Jurnal Matematika Integratif.
Vol. 18, No.1 (2022), pp. 81–90.

p-ISSN:1412-6184, e-ISSN:2549-903
doi:10.24198/jmi.v18.n1.37640.81-90

Pullback dan *Pushout* di Kategori Modul Topologis

Yunita Septriana Anwar[1], Indah Emilia Wijayanti[2], Budi Surodjo[3], Dewi Kartika Sari[4]

[1]Mahasiswa PS Doktor Matematika, Departemen Matematika, FMIPA, Universitas Gadjah Mada; Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Muhammadiyah Mataram, yunita.septriana@mail.ugm.ac.id

[2,3,4]Departemen Matematika, FMIPA, Universitas Gadjah Mada,
ind_wijayanti@ugm.ac.id, surodjo_b@ugm.ac.id, dewiks@ugm.ac.id

Abstrak
Pullback dari dua morfisma dengan kodomain yang sama $f\colon A \to C$ dan $g\colon B \to C$ merupakan limit dari suatu diagram yang memuat f dan g. Dual dari *pullback* disebut *pushout*. *Pullback* dari morfisma $f\colon A \to C$ dan $g\colon B \to C$ di R-MOD merupakan suatu diagram yang memuat $Ker(p^*) = \{(a,b) \in A \bigoplus B \mid f(a) = g(b)\} \subset A \bigoplus B$ dengan $p^* = f\pi_1 - g\pi_2\colon A \bigoplus B \to C$, sedangkan *pushout* dari morfisma $k\colon A \to B$ dan $l\colon A \to C$ di R-MOD merupakan diagram yang memuat $Coke(q^*) = B \oplus C/Im(q^*)$ dengan $q^* = \varepsilon_1 k + \varepsilon_2 l\colon A \to B \oplus C$. Di dalam tulisan ini diselidiki eksistensi *pullback* dan *pushout* di TopR-MOD yang merupakan subkategori dari R-MOD dengan melekatkan topologi produk τ_{prod} pada *pullback* dan topologi koproduk τ_{coprod} pada *pushout*. Selanjutnya, *Pullback* dari homomorfisma kontinu $f\colon A \to C$ dan $g\colon B \to C$ di TopR-MOD merupakan diagram yang memuat $A \times_C B = \{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\} \subset A \times B$ dengan topologi ruang bagian dari τ_{prod} pada $A \times B$, sedangkan *pushout* dari homomorfisma kontinu $k\colon A \to B$ dan $l\colon A \to C$ di TopR-MOD merupakan diagram yang memuat $B \bigoplus_A C = (B \bigoplus C)/\sim$ dengan $\sim$ merupakan relasi ekuivalensi terkecil yang memuat pasangan $(k(a), l(a))$ untuk setiap $a \in A$ dan topologi koproduk τ_{coprod} pada $B \bigoplus C$.

Kata kunci: Modul Topologis, *Pullback*, *Pushout*

2000 Mathematics Subject Classification: 16W80, 18F60
Received: 04-01-2022, Revised:25-04-2022, Accepted: 09-05-2022.

Abstract
A pullback of two morphisms with a common codomain $f\colon A \to C$ *and* $g\colon B \to C$ *is the limit of a diagram consisting* f *and* g*. The dual notion of a pullback is called a pushout. A Pullback of morphisms* $f\colon A \to C$ *and* $g\colon B \to C$ *in R-MOD is a diagram that contains* $Ker(p^*) = \{(a,b) \in A \bigoplus B \mid f(a) = g(b)\} \subset A \bigoplus B$ *where* $p^* = f\pi_1 - g\pi_2\colon A \bigoplus B \to C$*, and a pushout of morphisms* $k\colon A \to B$ *and* $l\colon A \to C$ *in R-MOD is a diagram that contains* $Coke(q^*) = B \oplus C/Im(q^*)$ *where* $q^* = \varepsilon_1 k + \varepsilon_2 l\colon A \to B \oplus C$*. In this paper, we investigate existence of pullback and pushout in TopR-MOD as a subcategory of R-MOD by giving product topology* τ_{prod} *on pullback and coproduct topology* τ_{coprod} *on pushout. Furthermore, a pullback of two continuous homomorphisms* $f\colon A \to C$ *and* $g\colon B \to C$ *in TopR-MOD is a diagram that contains* $A \times_C B = \{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\} \subset A \times B$ *with the subspace topology of* τ_{prod} *on* $A \times_C B$*, and the pushout of two continuous homomorphisms* $k\colon A \to B$ *and* $l\colon A \to C$ *in TopR-MOD is a diagram that contains* $B \bigoplus_A C = (B \bigoplus C)/\sim$ *where* $\sim$ *is the smallest equivalence relation containing the pairs* $(k(a), l(a))$ *for all* $a \in A$ *and topology on* $B \bigoplus C$ *is coproduct topology* τ_{coprod}*.*

