 \cap P_2)}\!/_{rad_{(R,S)_\alpha}(M)}$, sehingga terbukti bahwa ${}^{P_1}\!/_{rad_{(R,S)_\alpha}(M)} \cap {}^{P_2}\!/_{rad_{(R,S)_\alpha}(M)} \subseteq {}^{(P_1 \cap P_2)}\!/_{rad_{(R,S)_\alpha}(M)}$. Dengan demikian, terbukti bahwa ${}^{P_1}\!/_{rad_{(R,S)_\alpha}(M)} \cap {}^{P_2}\!/_{rad_{(R,S)_\alpha}(M)} = {}^{(P_1 \cap P_2)}\!/_{rad_{(R,S)_\alpha}(M)}$.

Proposisi 4.6. *Diberikan (R, S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, dan (R, S)-submodul P dan A di M dengan $A \subset P$. P merupakan (R, S)-submodul prima-α gabungan di M jika dan hanya jika P/A merupakan (R, S)-submodul prima-α gabungan di M/A.*

Bukti. $(\Rightarrow)$.Diambil sebarang ideal I di R dan (R, S)-submodul N/A di M/A dengan $I(N/A + N/A)S \subseteq P/A$. Dari sini diperoleh $INS/A \subseteq P/A$, sehingga $INS \subseteq P$. Akibatnya, diperoleh $I(N + N)S \subseteq P$. Karena diketahui P merupakan (R, S)-submodul prima-α gabungan di M maka diperoleh $N + N \subseteq P$ atau $I + I \subseteq (P :_R M)$. Dari sini diperoleh $N \subseteq P$ atau $I \subseteq (P :_R M)$ sehingga diperoleh $N/A \subseteq P/A$ atau $(IMS + A)/A \subseteq P/A$. Karena $(IMS + A)/A = I(M/A)S \subseteq P/A$, maka diperoleh $(I + I)(M/A)S \subseteq P/A$ atau dengan kata lain $I + I \subseteq (P/A :_R M/A)$. Karena $N/A \subseteq P/A$ maka diperoleh $N/A + N/A \subseteq P/A$. Dengan demikian diperoleh $N/A + N/A \subseteq P/A$ atau $I + I \subseteq (P/A :_R M/A)$. Jadi, terbukti bahwa P/A merupakan (R, S)-submodul prima-α gabungan di M/A.

$(\Leftarrow)$. Diambil sebarang ideal I di R dan (R, S)-submodul N di M dengan $I(N+N)S \subseteq P$. Dari sini diperoleh $(I(N + N)S + A) \subseteq P/A$, sehingga $I((N + N + A)/A)S \subseteq P/A$. Karena P/A merupakan (R, S)-submodul prima-α gabungan di M/A maka diperoleh $(N + N + A)/A \subseteq P/A$ atau $I + I \subseteq (P/A :_R M/A)$. Dengan kata lain, diperoleh $N/A + N/A \subseteq P/A$ atau $(I + I)(M/A)S \subseteq P/A$. Hal ini ekuivalen dengan $N + N \subseteq P$ atau $(I + I)MS \subseteq P$, sehingga diperoleh $N + N \subseteq P$ atau $I + I \subseteq (P :_R M)$. Jadi, terbukti bahwa P merupakan (R, S)-submodul prima-α gabungan di M.

Dengan menggunakan Proposisi 4.5 dan Proposisi 4.6 dapat ditunjukkan bahwa radikal prima-α gabungan suatu (R, S)-modul faktor ${}^{M}\!/_{rad_{(R,S)_\alpha}(M)}$ adalah nol.

