Jurnal Matematika Integratif. p-ISSN:1412-6184, e-ISSN:2549-903
Vol. 20, No. 1 (2024), pp. 1–10. doi:10.24198/jmi.v20.n1.38055.1-10

Eigenmode dari Suatu Matriks Tak Tereduksi atas Aljabar Max-Plus Interval

Yusuf Ibrahim Abdallah[1], Ema Carnia[2], Asep K. Supriatna[2]

[1]Mahasiswa Program Studi S-2 Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Padjadjaran
[2] Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Padjadjaran
Jl. Raya Bandung Sumedang KM 21 Jatinangor Sumedang 45363

Email: yusuf17007@mail.unpad.ac.id, ema.carnia@unpad.ac.id, aksupriatna@gmail.com

Abstrak
Artikel ini bertujuan untuk membahas aljabar max-plus interval yang berperan dalam penyelesaian masalah penjadwalan dengan waktu aktivitas fuzzy, matriks atas aljabar max-plus interval memiliki tiga unsur, antara lain: nilai eigen, vektor eigen, dan eigenmode. Perbedaan elemen-elemen dalam matriks berupa interval-interval tertutup yang disebut matriks interval, dan aljabar max plus interval adalah himpunan yang terdiri dari interval tertutup yang dilengkapi dengan operasi biner $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$, pembahasannya berkaitan dengan memenuhi sifat-sifat operasi pada $I(\mathbb{R})_{\max}$, serta eksistensi dan sifat eigenmode pada matriks tak tereduksi pada aljabar max-plus interval pada $I(\mathbb{R})_{\max}$. Hasil yang diperoleh adalah ekivalensi sifat operasi pada $I(\mathbb{R})_{\max}$, kemudian dapat menunjukkan eksistensi eigenmode, dan sifat eigenmode dari matriks tak tereduksi tidak tunggal.
Kata kunci: Aljabar Max-Plus Interval, Matriks Interval, Matriks Tak Tereduksi, Nilai Eigen, Vektor Eigen, Eigenmode.

Abstract
This paper aims to discuss the interval max-plus algebra plays a role in solving scheduling problems with fuzzy activity time, the matrix above interval max-plus algebra has three components, including: eigenvalues, eigenvectors, and eigenmodes. The difference between are the elements in the matrix is an interval closed called an interval matrix (IM), and interval max plus algebra is a set consisting of closed intervals equipped with binary operations $\overline{\oplus}$ and $\overline{\otimes}$, the discussion is concerned with satisfying the properties of operations on $I(\mathbb{R})_{\max}$, the existence and properties of eigenmodes on an irreducible matrix on the interval max-plus algebraic on $I(\mathbb{R})_{\max}$. The results obtained are the equivalence of the operating properties at $I(\mathbb{R})_{\max}$, which can indicate the presence of eigenmodes, and the eigenmodes properties of the irreducible matrix are not unique.

Keywords: *Interval Max-Plus Algebra, Interval Matrix, Irreducible Matrix, Eigenvalue, Eigenvector, Eigenmodes.*

2000 Mathematics Subject Classification: 15A80
Received: 27-01-2022, accepted: 14-06-2024.

1. Pendahuluan

Dalam ilmu matematika dan rekayasa sistem, pemahaman tentang eigenmode dari matriks tak tereduksi atas aljabar Max-Plus Interval memiliki implikasi yang signifikan dalam berbagai konteks aplikasi. Konsep eigenmode menjadi sentral dalam menganalisis sistem dinamis yang kompleks, dimana matriks tak tereduksi seringkali muncul sebagai model yang sesuai. Artikel ini bertujuan untuk menjelaskan secara rinci tentang apa itu eigenmode dari suatu matriks tak tereduksi dalam konteks aljabar Max-Plus Interval.

Pertama-tama, perlu dipahami bahwa matriks tak tereduksi adalah matriks yang tidak dapat diubah menjadi bentuk blok-blok diagonal melalui transformasi linier tertentu. Di sisi lain, aljabar Max-Plus Interval merupakan aljabar yang melibatkan operasi maksimum dan penambahan pada interval bilangan real. Gabungan dari kedua konsep ini menciptakan kerangka kerja analisis yang kuat untuk sistem dinamis nonlinier.

Eigenmode dari matriks tak tereduksi atas aljabar Max-Plus Interval merujuk pada pola-pola gerak atau osilasi yang muncul saat sistem berada dalam keadaan setimbang. Dalam konteks ini, eigenmode sering diidentifikasi sebagai vektor-vektor atau solusi-solusi dari persamaan eigen yang terkait dengan matriks tersebut. Pemahaman tentang eigenmode ini memberikan wawasan mendalam tentang struktur dasar sistem dan karakteristik dinamisnya.

Selanjutnya, penting untuk mencatat bahwa analisis eigenmode matriks tak tereduksi atas aljabar Max-Plus Interval tidak hanya relevan dalam teori, tetapi juga memiliki aplikasi praktis yang luas. Contohnya termasuk dalam sistem komunikasi nirkabel, jaringan komputer, dan optimisasi jadwal. Dengan memahami eigenmode, dapat kinerja sistem dioptimalkan , mengidentifikasi potensi anomali, dan merancang strategi kontrol yang efektif.