Keywords: Topological Modules, Pullback, Pushout

1. Pendahuluan

Suatu kategori terdiri dari data berikut: (1) kelas $|\mathcal{C}|$ dari objek-objek A, B, C, $\cdots$, (2) untuk setiap pasangan terurut (A, B) objek-objek di $\mathcal{C}$ (mungkin kosong), himpunan $[A, B]_{\mathcal{C}}$ disebut himpunan morfisma-morfisma dari A ke B, (3) untuk setiap triple terurut (A, B, C) dari objek-objek di $\mathcal{C}$ pemetaan: $[B, C]_{\mathcal{C}} \times [A, B]_{\mathcal{C}} \to [A, C]_{\mathcal{C}}$ disebut morfisma komposisi. Jika $g \in [B, C]_{\mathcal{C}}$, $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$, maka bayangan (f, g) ditulis sebagai gf. Data-data tersebut memenuhi aksioma: (i) Himpunan $[A, B]_{\mathcal{C}}$ terdiri dari pasangan-pasangan yang saling asing, (ii) Komposisi morfisma bersifat asosiatif, yaitu jika hg dan gf adalah komposisi morfisma, maka $(hg)f = h(gf)$, (iii) Untuk setiap objek B terdapat morfisma identitas $1_B \in [B, B]_{\mathcal{C}}$ sehingga $1_B f = f$ dan $g 1_B = g$. Kategori R-MOD adalah kategori dengan objek berupa semua R-modul kiri dengan morfisma merupakan homomorfisma modul. Sedangkan kategori TopR-MOD adalah kategori dengan objek himpunan semua R-modul kiri yang dilengkapi dengan topologi dan morfisma merupakan homomorfisma kontinu. Kategori TopR-MOD merupakan subkategori dari R-MOD.

Pullback dari homomorfisma modul $f_1\colon M_1 \to M$ dan $f_2\colon M_2 \to M$ merupakan diagram:

$$\begin{tikzcd} Ker(p^*) \arrow[r, "\pi_2'"] \arrow[d, "\pi_1'"'] & M_2 \arrow[d, "f_2"] \\ M_1 \arrow[r, "f_1"] & M \end{tikzcd}$$

Gambar 1. *Pullback* (f_1, f_2)

dimana $Ker(p^*) = \{(m_1, m_2) \in M_1 \bigoplus M_2 \mid f_1(m_1) = f_2(m_2)\} \subset M_1 \bigoplus M_2$ dengan $p^* = f_1\pi_1 - f_2\pi_2\colon M_1 \bigoplus M_2 \to M$, sedangkan *pushout* dari homomorfisma modul $g_1\colon N \to N_1$ dan

$g_2 \colon N \to N_2$ di dalam kategori R-MOD merupakan diagram:

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{g_2} & N_2 \\ {\scriptstyle g_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle -\overline{\varepsilon}_2} \\ N_1 & \xrightarrow{\overline{\varepsilon}_1} & Coke(q^*) \end{array}$$

Gambar 2. *Pushout* (g_1, g_2)

dimana $Coke(q^*) = N_1 \oplus N_2/Im(q^*)$ dengan $q^* = \varepsilon_1 g_1 + \varepsilon_2 g_2 \colon N \to N_1 \oplus N_2$. *Pullback* dan *pushout* di dalam kategori R-MOD banyak digunakan dalam pembuktian sifat-sifat yang dilengkapi dengan barisan eksak pendek. Misalnya, di dalam pengkajian karakteristik modul injektif, *pushout* digunakan dalam pembuktian modul injektif sebagai penjumlah langsung bagi setiap modul yang memuatnya.

Penggabungan suatu struktur aljabar dengan topologi dikenal sebagai aljabar topologis. Aljabar topologis merupakan struktur aljabar sekaligus ruang topologis dengan operasi yang terlibat merupakan fungsi kontinu. Grup topologis pertama kali dikenalkan oleh Sophus Lie yang membuktikan bahwa grup topologis sebagai transformasi dari manifol ke dirinya sendiri, yang kemudian dikenal sebagai grup Lie. Kajian pada grup topologis kemudian berkembang pada struktur lain di dalam aljabar termasuk struktur ring, ruang vektor, maupun modul. Di dalam pengkajian lebih lanjut pada modul topologis, diperlukan struktur *pullback* dan *pushout* di kategori TopR-MOD dalam pembuktian sifat modul topologis yang melibatkan barisan eksak pendek. Eksistensi *pullback* dan *pushout* di dalam kategori R-MOD telah dikaji oleh Wisbauer [11], tetapi belum terdapat pengkajian eksistensi *pullback* dan *pushout* di dalam kategori TopR-MOD. Selanjutnya, di dalam tulisan ini akan dikaji *pullback* dan *pushout* di dalam kategori TopR-MOD.

2. Landasan Teori

Untuk membangun *pullback* dan *pushout* pada kategori TopR-MOD diperlukan beberapa teori pendukung sebagai berikut.

2.1. Topologi.

Definisi 2.1. *([8]) Suatu topologi pada himpunan X merupakan koleksi subset X, dinotasikan τ, yang memenuhi:*

(1) $\emptyset$ dan X termuat dalam τ.
(2) Gabungan subset-subset X di τ juga termuat dalam τ.
(3) Irisan sebanyak berhingga subset-subset X di τ juga termuat dalam τ.