Proposisi 4.7. *Jika diberikan (R, S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, maka diperoleh $rad_{(R,S)_\alpha}\left({}^{M}\!/_{rad_{(R,S)_\alpha}(M)}\right) = \bar{0}$.*

Bukti. Misalkan M tidak memuat (R, S)-submodul prima-α gabungan, berarti diperoleh $rad_{(R,S)_\alpha}(M) = M$. Berdasarkan Proposisi 4.6, maka diperoleh bahwa (R, S)-modul faktor ${}^{M}\!/_{rad_{(R,S)_\alpha}(M)}$ juga tidak memuat (R, S)-submodul prima-α gabungan, sehingga diperoleh $rad_{(R,S)_\alpha}\left({}^{M}\!/_{rad_{(R,S)_\alpha}(M)}\right) = {}^{M}\!/_{rad_{(R,S)_\alpha}(M)} = {}^{M}\!/_{M} = \bar{0}$. Selanjutnya, misalkan M memuat (R, S)-submodul prima-α gabungan. Berdasarkan Proposisi 4.6, diperoleh bahwa

(R,S)-modul faktor ${}^{M}\!/_{rad_{(R,S)_\alpha}(M)}$ juga memuat (R,S)-submodul prima-α gabungan. Akibatnya, diperoleh $rad_{(R,S)_\alpha}\left({}^{M}\!/_{rad_{(R,S)_\alpha}(M)}\right) = \cap_{\bar{P}\in Spec_\alpha^{jp}\left({}^{M}\!/_{rad_{(R,S)_\alpha}(M)}\right)}\bar{P}$. Berdasarkan Proposisi 4.5 diperoleh

$$\begin{aligned} rad_{(R,S)_\alpha}\left({}^{M}\!/_{rad_{(R,S)_\alpha}(M)}\right) &= \bigcap_{\bar{P}\in Spec_\alpha^{jp}\left({}^{M}\!/_{rad_{(R,S)_\alpha}(M)}\right)} \bar{P} \\ &= {}^{\left(\cap_{P\in Spec_\alpha^{jp}(M)}P\right)}\!/_{ad_{(R,S)_\alpha}(M)} \\ &= {}^{ad_{(R,S)_\alpha}(M)}\!/_{ad_{(R,S)_\alpha}(M)} \\ &= \bar{0} \end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $rad_{(R,S)_\alpha}\left({}^{M}\!/_{rad_{(R,S)_\alpha}(M)}\right) = \bar{0}$.

Selanjutnya, apabila diberikan suatu (R,S)-modul M dan ideal I di R dengan sifat $I \subseteq (0 :_R M)$, maka dapat ditunjukkan bahwa M juga merupakan $(R/I,S)$-modul terhadap operasi pergandaan skalar $\bar{a}\cdot m * s := ams$ untuk setiap $\bar{a} \in R/I, m \in M$, dan $s \in S$. Berikut diberikan suatu sifat yang merupakan syarat perlu dan syarat cukup suatu (R,S)-submodul prima-α gabungan di M membentuk $(R/I,S)$-submodul prima-α gabungan di M.

Proposisi 4.8. *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, dan ideal I di R dengan $I \subseteq (0 :_R M)$. P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M jika dan hanya jika P merupakan $(R/I,S)$-submodul prima-α gabungan di M*

Bukti. $(\Rightarrow)$. Diambil sebarang ideal $\bar{J} = J/I \in R/I$ dan $(R/I,S)$-submodul di M dengan $\bar{J}(N+N)S \subseteq P$. Karena M dapat dipandang sebagai $(R/I,S)$-modul, maka diperoleh $\bar{J}(N+N)S = J/I(N+N)S = J(N+N)S \subseteq P$. Karena P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M, maka berakibat $N+N \subseteq P$ atau $(J+J)MS \subseteq P$. Akibatnya, diperoleh $(\bar{J}+\bar{J})MS = (J+J)MS \subseteq P$ atau $N+N \subseteq P$. Jadi, terbukti bahwa P merupakan $(R/I,S)$-submodul prima-α gabungan di M.

$(\Leftarrow)$. Diambil sebarang ideal J di R dan (R,S)-submodul N di M dengan $J(N+N)S \subseteq P$. Karena M dapat dipandang sebagai $(R/I,S)$-modul, maka diperoleh $J(N+N)S = ((J+I)/I)(N+N)S \subseteq P$. Karena diketahui P merupakan $(R/I,S)$-submodul prima-α gabungan di M, maka berakibat $((J+I)/I+(J+I)/I)MS \subseteq P$ atau $N+N \subseteq P$. Akibatnya, diperoleh $(J+J)MS \subseteq P$ atau $N+N \subseteq P$. Dengan demikian, terbukti bhawa P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M.