Aljabar Max-Plus berperan di suatu sistem sebagai analisa kontrol, jaringan yang dikontrol terdiri dari beberapa tujuan yang dapat digunakan oleh beberapa pengguna, untuk mencapai tujuan bersama, satu diantaranya proses penyelesaian aljabar max-plus digunakan untuk masalah penjadwalan [12]. Matriks atas aljabar max-plus memiliki unsur-unsur antara lain: nilai eigen, vektor eigen, dan eigenmode [6]. Nilai eigen merupakan gambaran dari keberkalaan suatu jaringan, vektor eigen mewakili permulaan proses dimulai untuk setiap sumberdaya dalam suatu jaringan, kemudian eigenmode menunjukan perilaku keberkalaan suatu jarigan [5].

Penelitian ketiga unsur ini terfokus pada algoritma-algoritma untuk memperoleh ketiga unsur dari matriks [2], untuk menerapkan algoritma perlu dipahami tentang sifat ketiga unsurnya. Oleh karena itu ada yang meneliti tentang karakter dari ketiga unsur dari matriks tak tereduksi dan tereduksi [5].

Penelitian lanjutan dari aljabar max-plus yaitu aljabar max-plus interval yang berperan sebagai penyelesaian masalah jaringan atau penjadwalan dengan waktu aktifitas bilangan kabur [8], matriks atas aljabar max-plus interval memiliki tiga unsur, sama seperti matriks atas aljabar max-plus yaitu nilai eigen, vektor eigen, dan eigenmode. penelitian tentang nilai eigen dan vektor eigen atas aljabar max-plus interval telah dilakukan [1], [4], [10], [11], perbedaan keduanya yaitu elemen pada matriks berupa interval-interval tertutup yang kemudian disebut matriks interval, dan aljabar max-plus interval merupakan himpunan yang beranggotakan interval-interval tertutup yang dilengkapi operasi biner $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$ [9]. Oleh karena itu, menarik untuk di teliti tentang bagaimana sifat eigenmode atas aljabar max-plus interval pada matriks tak tereduksi.

2. Metode Penelitian

Dalam artikel ini, metode penelitian yang digunakan berfokus pada pendekatan teoretis dan analisis matematis untuk memahami eigenmode dari suatu matriks tak tereduksi atas aljabar Max-Plus Interval. Penelitian ini tidak melibatkan pengumpulan data empiris, melainkan menggunakan metode deduktif untuk mengembangkan dan memverifikasi konsep-konsep yang relevan. Berikut adalah tahapan metodologis yang diterapkan dalam penelitian ini:

(1) Langkah pertama dalam penelitian ini adalah melakukan kajian literatur yang komprehensif terkait dengan aljabar Max-Plus Interval, matriks tak tereduksi, dan konsep eigenmode. Kajian ini mencakup penelitian-penelitian terdahulu, buku teks, dan artikel ilmiah yang relevan untuk membangun dasar teoretis yang kuat.
(2) Penelitian ini dimulai dengan mendefinisikan secara formal notasi-notasi yang akan digunakan serta konsep-konsep dasar seperti matriks tak tereduksi, operasi Max-Plus, dan aljabar interval. Definisi ini penting untuk memastikan konsistensi dan kejelasan dalam seluruh proses analisis.
(3) Selanjutnya, penelitian ini mengembangkan model matematis yang menggambarkan eigenmode dari suatu matriks tak tereduksi dalam konteks aljabar Max-Plus Interval. Ini melibatkan formulasi persamaan-persamaan eigen dalam kerangka kerja Max-Plus serta analisis sifat-sifat matematis dari persamaan tersebut.
(4) Analisis teoretis dilakukan untuk mengidentifikasi sifat-sifat fundamental dari eigenmode dalam konteks matriks tak tereduksi atas aljabar Max-Plus Interval. Ini mencakup pembuktian teorema-teorema kunci, proposisi, dan lema yang menggambarkan hubungan antara struktur matriks dan eigenmode yang dihasilkan.

Berikut diberikan beberapa gagasan yang mencakup penelitian yaitu matriks atas aljabar max-plus interval serta eigenmode dari matriks atas aljabar max-plus.

2.1. **Matriks atas Aljabar Max-Plus Interval.** Matriks atas aljabar max-plus interval memiliki dua unsur yaitu nilai eigen dan vektor eigen, telah dibahas pada definisi [7], misal diberikan $M \in I(\mathbb{R})_{\max}$, skalar interval λ disebut nilai eigen max-plus matriks interval M, jika terdapat suatu vektor interval $v \in \mathbb{R}^n_{\max}$ dengan $v \neq \varepsilon_{n\times 1}$ sehingga $M \overline{\otimes} v = \lambda \overline{\otimes} v$, vektor v disebut vektor eigen max-plus matriks interval M yang bersesuaian dengan λ.

Matriks interval dikatakan tak tereduksi dan memiliki sifat tunggal berdasarkan definisi dan teorema berikut:

Definisi 2.1. [7] *Suatu matriks interval $M \in I(\mathbb{R})^{n\times n}_{\max}$, dengan $M = \left[\underline{M}, \overline{M}\right]$ dikatakan tak tereduksi jika setiap matriks $M \in \left[\underline{M}, \overline{M}\right]$ tak tereduksi.*

Teorema 2.2. [7] *Suatu matriks interval $M \in I(\mathbb{R})^{n\times n}_{\max}$, dengan $M = \left[\underline{M}, \overline{M}\right]$ jika dan hanya jika $M \in (\mathbb{R})^{n\times n}_{\max}$ tak tereduksi.*

Pembuktian teorema telah dilakukan [7], *tak tereduksinya suatu matriks interval $M \in I(\mathbb{R})^{n\times n}_{\max}$ diperlukan dalam membuktikan bahwa $\lambda(M) = \left[\lambda(\underline{M}), \lambda(\overline{M})\right]$ merupakan nilai eigen max-plus tunggal pada matriks interval, seperti pada akibat berikut:*