Elemen pada τ disebut himpunan terbuka dan sistem (X, τ) disebut ruang topologis. Koleksi semua himpunan bagian X merupakan topologi pada X yang disebut dengan topologi diskrit, sedangkan topologi yang hanya memuat X dan $\emptyset$ disebut topologi indiskrit. Misalkan diberikan $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ merupakan ruang-ruang topologis. Fungsi $f \colon X \to Y$ dikatakan kontinu jika untuk setiap himpunan terbuka V subset Y, berlaku $f^{-1}(V)$ merupakan himpunan terbuka di X. Misalkan X suatu struktur aljabar dan pada X dilekatkan suatu topologi τ. Jika operasi pada X merupakan fungsi kontinu terhadap topologi τ, maka (X, τ) disebut aljabar topologis.

2.2. **Topologi Produk.** Diberikan koleksi R-modul $\{M_i\}_{i \in I}$. Pasangan $(\prod_{i \in I} M_i, \{\pi_i\}_{i \in I})$ merupakan produk dari $\{M_i\}_{i \in I}$ di kategori R-MOD, dimana $\prod_{i \in I} M_i = \{(m_i)_{i \in I} \mid m_i \in M_i\}$ dan proyeksi kanonik $\pi_i \colon \prod_{i \in I} M_i \to M_i$, $\pi_i((m_i)_{i \in I}) = m_i$. Selanjutnya, misalkan $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ koleksi ruang topologis. Fungsi $\pi_\beta \colon \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \to X_\alpha$ yang didefinisikan sebagai $\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha \in J}) = x_\beta$ disebut sebagai fungsi proyeksi yang bersesuaian dengan index β. Misalkan $\mathcal{S} = \bigcup_{\beta \in J} \mathcal{S}_\beta$ dengan $\mathcal{S}_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) | U_\beta$ himpunan terbuka di $X_\beta\}$. Topologi untuk produk $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ dari $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ merupakan topologi yang dibangun oleh subbasis $\mathcal{S}$ yang disebut topologi produk dan dinotasikan dengan τ_{prod}. Selanjutnya, jika $\{(U_\lambda, \tau_\lambda)\}_\wedge$ adalah koleksi R-modul topologis, maka produk $(\prod_\wedge U_\lambda, \tau_{prod})$ dari $\{(U_\lambda, \tau_\lambda)\}_\wedge$ membentuk struktur R-modul topologis seperti dinyatakan dalam proposisi berikut.

Proposisi 2.2. *([5]) Produk $\prod_\wedge U_\lambda$ dari koleksi R-modul topologis $\{(U_\lambda, \tau_\lambda)\}_\wedge$ dengan topologi produk τ_{prod} merupakan R-modul topologis.*

Selanjutnya, untuk menentukan produk dari koleksi R-modul topologis $\{(M_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ diperlukan proposisi-proposisi berikut.

Proposisi 2.3. *([8]) Diberikan koleksi ruang topologis $\{(M_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ dan (H, τ_H) merupakan ruang topologis. Jika fungsi $f\colon H \to \prod_{i\in I} M_i$ yang didefinisikan sebagai $f(a) = (f_i(a))_{i\in I}$, dengan $f_i\colon H \to M_i$ untuk setiap $i \in I$ dan $\prod_{i\in I} M_i$ produk pada $\{M_i\}_{i\in I}$ dengan topologi produk τ_{prod}, maka fungsi f merupakan fungsi kontinu jika dan hanya jika f_i merupakan fungsi kontinu untuk setiap $i \in I$.*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & \prod_{i\in I} M_i \arrow[d, "\pi_i"] \\ & M_i \end{tikzcd}$$

Gambar 3. Produk R-modul topologis $\{(M_i, \tau_i)\}_{i\in I}$

Proposisi 2.4. *([8]) Diberikan $(\prod_{i\in I} M_i, \tau_1)$ modul topologis sedemikian hingga π_i merupakan fungsi kontinu untuk setiap $i \in I$. Jika untuk setiap R-modul topologis (H, τ) dan untuk setiap koleksi homomorfisma modul kontinu $\{f_i\colon H \to M_i\}_{i\in I}$ menyebabkan $f\colon H \to \prod_{i\in I} M_i$, $a \mapsto (f_i(a))_{i\in I}$ merupakan fungsi kontinu, maka $\tau_1 = \tau_{prod}$.*

Produk di dalam kategori TopR-MOD merupakan pasangan $(\prod_{i\in I} M_i, \tau_{prod}, \{\pi_i\}_{i\in I})$ seperti diberikan pada proposisi berikut.

Proposisi 2.5. *([11]) Diberikan $\{(M_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ koleksi R-modul topologis dan (H, τ) merupakan R-modul topologis. Jika untuk setiap koleksi homomorfisma kontinu $\{f_i\colon H \to M_i\}_{i\in I}$ ada dengan tunggal $f\colon H \to \prod_{i\in I} M_i$ sedemikian hingga $f_i = \pi_i f$ untuk setiap $i \in I$, maka $(\prod_{i\in I} M_i, \tau_{prod}, \{\pi_i\}_{i\in I})$ merupakan produk pada kategori TopR-MOD.*

2.3. **Topologi Koproduk.** Jika $\{M_i\}_{i\in I}$ merupakan koleksi R-modul, maka $(\bigoplus_{i\in I} M_i, \{\varepsilon_i\}_{i\in I})$ merupakan koproduk dari $\{M_i\}_{i\in I}$, dengan $\bigoplus_{i\in I} M_i = \{(m_i)_{i\in I} \mid m_i \in M_i$ dengan $m_i \neq 0$ untuk sebanyak berhingga $i\}$ dan $\varepsilon_i\colon M_i \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ merupakan injeksi kanonik dengan $\varepsilon_i(m_i) = (n_j)_{j\in I}$, dan $n_j = m_i$ untuk $i = j$, serta $n_j = 0$ untuk $i \neq j$, seperti dinyatakan pada proposisi berikut.