Berikut diberikan suatu sifat yang menunjukkan bahwa radikal prima-α gabungan (R,S)-modul M sama dengan radikal prima-α gabungan $(R/I,S)$-modul M.

Proposisi 4.9. *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Jika I merupakan ideal di R dengan sifat $I \subseteq (0 :_R M)$, maka diperoleh $rad_{(R,S)_\alpha}(M) = rad_{(R/I,S)_\alpha}(M)$.*

Bukti. Misalkan $rad_{(R,S)_\alpha}(M) = M$, berarti M tidak memuat (R,S)-submodul prima-α gabungan. Akibatnya, berdasarkan Proposisi 4.8 diperoleh bahwa M juga tidak memuat $(R/I,S)$-submodul prima-α gabungan. Dengan demikian, diperoleh $rad_{(R/I,S)_\alpha}(M) = M$ sehingga terbukti bahwa $rad_{(R,S)_\alpha}(M) = rad_{(R/I,S)_\alpha}(M)$. Selanjutnya, misalkan $rad_{(R,S)_\alpha}(M) \neq M$, berarti M memuat (R,S)-submodul prima-α gabungan. Akibatnya, berdasarkan Proposisi 4.8 diperoleh bahwa M juga memuat $(R/I,S)$-submodul prima-α gabungan. Diambil sebarang $a \in rad_{(R,S)_\alpha}(M)$ dan (R,S)-submodul prima-α gabungan P di M, maka diperoleh $a \in P$. Berdasarkan Proposisi 4.8, diperoleh bahwa P juga merupakan $(R/I,S)$-submodul prima-α gabungan di M. Oleh karena itu, karena pengambilan (R,S)-submodul prima-α gabungan P di M sebarang, maka diperoleh $a \in rad_{(R/I,S)_\alpha}(M)$. Jadi terbukti bahwa $rad_{(R,S)_\alpha}(M) \subseteq$

$rad_{(R/I,S)_\alpha}(M)$. Selanjutnya, diambil sebarang $b \in rad_{(R/I,S)_\alpha}(M)$ dan $(R/I, S)$-submodul prima-α gabungan N di M, maka diperoleh $b \in N$. Berdasarkan Proposisi 4.8, diketahui bahwa N juga merupakan (R, S)-submodul prima-α gabungan di M. Oleh karena itu, karena pengambilan $(R/I, S)$-submodul prima-α gabungan N di M sebarang, maka diperoleh $b \in rad_{(R,S)_\alpha}(M)$. Jadi, terbukti bahwa $rad_{(R/I,S)_\alpha}(M) \subseteq rad_{(R,S)_\alpha}(M)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $rad_{(R,S)_\alpha}(M) = rad_{(R/I,S)_\alpha}(M)$

Merujuk pada Khumprapussorn *et al.* [9], suatu (R, S)-modul M disebut (R, S)-modul perkalian kiri apabila untuk setiap (R, S)-submodul N di M terdapat ideal I di R sedemikian sehingga memenuhi $N = IMS$. Selanjutnya, perkalian dari (R, S)-submodul N dan (R, S)-submodul K di M, dinotasikan dengan NK, didefinisikan sebagai $NK := (N :_R M)(K :_R M)MSS$.

Berikut diberikan suatu sifat yang merupakan syarat perlu dan syarat cukup suatu (R, S)-submodul membentuk (R, S)-submodul prima-α gabungan di dalam (R, S)-modul perkalian kiri. Sifat ini akan digunakan dalam pembuktian sifat selanjutnya dari radikal prima-α gabungan.