Akibat 2.3. *Diberikan $M \in I(\mathbb{R})^{n\times n}_{\max}$, dengan $M = \left[\underline{M}, \overline{M}\right]$. Jika matriks interval M tak tereduksi, maka $\lambda(M) = \left[\lambda(\underline{M}), \lambda(\overline{M})\right]$ merupakan nilai eigen tunggal matriks interval M.*

Pembuktian akibat 2.3 telah dilakukan [7], *sedemikian hingga diperoleh nilai eigen max-plus tunggal (unique) pada matriks interval M. Selanjutnya sifat vektor eigen berdasarkan teorema berikut:*

Teorema 2.4. [3, 5] *Untuk setiap matriks tak tereduksi $M \in I(\mathbb{R})^{n\times n}_{\max}$ memiliki vektor eigen tidak tunggal, yaitu jika $v \in \mathbb{R}^n_{\max}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ, maka $m \otimes v$ juga merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ untuk sebarang $m \in \mathbb{R}$.*

Bukti. [12] Diberikan λ sebagai nilai eigen dari matriks tak tereduksi M dan $v \in \mathbb{R}^n_{\max}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ, sedemikian hingga $M \otimes v = \lambda \otimes v$, kemudian kalikan sebarang skalar $m \in \mathbb{R}$ pada kedua ruas, diperoleh: $m \otimes M \otimes v = m \otimes \lambda \otimes v$, karena $m \in \mathbb{R}$

adalah skalar, maka menjadi persamaan berikut: $M\otimes(m\otimes v) = \lambda\otimes(m\otimes v)$, diperoleh $m\otimes v \in \mathbb{R}$ juga merupakan vektor eigen dari matriks M yang bersesuaian dengan nilai eigen λ. Artinya vektor eigen dari matriks tak tereduksi tidak tunggal (*not unique*).

2.2. Eigenmode dari Matriks atas Aljabar Max-Plus.

Definisi 2.5. [2] *Suatu pasangan vektor $(\eta, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ disebut eigenmode tergeneralisasi dari matriks reguler M jika untuk setiap $k \geq 0$ memenuhi $M \otimes (k \times \eta + v) = (k+1) \times \eta + v$.*

Jika $k = 0$ diperoleh $M \otimes v = \eta + v$, dan jika semua elemen vektor η adalah konstan bernilai $\lambda \in \mathbb{R}$, maka diperoleh $M\otimes v = \lambda\otimes v$.

Kemudian λ merupakan suatu nilai eigen dari matriks M yang bersesuaian dengan vektor eigen v, selanjutnya η merupakan perluasan nilai eigen dari matriks M. η berkaitan dengan vektor cycle mean, artinya jika beberapa elemen dari vektor η mempunyai beberapa nilai yang berbeda, maka matriks M adalah matriks tereduksi atau ekivalen graf $G(M)$ tidak terhubung kuat, tetapi tidak berlaku sebaliknya.

Lemma 2.6. [5] *Jika pasangan vektor (η, v) adalah eigenmode tergeneralisasi dari matriks reguler M, maka vektor η merupakan perluasan nilai eigen dari matriks M dan vektor v adalah vektor eigennya.*

Bukti. [12] Misalkan pasangan vektor (η, v) adalah eigenmode tergeneralisasi dari matriks reguler M, maka vektor η dan v memenuhi $M \otimes (k \times \eta + v) = (k+1) \times \eta + v$, selanjutnya, misalkan $\lambda \in \mathbb{R}$ adalah nilai eigen dari matriks reguler M dan vektor eigen yang bersesuaian λ sama dengan $v \in \mathbb{R}$, maka λ dan v memenuhi $M\otimes v = \lambda\otimes v$. Untuk setiap $k \geq 0$, kalikan kedua ruas dengan $\lambda^{\otimes^k}$ diperoleh $M \otimes \lambda^{\otimes^k} \otimes v = \lambda \otimes \lambda^{\otimes^k} \otimes v$, kemudian $M \otimes \lambda^{\otimes^k} \otimes v = \lambda^{\otimes^{k+1}} \otimes v$, selanjutnya $M \otimes (k \times u[\lambda] + v) = (k+1) \times u[\lambda] + v$, hingga diperoleh $M \otimes (k \times \eta + v) = (k+1) \times \eta + v$, dimana $u[\lambda]$ adalah vektor dengan ukuran yang sesuai dan semua elemennya bernilai λ, $\eta = u[\lambda]$ merupakan perluasan nilai eigen matriks reguler M, yaitu η adalah vektor yang memiliki nilai λ untuk setiap elemennya, sedangkan vektor v adalah vektor eigen matriks reguler M yang bersesuaian dengan nilai eigen λ.

Teorema 2.7. [12] *Jika $M \in I(\mathbb{R})_{\max}^{n\times n}$ adalah matriks tak tereduksi dengan nilai eigen λ dan vektor eigen v, maka terdapat pasangan vektor (η, v) yang merupakan eigenmode dari matriks tak tereduksi M.*

Bukti. [12] Telah dibuktikan jika M adalah matriks tak-tereduksi, maka terdapat λ yang merupakan nilai eigen dari matriks M, kemudian jika M adalah matriks tak tereduksi, maka dapat ditemukan vektor eigen v yang bersesuaian dengan nilai eigen λ. Karena vektor η dalam eigenmode merupakan perluasan nilai eigen matriks tak-tereduksi M, yaitu η adalah vektor yang memiliki nilai λ untuk setiap elemennya dan vektor v dalam eigenmode merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ, maka untuk setiap matriks tak tereduksi M dapat ditemukan pasangan vektor (η, v) yang merupakan eigenmode dari matriks tak tereduksi M.