Proposisi 2.6. *([5]) Diberikan $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\wedge}$ merupakan koleksi R-modul dan H merupakan R-modul. Jika untuk setiap koleksi homomorfisma modul $\{f_\lambda\colon M_\lambda \to H\}_{\lambda\in\wedge}$, terdapat dengan tunggal homomorfisma $f\colon \bigoplus_{\lambda\in\wedge} M_\lambda \to H$ sedemikian hingga $f_\lambda = f\varepsilon_\lambda$ untuk setiap $\lambda \in \wedge$, maka $(\bigoplus_{\lambda\in\wedge} M_\lambda, \{\varepsilon_\lambda\}_{\lambda\in\wedge})$ merupakan koproduk di R-MOD.*

Untuk mendefinisikan topologi koproduk dari koleksi R-modul topologis $\{(M_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ diperlukan beberapa teorema dan proposisi berikut.

Teorema 2.7. *([5]) Himpunan semua topologi pada himpunan M membentuk latice lengkap terhadap relasi inklusi $\subseteq$.*

Diberikan $\{(M_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ adalah koleksi R-modul topologis dan $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ koproduk $\{(M_i, \tau_i)\}_{i\in I}$. Misalkan $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}_i\}$ koleksi semua topologi pada M. Paling tidak terdapat topologi diskrit dan topologi indiskrit sebagai topologi untuk M. Selain itu, topologi ruang bagian terhadap topologi produk dari $\{(M_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ juga merupakan topologi untuk M sebab koproduk $\bigoplus_{i\in I} M_i$ merupakan submodul dari produk $\prod_{i\in I} M_i$.

Misalkan τ adalah suprimum dari semua topologi yang mengakibatkan M menjadi R-modul topologis, yaitu τ topologi yang dibangun oleh subbasis $\bigcup_{i\in J} \mathcal{T}_i$. Akan ditunjukkan (M, τ) merupakan modul topologis, yaitu dengan menunjukkan operasi-operasi pada M:

$$\begin{aligned} &\mu\colon M \times M \to M, && (x, y) \mapsto x + y \\ &\nu\colon M \to M, && x \mapsto -x \\ &\eta\colon R \times M \to M, && (r, x) \mapsto rx \end{aligned}$$

merupakan fungsi-fungsi kontinu. Misalkan $\mathcal{S}$ subbasis yang membangun topologi τ dan $V \in \mathcal{S}$. Karena $\mathcal{S} = \bigcup_{\mathcal{T}_i\in\mathcal{A}} \mathcal{T}_i$, maka $V \in \mathcal{T}_i$ untuk suatu $i \in I$. Karena μ fungsi kontinu terhadap topologi $\mathcal{T}_i$, maka $\mu^{-1}(V)$ merupakan himpunan terbuka di $(M, \mathcal{T}_i)\times(M, \mathcal{T}_i)$. Mengingat $\mathcal{T}_i \subseteq \tau$, maka $\mu^{-1}(V)$ juga himpunan terbuka terhadap topologi produk di $(M, \tau) \times (M, \tau)$. Dengan demikian, μ merupakan fungsi kontinu terhadap topologi τ. Dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan kekontinuan fungsi-fungsi ν dan η. Lebih lanjut, τ dinotasikan sebagai τ_{coprod} sebagai topologi untuk $\bigoplus_{i\in I} M_i$ seperti dinyatakan dalam definisi berikut.

Definisi 2.8. *([5]) Topologi koproduk, dinotasikan dengan τ_{coprod}, adalah suprimum dari semua topologi pada R-modul $\bigoplus_{\lambda\in\wedge} M_\lambda$ sedemikian hingga untuk setiap $i \in I$ berlaku ε_i merupakan fungsi kontinu.*

Selanjutnya, akan ditunjukkan $(\bigoplus_{\lambda\in\wedge} M_\lambda, \tau_{coprod})$ merupakan koproduk di kategori TopR-MOD. Sebelumnya diperlukan beberapa proposisi berikut.

Proposisi 2.9. *([5]) Diberikan $\{(M_\lambda, \tau_\lambda)\}_{\lambda\in\wedge}$ koleksi R-modul topologis dan modul topologis (H, τ). Untuk setiap koleksi homomorfisma kontinu $\{f_\lambda\colon M_\lambda \to (H, \tau)\}_{\lambda\in\wedge}$, homomorfisma kontinu $f\colon (\bigoplus_{\lambda\in\wedge} M_\lambda, \tau_{coprod}) \to (H, \tau)$ dengan $f = \sum_{\lambda\in\wedge} f_\lambda \pi_\lambda$, merupakan homomorfisma kontinu jika dan hanya jika setiap f_λ homomorfisma kontinu untuk setiap λ.*