Proposisi 4.10. *Diberikan (R, S)-modul perkalian kiri M dengan sifat $S^2 = S$, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, serta (R, S)-submodul sejati P di M. P merupakan (R, S)-submodul prima-α gabungan di M jika dan hanya jika untuk setiap (R, S)-submodul U dan V di M dengan sifat $UV \subseteq P$ berakibat $U \subseteq P$ atau $V \subseteq P$.*

Bukti. ($\Rightarrow$). Diketahui P merupakan (R, S)-submodul prima-α gabungan di M. Diambil sebarang (R, S)-submodul U dan V di M dengan sifat $UV \subseteq P$, maka diperoleh $(U :_R M)4[(V :_R M)MS]S \subseteq P$. Karena P merupakan (R, S)-submodul prima-α gabungan di M, maka diperoleh $((V :_R M)MS + (V :_R M)MS) \subseteq P$ atau $((U :_R M) + (U :_R M)) \subseteq (P :_R M)$. Akibatnya diperoleh $(V :_R M)MS \subseteq P$ atau $(U :_R M)MS \subseteq P$. Karena M merupakan (R, S)-modul perkalian kiri, maka diperoleh $V = (V :_R M)MS$ dan $U = (U :_R M)MS$. Dengan demikian, terbukti bahwa $U \subseteq P$ atau $V \subseteq P$.

($\Leftarrow$). Akan ditunjukkan bahwa P merupakan (R, S)-submodul prima-α gabungan di M. Ekuivalen dengan menunjukkan bahwa $(P :_R M)$ merupakan ideal prima di R. Diambil sebarang ideal I dan J di R dengan $IJ \subseteq (P :_R M)$, maka diperoleh $IJMS \subseteq P$. Diperhatikan bahwa $(IMS)(JMS) = (IJ)MSS = (IJ)MS \subseteq P$. Berdasarkan hipotesis, maka diperoleh $IMS \subseteq P$ atau $JMS \subseteq P$. Dengan demikian, diperoleh $I \subseteq (P :_R M)$ atau $J \subseteq (P :_R M)$. Jadi, terbukti bahwa $(P :_R M)$ merupakan ideal prima di R sehingga terbukti bahwa P merupakan (R, S)-submodul prima-α gabungan di M.

Selanjutnya, berikut diberikan sifat radikal prima-α gabungan pada suatu (R, S)-modul perkalian kiri. Sifat ini merupakan sifat terakhir radikal prims-α gabungan yang disajikan dalam artikel ini.

Proposisi 4.11. *Diberikan (R, S)-modul perkalian kiri M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Jika K dan L merupakan (R, S)-submodul di M, maka berlaku $rad_{(R,S)_\alpha}(K \cap L) = rad_{(R,S)_\alpha}(K) \cap rad_{(R,S)_\alpha}(L)$.*

Bukti. Karena $K \cap L$ merupakan (R, S)-submodul di M, maka $K \cap L$ juga merupakan (R, S)-submodul di K dan di L. Akibatnya, diperoleh $rad_{(R,S)_\alpha}(K \cap L) \subseteq rad_{(R,S)_\alpha}(K)$ dan $rad_{(R,S)_\alpha}(K \cap L) \subseteq rad_{(R,S)_\alpha}(L)$. Dari sini diperoleh $rad_{(R,S)_\alpha}(K \cap L) \subseteq rad_{(R,S)_\alpha}(K) \cap rad_{(R,S)_\alpha}(L)$. Selanjutnya, diambil sebarang $a \in rad_{(R,S)_\alpha}(K \cap L)$. Berarti terdapat (R, S)-submodul prima-α gabungan N di $K \cap L$ sedemikian sehingga $a \notin N$. Oleh karena M merupakan (R, S)-modul perkalian kiri, maka berdasarkan Proposisi 4.10, diperoleh bahwa untuk setiap (R, S)-submodul U dan V di $K \cap L$ dengan $UV \subseteq N$, maka berakibat $U \subseteq N$ atau $V \subseteq N$. Karena U dan V merupakan (R, S)-submodul di $K \cap L$ maka U dan V juga merupakan (R, S)-submodul di K dan di L. Dengan demikian, diperoleh N merupakan (R, S)-submodul prima-α gabungan di K dan L. Akibatnya, diperoleh $a \notin rad_{(R,S)_\alpha}(K)$

dan $a \notin rad_{(R,S)_\alpha}(L)$, sehingga $a \notin rad_{(R,S)_\alpha}(K) \cap rad_{(R,S)_\alpha}(L)$. Dengan demikian, diperoleh $rad_{(R,S)_\alpha}(K) \cap rad_{(R,S)_\alpha}(L) \subseteq rad_{(R,S)_\alpha}(K \cap L)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $rad_{(R,S)_\alpha}(K \cap L) = rad_{(R,S)_\alpha}(K) \cap rad_{(R,S)_\alpha}(L)$.