3. Hasil dan Pembahasan

Pembahasan berkaitan dengan sifat-sifat operasi di aljabar max plus juga berlaku di aljabar max plus interval, kemudian diberikan definisi dan teorema menjadi landasan eksistensi dan sifat eigenmode pada matriks tak tereduksi atas aljabar max-plus interval.

3.1. Matriks atas Aljabar Max-Plus Interval. Himpunan matriks berukuran $n \times n$ dengan unsur-unsur dalam $I(\mathbb{R})_{\max}$ dinotasikan $I(\mathbb{R})_{\max}^{n\times n}$. $I(\mathbb{R})_{\max}^{n\times n} = \{M = [M_{ij}] \,|M_{ij} \in I(\mathbb{R})_{\max}, i = 1, 2, ..., l \;\, j = 1, 2, ..., l\}$. Matriks anggota $I(\mathbb{R})_{\max}^{n\times n}$ disebut matriks interval max-plus. Selanjutnya matriks interval max-plus cukup disebut matriks interval.

Misalkan $M, O, P \in I(\mathbb{R})_{\max}^{n \times n}$ dengan $\varepsilon = \begin{bmatrix} [\varepsilon,\varepsilon] & \cdots & [\varepsilon,\varepsilon] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\varepsilon,\varepsilon] & \cdots & [\varepsilon,\varepsilon] \end{bmatrix}_{n \times n}$ sebagai elemen netral dan $\overline{0} = \begin{bmatrix} [0,0] & \cdots & [0,0] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [0,0] & \cdots & [0,0] \end{bmatrix}_{n \times n}$ sebagai elemen satuan. Buktikan ekivalensi suatu matriks interval menjadi matriks atas aljabar max-plus, dengan memenuhi syarat sifat-sifat operasi matriks atas aljabar max-plus sebagai berikut:

i) $M \overline{\oplus} P = \left[\underline{M}, \overline{M}\right] \overline{\oplus} \left[\underline{P}, \overline{P}\right] = \left[\underline{M} \overline{\oplus} \underline{P}, \overline{M} \overline{\oplus} \overline{P}\right] =$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \max\left(\underline{m_{11}}, \underline{p_{11}}\right) & \cdots & \max\left(\underline{m_{1l}}, \underline{p_{1l}}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \max\left(\underline{m_{l1}}, \underline{p_{l1}}\right) & \cdots & \max\left(\underline{m_{ll}}, \underline{p_{ll}}\right) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \max\left(\overline{m_{11}}, \overline{p_{11}}\right) & \cdots & \max\left(\overline{m_{1l}}, \overline{p_{1l}}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \max\left(\overline{m_{l1}}, \overline{p_{l1}}\right) & \cdots & \max\left(\overline{m_{ll}}, \overline{p_{ll}}\right) \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \max\left(\underline{p_{11}}, \underline{m_{11}}\right) & \cdots & \max\left(\underline{p_{1l}}, \underline{m_{1l}}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \max\left(\underline{p_{l1}}, \underline{m_{l1}}\right) & \cdots & \max\left(\underline{p_{ll}}, \underline{m_{ll}}\right) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \max\left(\overline{p_{11}}, \overline{m_{11}}\right) & \cdots & \max\left(\overline{p_{1l}}, \overline{m_{1l}}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \max\left(\overline{p_{l1}}, \overline{m_{l1}}\right) & \cdots & \max\left(\overline{p_{ll}}, \overline{m_{ll}}\right) \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$\left[\underline{P} \overline{\oplus} \underline{M}, \overline{P} \overline{\oplus} \overline{M}\right] = \left[\underline{P}, \overline{P}\right] \overline{\oplus} \left[\underline{M}, \overline{M}\right] = P \overline{\oplus} M.$

ii) $(M \overline{\oplus} O) \overline{\oplus} P = \left(\left[\underline{M} \overline{\oplus} \overline{M}\right] \overline{\oplus} \left[\underline{O} \overline{\oplus} \overline{O}\right]\right) \overline{\oplus} \left[\underline{P} \overline{\oplus} \overline{P}\right] = \left(\left[\underline{M} \overline{\oplus} \underline{O}, \left[\overline{M} \overline{\oplus} \overline{O}\right]\right) \overline{\oplus}\right) \left[\underline{P} \overline{\oplus} \overline{P}\right] =$