Proposisi 2.10. *([5]) Diberikan $(\bigoplus_{\lambda\in\wedge} M_\lambda, \tau_1)$ merupakan modul topologis sedemikian hingga ε_λ merupakan fungsi kontinu. Jika untuk setiap modul topologis (H, τ) dan untuk setiap koleksi homomorfisma kontinu $\{f_\lambda\colon (M_\lambda, \tau_\lambda) \to (H, \tau)\}_{\lambda\in\wedge}$ mengakibatkan $f\colon (\bigoplus_{\lambda\in\wedge} M_\lambda, \tau_{coprod}) \to (H, \tau)$ kontinu, $f = \sum_\lambda f_\lambda \pi_\lambda$, maka $\tau_1 = \tau_{coprod}$.*

Akibat dari Proposisi 2.9 dan Proposisi 2.10, diperoleh koproduk di dalam kategori TopR-MOD sebagai berikut.

Akibat 2.11. *([5]) Diberikan $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\wedge}$ koleksi R-modul topologis dan H merupakan R-modul topologis. Jika untuk setiap koleksi homomorfisma kontinu $\{f_\lambda\colon M_\lambda \to H\}_{\lambda\in\wedge}$, terdapat dengan tunggal homomorfisma kontinu $f\colon \bigoplus_{\lambda\in\wedge} M_\lambda \to H$ sedemikian hingga $f_\lambda = f\varepsilon_\lambda$ untuk setiap $\lambda \in \wedge$, maka $(\bigoplus_{\lambda\in\wedge} M_\lambda, \tau_{coprod})$ merupakan koproduk dari $\{(M_\lambda, \tau_\lambda)\}$ pada kategori TopR-MOD.*

2.4. ***Pullback* dan *Pushout* dalam Teori Kategori.** Berikut diberikan definisi *equalizer*, *coequalizer*, *pullback*, dan *pushout* di dalam Teori Kategori yang digunakan dalam pengkajian *pullback* dan *pushout* di dalam kategori TopR-MOD.

Definisi 2.12. *([2]) Diberikan dua morfisma $f, g\colon A \to B$ di dalam kategori $\mathcal{C}$. Equalizer dari f dan g adalah pasangan (K, i) dengan K suatu objek di $\mathcal{C}$ dan $i\colon K \to A$ morfisma sedemikian hingga $fi = gi$, dan untuk setiap pasang (M, m) dengan M adalah objek di $\mathcal{C}$*

dan $m\colon M \to A$ morfisma di $\mathcal{C}$ sedemikian hingga $fm = gm$, maka terdapat dengan tunggal morfisma $n\colon M \to K$ sehingga $m = in$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, dotted, "n"'] \arrow[dr, "m"] & & \\ K \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Gambar 4. Equalizer (f, g)

Definisi 2.13. *([2]) Diberikan dua morfisma $f, g\colon A \to B$ di dalam kategori $\mathcal{C}$. Coequalizer dari f dan g adalah pasangan (C, q) dengan C suatu objek di $\mathcal{C}$ dan $q\colon B \to C$ morfisma sedemikian hingga $qf = qg$, dan untuk setiap pasang (Y, y) dimana Y adalah objek di $\mathcal{C}$ dan $y\colon B \to Y$ morfisma di $\mathcal{C}$ sedemikian hingga $yf = yg$, maka terdapat dengan tunggal morfisma $w\colon C \to Y$ sehingga $y = wq$.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "y"'] & C \arrow[d, dotted, "w"] \\ & & Y \end{tikzcd}$$

Gambar 5. Coequalizer (f, g)

Definisi 2.14. *([2]) Diberikan $\psi\colon X \to Z$ dan $\varphi\colon Y \to Z$ morfisma-morfisma di dalam kategori $\mathcal{C}$. Diagram komutatif:*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "p_Y"'] & X \arrow[d, "\psi"] \\ Y \arrow[r, "\varphi"] & Z \end{tikzcd}$$

Gambar 6. Pullback (ψ, φ)

disebut pullback untuk (ψ, φ) jika untuk setiap pasangan morfisma-morfisma $\alpha_X\colon V \to X$ dan $\alpha_Y\colon V \to Y$ dimana $\psi\alpha_X = \varphi\alpha_Y$, terdapat dengan tunggal morfisma $\alpha\colon V \to U$ sedemikian hingga $\alpha_X = p_X\alpha$ dan $\alpha_Y = p_Y\alpha$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[dr, dotted, "\alpha"] \arrow[drr, bend left, "\alpha_X"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha_Y"'] & & \\ & U \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "p_Y"'] & X \arrow[d, "\psi"] \\ & Y \arrow[r, "\varphi"] & Z \end{tikzcd}$$

Gambar 7. Diagram komutatif pada pullback (ψ, φ)

Definisi 2.15. *([2]) Diberikan $\psi\colon X \to Y$ dan $\varphi\colon X \to Z$ morfisma-morfisma di dalam kategori $\mathcal{C}$. Diagram komutatif:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "\iota_Y"] \\ Z \arrow[r, "\iota_Z"] & W \end{tikzcd}$$