5. Simpulan

Diberikan R dan S merupakan ring komutatif dan (R, S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Suatu (R, S)-submodul sejati P di M disebut (R, S)-submodul prima-α gabungan jika untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $r(m+m)S \subseteq P$ maka berakibat $r + r \in (P :_R M)$ atau $m + m \in P$. Keprimaan di dalam (R, S)-modul dapat dibawa hingga ke konsep radikalnya. Radikal prima-α gabungan dari M adalah M atau merupakan irisan dari semua (R, S)-submodul prima-α gabungan di M. Beberapa sifat utama dari radikal prima-α gabungan suatu (R, S)-modul diantaranya adalah radikal prima-α gabungan dari suatu (R, S)-submodul N termuat di dalam radikal prima-α gabungan dari (R, S)-modul M; apabila diberikan I yakni ideal di R yang termuat di dalam $(0 :_R M)$, maka radikal prima-α gabungan dari (R, S)-modul M termuat di dalam radikal prima-α gabungan dari $(R/I, S)$-modul M; radikal prima-α gabungan dari (R, S)-modul M adalah M atau merupakan irisan dari semua (R, S)-submodul prima-α gabungan minimal di M; radikal prima-α gabungan dari suatu (R, S)-modul faktor $M_{rad_{(R,S)_\alpha}(M)}$ adalah nol; serta jika diberikan dua (R, S)-submodul di dalam (R, S)-modul perkalian kiri, maka radikal prima-α gabungan dari irisan keduanya sama dengan irisan dari masing-masing radikalnya.

Daftar Pustaka

[1] Abuhlail, J.Y., 2011, Zariski Topologies for Coprime and Second Submodules, to appear in *Algebra Colloquium.*

[2] Adkins, W.A., 1992, *Algebra An Approach via Module Theory*, Springer-Verlag New York, Inc., USA.

[3] Behboodi, M., 2009, On the Prime Radical and baers Lower Nilradical of Modules, *Acta Mathematica Hungarica*, Vol. 122, No. 3, Hal. 293-306.

[4] Dauns, J., 1978, Prime Modules, *Journal fur die reine and angewandte Mathematik*, No. 298, Hal. 156-181.

[5] Haghany, A. dan Vedadi, M.R., 2005, Endoprime Modules, *Acta Math. Hungar.*, Vol. 106, No. 1-2, Hal. 89-99.

[6] Jabbar, A.K., 2013, A Generalization of Prime and Weakly Prime Submodules, *Pure Mathematical Sciences*, Vol. 2, No. 1, Hal. 1-11.

[7] Khumprapussorn, T., 2013, Left R-Prime (R, S)-Modules, *International Mathematical Forum*, Vol. 8, No. 13, Hal. 619-626.

[8] Khumprapussorn, T., 2018, On α-Prime and Weakly α-Prime Submodules, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 11, No. 3, Hal. 730-739.

[9] Khumprapussorn, T., Pianskool, S., dan Hall, M., 2012, (R, S)-Modules and Their Fully and Jointly Prime Submodules, *International Mathematical Forum*, Vol. 7, No. 33, Hal. 1631-1643

[10] Wisbauer, R., 1996, *Modules and Algebras: Bimodule Structure and Group Actions on Algebras*, Addison Wesley Longman Ltd., Essex.

[11] Yuwaningsih, D.A. dan Wijayanti, I.E., 2015, On Jointly Prime Radicals of (R, S)-Modules, *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, Vol. 21, No. 1, Hal. 25-34.

[12] Yuwaningsih, D.A., 2018, Beberapa Sifat Radikal Prima-R Kiri pada (R, S)-Modul, *Jurnal Matematika Integratif*, Vol. 14, No. 1, Hal. 1-7.