$\left[\max\left(\underline{M}, \underline{O}\right), \max\left(\overline{MO}\right)\right] \overline{\oplus} \left[\underline{P}, \overline{P}\right] = \left[\max\left(\max\left(\underline{M}, \underline{O}\right), \underline{P}\right), \max\left(\max\left(\overline{M}, \overline{O}\right), \overline{P}\right)\right]$
$\left[\max\left(\underline{M}, \underline{O}, \underline{P}\right), \max\left(\overline{M}, \overline{O}, \overline{P}\right)\right] =$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \max\left(\underline{m_{11}}, \underline{o_{11}}, \underline{p_{11}}\right) & \cdots & \max\left(\underline{m_{1l}}, \underline{0_{1l}}, \underline{p_{1l}}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \max\left(\underline{m_{l1}}, \underline{o_{l1}}, \underline{p_{l1}}\right) & \cdots & \max\left(\underline{m_{ll}}, \underline{o_{ll}}, \underline{p_{ll}}\right) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \max\left(\overline{m_{11}}, \overline{o_{11}}, \overline{p_{11}}\right) & \cdots & \max\left(\overline{m_{1l}}, \overline{o_{1l}}, \overline{p_{1l}}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \max\left(\overline{m_{l1}}, \overline{o_{l1}}, \overline{p_{l1}}\right) & \cdots & \max\left(\overline{m_{ll}}, \overline{o_{ll}}, \overline{p_{ll}}\right) \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \max\left(\underline{m_{11}}, \max\left(\underline{o_{11}}, \underline{p_{11}}\right)\right) & \cdots & \max\left(\underline{m_{1l}}, \max\left(\underline{0_{1l}}, \underline{p_{1l}}\right)\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \max\left(\underline{m_{l1}}, \max\left(\underline{o_{l1}}, \underline{p_{l1}}\right)\right) & \cdots & \max\left(\underline{m_{ll}}, \max\left(\underline{o_{ll}}, \underline{p_{ll}}\right)\right) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \max\left(\overline{m_{11}}, \max\left(\overline{o_{11}}, \overline{p_{11}}\right)\right) & \cdots & \max\left(\overline{m_{1l}}, \max\left(\overline{o_{1l}}, \overline{p_{1l}}\right)\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \max\left(\overline{m_{l1}}, \max\left(\overline{o_{l1}}, \overline{p_{l1}}\right)\right) & \cdots & \max\left(\overline{m_{ll}}, \max\left(\overline{o_{ll}}, \overline{p_{ll}}\right)\right) \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$\left[\max\left(\underline{M}, \max\left(\underline{O}, \underline{P}\right)\right), \max\left(\overline{M}, \max\left(\overline{O}, \overline{P}\right)\right)\right] =$
$\left[\max\left(\underline{M}, \left(\underline{O} \overline{\oplus} \underline{P}\right)\right), \max\left(\underline{M}, \left(\overline{O} \overline{\oplus} \overline{P}\right)\right)\right] =$
$\left[\underline{M}, \overline{M}\right] \overline{\oplus} \left(\left[\underline{O} \overline{\oplus} \underline{P}, \overline{O \oplus P}\right]\right) = \left[\underline{M}, \overline{M}\right] \overline{\oplus} \left(\left[\underline{O}, \overline{O}\right] \overline{\oplus} \left[\underline{P}, \overline{P}\right]\right) = M \underline{\oplus} \left(O \overline{\oplus} P\right).$

iii) $M \overline{\oplus} \varepsilon = \left[\underline{M}, \overline{M}\right] \overline{\oplus} \left[\underline{\varepsilon}, \overline{\varepsilon}\right] = \left[\underline{M} \overline{\oplus} \underline{\varepsilon}, \overline{M} \overline{\oplus} \overline{\varepsilon}\right] =$

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\max\left(\underline{m_{11}},\underline{\varepsilon_{11}}\right) & \cdots & \max\left(\underline{m_{1l}},\underline{\varepsilon_{1l}}\right)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \max\left(\underline{m_{l1}},\underline{\varepsilon_{l1}}\right) & \cdots & \max\left(\underline{m_{ll}},\underline{\varepsilon_{ll}}\right)\end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix}\max\left(\overline{m_{11}},\overline{\varepsilon_{11}}\right) & \cdots & \max\left(\overline{m_{lk}},\overline{\varepsilon_{1l}}\right)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \max\left(\overline{m_{l1}},\overline{\varepsilon_{l1}}\right) & \cdots & \max\left(\overline{m_{ll}},\overline{\varepsilon_{ll}}\right)\end{bmatrix}\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\max\left(\underline{m_{11}},\underline{-\infty_{11}}\right) & \cdots & \max\left(\underline{m_{1l}},\underline{-\infty_{1l}}\right)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \max\left(\underline{m_{l1}},\underline{-\infty_{l1}}\right) & \cdots & \max\left(\underline{m_{ll}},\underline{-\infty_{ll}}\right)\end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix}\max\left(\overline{m_{11}},\overline{-\infty_{11}}\right) & \cdots & \max\left(\overline{m_{il}},\overline{-\infty_{1l}}\right)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \max\left(\overline{m_{l1}},\overline{-\infty_{l1}}\right) & \cdots & \max\left(\overline{m_{ll}},\overline{-\infty_{ll}}\right)\end{bmatrix}\end{bmatrix} =$$

$$\left[\begin{bmatrix}\underline{m_{11}} & \cdots & \underline{m_{1l}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \underline{m_{l1}} & \cdots & \underline{m_{ll}}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\overline{m_{11}} & \cdots & \overline{m_{1l}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \overline{m_{l1}} & \cdots & \overline{m_{ll}}\end{bmatrix}\right] = \left[\underline{M},\overline{M}\right] = M.$$

iv) $M\overline{\otimes}P = \left[\underline{M},\overline{P}\right]\overline{\otimes}\left[\underline{M},\overline{P}\right] = \left[\underline{M}\overline{\otimes}\underline{P},\overline{M}\overline{\otimes}\overline{P}\right] =$

$$\left[\begin{bmatrix}\underline{m_{11}}+\underline{p_{11}} & \cdots & \underline{m_{1l}}+\underline{p_{1l}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \underline{m_{l1}}+\underline{p_{l1}} & \cdots & \underline{m_{ll}}+\underline{p_{ll}}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\overline{m_{11}}+\overline{p_{11}} & \cdots & \overline{m_{1l}}+\overline{p_{1l}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \overline{m_{l1}}+\overline{p_{l1}} & \cdots & \overline{m_{ll}}+\overline{p_{ll}}\end{bmatrix}\right] =$$

$$\left[\begin{bmatrix}\underline{p_{11}}+\underline{m_{11}} & \cdots & \underline{p_{1l}}+\underline{m_{1l}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \underline{p_{l1}}+\underline{m_{l1}} & \cdots & \underline{p_{ll}}+\underline{m_{ll}}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\overline{p_{11}}+\overline{m_{11}} & \cdots & \overline{p_{1l}}+\overline{m_{1l}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \overline{p_{l1}}+\overline{m_{l1}} & \cdots & \overline{p_{ll}}+\overline{m_{ll}}\end{bmatrix}\right] =$$