Gambar 8. Pushout untuk (ψ, φ)

disebut pushout untuk (ψ, φ) jika untuk setiap pasangan morfisma-morfisma $\beta_Y\colon Y \to U$ dan $\beta_Z\colon Z \to U$ dimana $\beta_Y\psi = \beta_Z\varphi$, terdapat dengan tunggal morfisma $\beta\colon W \to U$ sedemikian *hingga* $\beta_Y = \beta\iota_Y$ *dan* $\beta_Z = \beta\iota_Z$*.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "\iota_Y"] \arrow[ddr, bend left, "\beta_Y"] & \\
Z \arrow[r, "\iota_Z"] \arrow[drr, bend right, "\beta_Z"'] & W \arrow[dr, dashed, "\beta"] & \\
 & & U
\end{tikzcd}$$

Gambar 9. Diagram komutatif pada pushout (ψ, φ)

3. Hasil dan Pembahasan

Penentuan *pullback* dan *pushout* di TopR-MOD memanfaatkan eksistensi *pullback* dan *pushout* di R-MOD dengan mencari topologi yang bersesuaian pada struktur yang terlibat di dalam *pullback* dan *pushout*. Eksistensi *pullback* di TopR-MOD dari dua homomorfisma kontinu $\psi\colon X \to Z$ dan $\varphi\colon Y \to Z$ memanfaatkan topologi ruang bagian untuk $X \times_Z Y$ dari produk $X \times Y$ dengan topologi produk τ_{prod}. Pasangan $(X \times_Z Y, i)$ dengan inklusi $i\colon X \times_Z Y \to X \times Y$, merupakan *equalizer* dari $(p^*, 0)$, dengan $p^* = \psi\pi_1 - \varphi\pi_2\colon X \times Y \to Z$ dan proyeksi $\pi_1\colon X \times Y \to X$, $\pi_2\colon X \times Y \to Y$, yang menjamin ketunggalan homomorfisma kontinu pada definisi *pullback*.

Selanjutnya, eksistensi *pushout* di TopR-MOD dari dua homomorfisma kontinu $\psi\colon X \to Y$ dan $\varphi\colon X \to Z$ memanfaatkan ruang faktor $Y \bigoplus_X Z = (Y \bigoplus Z)/\sim$ dengan $\sim$ merupakan relasi ekuivalensi yang dibangun oleh $(\psi(x), \varphi(x))$ untuk setiap $x \in X$, dan τ_{coprod} topologi koproduk untuk $Y \bigoplus Z$. Pasangan $(Y \bigoplus_X Z, q)$ dengan $q\colon Y \bigoplus Z \to Y \bigoplus_X Z$, merupakan *coequalizer* dari $(q^*, 0)$ dengan $q^* = \varepsilon_Y\psi + \varepsilon_Z\varphi\colon X \to Y \bigoplus Z$ dan homomorfisma injeksi $\varepsilon_Y\colon Y \to Y \bigoplus Z$, $\varepsilon_Z\colon Z \to Y \bigoplus Z$, yang menjamin ketunggalan homomorfisma kontinu pada definisi *pushout*. Dengan memanfaatkan *pullback* dan *pushout* di R-MOD, topologi produk, dan topologi koproduk, dapat dibangun *pullback* dan *pushout* di TopR-MOD.

3.1. Pullback di Kategori Modul Topologis.

Eksistensi *pullback* di dalam kategori TopR-MOD disajikan dalam proposisi berikut.

Proposisi 3.1. *Diberikan modul topologis* (X, τ_X), (Y, τ_Y), *dan* (Z, τ_Z). *Jika untuk setiap pasangan homomorfisma kontinu* (ψ, φ), *dengan* $\psi\colon X \to Z$ *dan* $\varphi\colon Y \to Z$, *maka terdapat dengan tunggal pullback untuk* (ψ, φ)*:*

$$\begin{tikzcd}
X \times_Z Y \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "p_Y"'] & X \arrow[d, "\psi"] \\
Y \arrow[r, "\varphi"] & Z
\end{tikzcd}$$

Gambar 10. Pullback di kategori TopR-MOD

dengan $X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid \psi(x) = \varphi(y)\}$.

Bukti. Diberikan homomorfisma kontinu $\psi\colon X \to Z$ dan $\varphi\colon Y \to Z$. Dibentuk $p^* = \psi\pi_1 - \varphi\pi_2\colon X \times Y \to Z$ dengan proyeksi $\pi_1\colon X \times Y \to X$, $\pi_2\colon X \times Y \to Y$. Pada $X \times Y$ dikenakan topologi τ_{prod}. Didefinisikan $X \times_Z Y$ dengan topologi pada $X \times_Z Y$ adalah topologi relatif terhadap τ_{prod}:

$$X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid \psi(x) = \varphi(y)\} \subset X \times Y$$

Misalkan terdapat (V, α_X, α_Y) dengan $\alpha_X\colon V \to X$ dan $\alpha_Y\colon V \to Y$ yang memenuhi $\psi\alpha_X = \varphi\alpha_Y$.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[dr, dotted, "\alpha"] \arrow[drr, bend left, "\alpha_X"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha_Y"'] & & \\
& X \times_Z Y \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "p_Y"'] & X \arrow[d, "\psi"] \\
& Y \arrow[r, "\varphi"] & Z
\end{tikzcd}$$