$\left[\underline{P}+\underline{M},\overline{P}+\overline{M}\right] = \left[\underline{P},\overline{P}\right]\overline{\otimes}\left[\underline{M},\overline{M}\right] = P\overline{\otimes}M.$

v) $\left(M\overline{\otimes}O\right)\overline{\otimes}P = \left(\left[\underline{M},\overline{M}\right]\overline{\otimes}\left[\underline{O},\overline{O}\right]\right)\overline{\otimes}\left[\underline{P},\overline{P}\right] = \left(\left[\underline{M}\overline{\otimes}\underline{O},\overline{M}\overline{\otimes}\overline{O}\right]\right)\overline{\otimes}\left[\underline{P},\overline{P}\right] =$
$\left(\left[\underline{M}+\underline{O},\overline{M}+\overline{O}\right]\right)\overline{\otimes}\left[\underline{P},\overline{P}\right] = \left[\underline{M}+\underline{O}+\underline{P},\overline{M}+\overline{O}+\overline{P}\right] =$

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{m_{11}}+\underline{o_{11}}+\underline{p_{11}} & \cdots & \underline{m_{1l}}+\underline{o_{1l}}+\underline{p_{1l}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \underline{m_{l1}}+\underline{o_{l1}}+\underline{p_{l1}} & \cdots & \underline{m_{ll}}+\underline{o_{ll}}+\underline{p_{ll}}\end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix}\overline{m_{11}}+\overline{o_{11}}+\overline{p_{11}} & \cdots & \overline{m_{1l}}+\overline{o_{1l}}+\overline{p_{1l}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \overline{m_{l1}}+\overline{o_{l1}}+\overline{p_{l1}} & \cdots & \overline{m_{ll}}+\overline{o_{ll}}+\overline{p_{ll}}\end{bmatrix}\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{m_{11}} & \cdots & \underline{m_{1l}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{m_{l1}} & \cdots & \underline{m_{ll}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{o_{11}}+\underline{p_{11}} & \cdots & \underline{o_{1}}+\underline{p_{1l}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{o_{l1}}+\underline{p_{l1}} & \cdots & \underline{o_{ll}}+\underline{p_{ll}} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \overline{m_{11}} & \cdots & \overline{m_{1l}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{m_{l1}} & \cdots & \overline{m_{ll}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{o_{11}}+\overline{p_{11}} & \cdots & \overline{o_{1l}}+\overline{p_{1l}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{o_{1}}+\overline{p_{l1}} & \cdots & \overline{o_{ll}}+\overline{p_{ll}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} [\underline{m_{11}},\overline{m_{11}}] & \cdots & [\underline{m_{1l}},\overline{m_{1l}}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{m_{l1}},\overline{m_{l1}}] & \cdots & [\underline{m_{ll}},\overline{m_{ll}}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{o_{11}}+\underline{p_{11}} & \cdots & \underline{o_{1}}+\underline{p_{1l}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{o_{l1}}+\underline{p_{l1}} & \cdots & \underline{o_{ll}}+\underline{p_{ll}} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \overline{o_{11}}+\overline{p_{11}} & \cdots & \overline{o_{1l}}+\overline{p_{1l}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{o_{1}}+\overline{p_{l1}} & \cdots & \overline{o_{ll}}+\overline{p_{ll}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$\left[\underline{M},\overline{M}\right] \overline{\otimes} \left(\left[\underline{O}+\underline{P},\overline{O}+\overline{P}\right]\right) = \left[\underline{M},\overline{M}\right] \overline{\otimes} \left(\left[\underline{O}\otimes\underline{P},\overline{O}\otimes\overline{P}\right]\right) =$

$\left[\underline{M},\overline{M}\right] \overline{\otimes} \left(\left[\underline{O},\overline{O}\right] \overline{\otimes} \left[\underline{P},\overline{P}\right]\right) = M\overline{\otimes}\left(O\overline{\otimes}P\right).$

vi) $M\overline{\otimes}e = \left[\underline{M},\overline{M}\right] \overline{\otimes} \left[\underline{0},\overline{0}\right] = \left[\underline{M}\otimes\underline{e},\overline{M}\otimes\overline{e}\right] =$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{m_{11}}+\underline{0_{11}} & \cdots & \underline{m_{1l}}+\underline{0_{1l}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{m_{l1}}+\underline{0_{l1}} & \cdots & \underline{m_{ll}}+\underline{0_{ll}} \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} \overline{m_{11}}+\overline{0_{11}} & \cdots & \overline{m_{1l}}+\overline{0_{1l}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{m_{l1}}+\overline{0_{l1}} & \cdots & \overline{m_{ll}}+\overline{0_{ll}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{m_{11}} & \cdots & \underline{m_{1l}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{m_{l1}} & \cdots & \underline{m_{ll}} \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} \overline{m_{11}} & \cdots & \overline{m_{1l}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{m_{l1}} & \cdots & \overline{m_{ll}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \left[\underline{M},\overline{M}\right] = M.$$

vii) $(M\overline{\oplus}O)\overline{\otimes}P = \left(\left[\underline{M},\overline{M}\right] \overline{\oplus} \left[\underline{O},\overline{O}\right]\right) \overline{\otimes} \left[\underline{P},\overline{P}\right] = \left[\underline{M}\oplus\underline{O},\overline{M}\oplus\overline{O}\right] \overline{\otimes} \left[\underline{P},\overline{P}\right] =$

$\left[\max\left(\underline{M},\underline{O}\right), \max\left(\overline{M},\overline{O}\right)\right] + \left[\underline{P},\overline{P}\right] =$

$\left[\left(\max\left(\underline{M}+\underline{P},\underline{O}+\underline{P}\right)\right), \left(\max\left(\overline{M}+\overline{P},\overline{O}+\overline{P}\right)\right)\right] =$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \max\left(\underline{m_{11}}+\underline{p_{11}},\underline{o_{11}}+\underline{p_{11}}\right) & \cdots & \max\left(\underline{m_{1l}}+\underline{p_{1l}},\underline{o_{1l}}+\underline{p_{1l}}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \max\left(\underline{m_{l1}}+\underline{p_{l1}},\underline{o_{l1}}+\underline{p_{l1}}\right) & \cdots & \max\left(\underline{m_{ll}}+\underline{p_{ll}},\underline{o_{ll}}+\underline{p_{ll}}\right) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \max\left(\overline{m_{11}}+\overline{p_{11}},\overline{o_{11}}+\overline{p_{11}}\right) & \cdots & \max\left(\overline{m_{1l}}+\overline{p_{1l}},\overline{o_{1l}}+\overline{p_{1l}}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \max\left(\overline{m_{l1}}+\overline{p_{l1}},\overline{o_{l1}}+\overline{p_{l1}}\right) & \cdots & \max\left(\overline{m_{ll}}+\overline{p_{ll}},\overline{o_{ll}}+\overline{p_{ll}}\right) \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$\left(\left[\underline{M},\overline{M}\right] \overline{\otimes} \left[\underline{P},\overline{P}\right]\right) \overline{\oplus} \left(\left[\underline{O},\overline{O}\right] \overline{\otimes} \left[\underline{P},\overline{P}\right]\right) = (M\overline{\otimes}P)\overline{\oplus}(O\overline{\otimes}P).$

viii) $M\overline{\otimes}\left(O\overline{\oplus}P\right) = \left[\underline{M},\overline{M}\right] \overline{\otimes} \left(\left[\underline{O},\overline{O}\right] \overline{\oplus} \left[\underline{P},\overline{P}\right]\right) = \left[\underline{M},\overline{M}\right] \overline{\otimes} \left[\underline{O}\oplus\underline{P},\overline{O}\oplus\overline{P}\right] =$

$\left[\underline{M},\overline{M}\right] + \left[\max\left(\underline{O},\underline{P}\right), \max\left(\overline{O},\overline{P}\right)\right] =$

$\left[\left(\max\left(\underline{M}+\underline{O},\underline{M}+\underline{P}\right)\right), \left(\max\left(\overline{M}+\overline{O},\overline{M}+\overline{P}\right)\right)\right] =$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \max\left(\underline{m_{11}}+\underline{o_{11}},\underline{m_{11}}+\underline{p_{11}}\right) & \cdots & \max\left(\underline{m_{1l}}+\underline{o_{1l}},\underline{m_{1l}}+\underline{p_{1l}}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \max\left(\underline{m_{l1}}+\underline{o_{l1}},\underline{m_{l1}}+\underline{p_{l1}}\right) & \cdots & \max\left(\underline{m_{ll}}+\underline{o_{ll}},\underline{m_{ll}}+\underline{p_{ll}}\right) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \max\left(\overline{m_{11}}+\overline{o_{11}},\overline{m_{11}}+\overline{p_{11}}\right) & \cdots & \max\left(\overline{m_{1l}}+\overline{o_{1l}},\overline{m_{1l}}+\overline{p_{1l}}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \max\left(\overline{m_{l1}}+\overline{o_{l1}},\overline{m_{l1}}+\overline{p_{l1}}\right) & \cdots & \max\left(\overline{m_{ll}}+\overline{o_{ll}},\overline{m_{ll}}+\overline{p_{ll}}\right) \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$\left(\left[\underline{M},\overline{M}\right]\overline{\otimes}\left[\underline{O},\overline{O}\right]\right)\overline{\oplus}\left(\left[\underline{M},\overline{M}\right]\overline{\otimes}\left[\underline{P},\overline{P}\right]\right)=(M\overline{\otimes}O)\overline{\oplus}(M\overline{\otimes}P).$$

ix) $M\overline{\otimes}\varepsilon=\left[\underline{M},\overline{M}\right]\overline{\otimes}\left[\underline{\varepsilon},\overline{\varepsilon}\right]=\left[\underline{M}\overline{\otimes}\underline{\varepsilon}\right],\left[\overline{M}\overline{\otimes}\overline{\varepsilon}\right]=$