Gambar 11. Diagram komutatif *pullback* di kategori TopR-MOD

Didefinisikan:

$$\alpha^*\colon V \to X \times Y$$

dengan $\alpha^*(v) = (\alpha_X(v), \alpha_Y(v))$. Jika $A \times B$ himpunan terbuka di $X \times Y$, diperoleh $\alpha^{*-1}(A \times B) = \alpha_X^{-1}(B) \cap \alpha_Y^{-1}(B)$ merupakan himpunan terbuka di V. Sehingga diperoleh α^* merupakan homomorfisma kontinu. Selanjutnya,

$$p^*\alpha^* = (\psi\pi_1 - \varphi\pi_2)\alpha^* = \psi\pi_1\alpha^* - \varphi\pi_2\alpha^* = \psi\alpha_X - \varphi\alpha_Y = 0$$

Karena $p^*\alpha^* = 0$ dan $p^*i = 0$, maka $(X \times_Z Y, i)$ merupakan *equalizer* dari $(p^*, 0)$. Akibatnya, terdapat dengan tunggal $\alpha\colon V \to X \times_Z Y$ sedemikian hingga $\alpha^* = i\alpha$.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[d, dotted, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha^*"] & & \\
X \times_Z Y \arrow[r, "i"] & X \times Y \arrow[r, "p^*"] & Z
\end{tikzcd}$$

Gambar 12. *Equalizer* dari $(p^*, 0)$

Karena i dan α^* merupakan homomorfisma kontinu, maka α^* juga merupakan homomorfisma kontinu. Tinggal ditunjukkan $\alpha_X = p_X\alpha$ dan $\alpha_Y = p_Y\alpha$. Perhatikan bahwa: $\alpha_X = \pi_1\alpha^* = \pi_1(i\alpha) = (\pi_1 i)\alpha = p_X\alpha$ dan $\alpha_Y = \pi_2\alpha^* = \pi_2(i\alpha) = (\pi_2 i)\alpha = p_Y\alpha$, sehingga diperoleh $\alpha_X = p_X\alpha$ dan $\alpha_Y = p_Y\alpha$. Dengan demikian, diagram

$$\begin{tikzcd}
X \times_Z Y \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "p_Y"'] & X \arrow[d, "\psi"] \\
Y \arrow[r, "\varphi"] & Z
\end{tikzcd}$$

Gambar 13. *Pullback* (ψ, φ)

merupakan *pullback* dari $\psi\colon X \to Z$ dan $\varphi\colon Y \to Z$ dimana $X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid \psi(x) = \varphi(y)\}$ dengan topologi pada $X \times_Z Y$ adalah topologi relatif terhadap τ_{prod}.

3.2. **Pushout di Kategori Modul Topologis.** Eksistensi *pushout* di dalam kategori TopR-MOD disajikan dalam proposisi berikut

Proposisi 3.2. *Diberikan modul topologis (X, τ_X), (Y, τ_Y), dan (Z, τ_Z). Jika untuk setiap pasangan homomorfisma kontinu (ψ, φ) dengan $\psi\colon X \to Y$ dan $\varphi\colon X \to Z$, maka terdapat dengan tunggal pushout untuk (ψ, φ):*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "\iota_Y"] \\
Z \arrow[r, "\iota_Z"] & Y \bigoplus_X Z
\end{tikzcd}$$

Gambar 14. Pushout di kategori TopR-MOD

dimana $Y \bigoplus_X Z = (Y \bigoplus Z)/\sim$ dengan $\sim$ relasi ekuivalensi yang dibangun oleh $(\psi(x), \varphi(x))$ untuk setiap $x \in X$ dan topologi pada $Y \bigoplus_X Z$ adalah τ_{coprod}.

Bukti. Diberikan homomorfisma kontinu $\psi\colon X \to Y$ dan $\varphi\colon X \to Z$. Dibentuk $q^* = \varepsilon_Y\psi + \varepsilon_Z\varphi\colon X \to Y \bigoplus Z$ dengan homomorfisma injeksi $\varepsilon_Y : Y \to Y \bigoplus Z$ dan $\varepsilon_Z : Z \to Y \bigoplus Z$. Didefinisikan

$$Y \bigoplus_X Z = (Y \bigoplus Z)/\sim$$

dimana $\sim$ relasi ekuivalensi yang dibangun oleh $(\psi(x), \varphi(x))$ untuk setiap $x \in X$ dan topologi faktor pada $(Y \bigoplus Z)/\sim$. Misalkan terdapat (U, β_Y, β_Z) dengan $\beta_Y : Y \to U$ dan $\beta_Z : Z \to U$ yang memenuhi $\beta_Y\psi = \beta_Z\varphi$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "\iota_Y"] \arrow[ddr, bend left, "\beta_Y"] & \\
Z \arrow[r, "\iota_Z"] \arrow[drr, bend right, "\beta_Z"'] & Y \bigoplus_X Z \arrow[dr, dashed, "\beta"] & \\
 & & U
\end{tikzcd}$$

Gambar 15. Diagram komutatif *pushout* di kategori TopR-MOD

Didefinisikan:

$$\beta^* = (\beta_Z\pi_Z - \beta_Y\pi_Y)\colon Y \bigoplus Z \to U$$

Perhatikan bahwa: $\beta^* q^* = (\beta_Z\pi_Z - \beta_Y\pi_Y)(\varepsilon_Y\psi + \varepsilon_Z\varphi) = \beta_Z\pi_Z\varepsilon_Y\psi + \beta_Z\pi_Z\varepsilon_Z\varphi - \beta_Y\pi_Y\varepsilon_Y\psi - \beta_Y\pi_Y\varepsilon_Z\varphi = \beta_Z\varphi - \beta_Y\psi = 0$. Karena $\beta^* q^* = 0$ dan $qq^* = 0$, maka $(Y \bigoplus_X Z, q)$ merupakan *coequalizer* dari $(q^*, 0)$. Akibatnya, terdapat dengan tunggal $\beta\colon Y \bigoplus_X Z \to U$ sedemikian hingga $\beta^* = \beta q$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "q^*"] & Y \bigoplus Z \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "\beta^*"'] & Y \bigoplus_X Z \arrow[d, dotted, "\beta"] \\
 & & U
\end{tikzcd}$$

Gambar 16. *Coequalizer* dari $(q^*, 0)$

Homomorfisma β merupakan fungsi kontinu memanfaatkan kekontinuan β^* dan q. Perhatikan bahwa: $\beta_Y = \beta^*\varepsilon_Y = (\beta q)\varepsilon_Y = \beta(q\varepsilon_Y) = \beta\iota_Y$ dan $\beta_Z = \beta^*\varepsilon_Z = (\beta q)\varepsilon_Z = \beta(q\varepsilon_Z) = \beta\iota_Z$. Dengan demikian, diagram:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "\iota_Y"] \\
Z \arrow[r, "\iota_Z"] & Y \bigoplus_X Z
\end{tikzcd}$$

Gambar 17. *Pushout* untuk (ψ, φ)

merupakan pushout untuk $\psi\colon X \to Y$ dan $\varphi\colon X \to Z$ dimana $Y \bigoplus_X Z = (Y \bigoplus Z)/\sim$ dengan $\sim$ relasi ekuivalensi yang dibangun oleh $(\psi(x), \varphi(x))$ untuk setiap $x \in X$ dan topologi pada $Y \bigoplus Z$ adalah τ_{coprod}.

4. Simpulan

Pullback di kategori TopR-MOD dari homomorfisma kontinu $\psi\colon X \to Z$ dan $\varphi\colon Y \to Z$ adalah diagram:

$$\begin{tikzcd}
X \times_Z Y \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "p_Y"'] & X \arrow[d, "\psi"] \\
Y \arrow[r, "\varphi"] & Z
\end{tikzcd}$$

Gambar 18. *Pullback* (ψ, φ)

dengan $X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid \psi(x) = \varphi(y)\}$ dan topologi ruang bagian untuk $X \times_Z Y$ dari τ_{prod} pada $X \times Y$. Selanjutnya, *pushout* di kategori TopR-MOD dari homomorfisma kontinu $\psi \colon X \to Y$ dan $\varphi \colon X \to Z$ adalah diagram:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "\iota_Y"] \\ Z \arrow[r, "\iota_Z"] & Y \bigoplus_X Z \end{tikzcd}$$

Gambar 19. *Pushout* (ψ, φ)

dengan $Y \bigoplus_X Z = (Y \bigoplus Z)/\sim$ dengan $\sim$ relasi ekuivalensi yang dibangun oleh $(\psi(x), \varphi(x))$ untuk setiap $x \in X$ dan topologi pada $Y \bigoplus Z$ adalah τ_{coprod}.

Pullback dan *pushout* di kategori TopR-MOD merupakan perumuman dari *pullback* dan *pushout* di kategori R-MOD dengan melekatkan topologi diskrit pada setiap modul yang terlibat di dalam *pullback* dan *pushout*. Lebih lanjut, penerapan *pullback* dan *pushout* di kategori TopR-MOD pada pembuktian karakteristik modul injektif relatif topologis maupun modul proyektif relatif topologis yang melibatkan barisan eksak pendek.

Daftar Pustaka

[1] Arnautov, V.I., Glavatsky, S.T., dan Mikhalev, A.V., 1996, *Introduction to The Theory of Topological Rings and Modules*, Marcel Dekker, New York.

[2] Borceux, F., 1994., *Handbook of Categorical Algebra 1 Basic Category Theory*, Cambridge University Press, New York.

[3] Crossley, M.D., 2010, *Essential Topology*, Springer-Verlag, New York.

[4] Engelking, R., 1989, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, vol.6, Helderman Verlag, Berlin.

[5] Enns, C., 2009, *Pure Embeddings and Pure-Injectivity for Topological Modules*, Thesis, University of Manitoba.

[6] Goldman, O., dan Sah, C.H., 1969, Locally Compact Rings of Special Type, *Journal of Algebra*, hal.363 - 454.

[7] Higgins, P.J., 1977, Coproducts of Topological Abelian Groups, *Journal of Algebra* 44, pp. 152 - 159.

[8] Munkres, J.R., 2000., *Topology A First Course*, Prentice-Hall, New Jersey.

[9] Nickolas, P., 2002, Coproducts of Abelian Topological Groups, *Topology and its Applications* 120, pp. 403 - 426.

[10] Ursul, M., 2002., *Topological Rings Satisfying Compactness Conditions*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[11] Wisbauer, R., 1991., *Foundation of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach, Philadelphia, USA.