$\left[\underline{M}+\underline{-\infty},\overline{M}+\overline{-\infty}\right]=\left[\underline{-\infty}+\underline{M},\overline{-\infty}+\overline{M}\right]=$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{m_{11}}+\underline{-\infty_{11}} & \cdots & \underline{m_{1l}}+\underline{-\infty_{1l}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{m_{l1}}+\underline{-\infty_{l1}} & \cdots & \underline{m_{ll}}+\underline{-\infty_{ll}} \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} \overline{m_{11}}+\overline{-\infty_{11}} & \cdots & \overline{m_{1l}}+\overline{-\infty_{1l}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{m_{l1}}+\overline{-\infty_{l1}} & \cdots & \overline{m_{ll}}+\overline{-\infty_{ll}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{-\infty_{11}}+\underline{m_{11}} & \cdots & \underline{-\infty_{1l}}+\underline{m_{1l}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{-\infty_{l1}}+\underline{m_{l1}} & \cdots & \underline{-\infty_{ll}}+\underline{m_{ll}} \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} \overline{-\infty_{11}}+\overline{m_{11}} & \cdots & \overline{-\infty_{1l}}+\overline{m_{1l}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{-\infty_{l1}}+\overline{m_{l1}} & \cdots & \overline{-\infty_{ll}}+\overline{m_{ll}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$\left[\underline{\varepsilon}\overline{\otimes}\underline{M}\right],\left[\overline{\varepsilon}\overline{\otimes}\overline{M}\right]=\varepsilon\overline{\otimes}M$

Karena syarat-syarat matriks atas aljabar max-plus telah dipenuhi oleh matriks interval, maka dapat dikatakan matriks tersebut adalah matriks atas aljabar max-plus interval.

3.2. **Eigenmode dalam Matriks tak tereduksi atas Aljabar Max-Plus Interval.** Matriks reguler yaitu matriks yang disetiap baris setidaknya memuat satu elemen tidak sama dengan ε. Berdasarkan definisi 2.5 bahwa eigenmode adalah pasangan vektor $(\eta, v) \in (\mathbb{R})^{n\times n}$ dari matriks reguler M jika untuk setiap $k \geq 0$ memenuhi $M \otimes (k \times \eta + v) = (k+1)\times \eta + v$, untuk $k = 0$ diperoleh $M \otimes v = \eta + v$, dimana jika semua elemen vektor η adalah konstan nilai $\lambda \in \mathbb{R}$, maka diperoleh $M\otimes v = \lambda \otimes v$.

Berdasarkan definisi, teorema, dan lema telah ditunjukkan [5] eksistensi eigenmode di aljabar max-plus, kemudian dijadikan landasan untuk menunjukan eksistensi eigenmode di aljabar max-plus interval.

Himpunan matriks berukuran $n \times n$ dengan elemen-elemen dalam $I(\mathbb{R})_{\max}$ dinotasikan $I(\mathbb{R})_{\max}^{n\times n}$. $I(\mathbb{R})_{\max}^{n\times n} = \{M = [M_{ij}] \,|M_{ij} \in I(\mathbb{R})_{\max}, i = 1,2,...,l\ j = 1,2,...,l\}$. Matriks anggota $I(\mathbb{R})_{\max}^{n\times n}$ disebut matriks interval max-plus. Selanjutnya matriks interval max-plus cukup disebut matriks interval, sehingga nilai eigen dan vektor eigen elemennya merupakan interval-interval tertutup [7]. Telah dibuktikan [7] bahwa $M \in I(\mathbb{R})_{\max}^{n\times n}$ dengan $M = \left[\underline{M},\overline{M}\right]$, nilai eigen berupa skalar interval $\lambda(M) = \left[\lambda\left(\underline{M}\right), \lambda\left(\overline{M}\right)\right]$ dan vektor eigen berupa vektor interval $v = [\underline{v}, \overline{v}]$, dimana $\underline{v}$ dan $\overline{v}$ berturut-turut bersesuaian dengan $\lambda(\underline{M})$ dan $\lambda\left(\overline{M}\right)$.

Ditunjukan eksistensi eigenmode di aljabar max-plus interval, Misalkan $M \in I(\mathbb{R})_{\max}^{n\times n}$ dengan $M = \left[\underline{M},\overline{M}\right]$, dimana M merupakan matriks reguler, dan E^* adalah eigenmode. Karena sifat konsisten operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada matriks terhadap urutan $\preceq_d$ berlaku $\forall M \in \left[\underline{M},\overline{M}\right]$ dimana $\underline{M_1} \preceq_d M_2 \preceq_d ... \preceq_d \overline{M_l}$, dimana $\underline{M_1}$ merupakan matriks batas bawah dan $\overline{M_1}$ merupakan matriks batas atas, sehingga diperoleh

Misal $M = \begin{bmatrix} [a_1, a_2, ..., a_l] & [b_1, b_2, ..., b_l] \\ [c_1, c_2, ..., c_l] & [d_1, d_2, ..., d_l] \end{bmatrix}_{n \times n}$, dimana $\underline{M_1} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ merupakan matriks batas bawah dan $\overline{M_l} = \begin{bmatrix} a_l & b_l \\ c_l & d_l \end{bmatrix}$ merupakan matriks batas atas, sehingga

$$\underline{M_1} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}, ..., \overline{M_l} = \begin{bmatrix} a_l & b_l \\ c_l & d_l \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa $\underline{M_1} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ jika untuk setiap $k \geq 0$ memenuhi $M \otimes (k \times \eta(M) + v(M)) = (k+1) \times \eta(M) + v(M)$, jika $k = 0$ dan semua elemen vektor $\eta(M)$ adalah konstan bernilai $\lambda \in \mathbb{R}$, maka diperoleh $M \otimes v(M) = \lambda \otimes v(M)$, artinya terdapat nilai eigen λ dan vektor eigen $v(M)$ yang bersesuaian dengan nilai eigen λ. Karena vektor η dalam eigenmode adalah vektor yang memiliki nilai λ untuk setiap elemennya dan vektor $v(M)$ merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ, artinya $\underline{M_1} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ terdapat pasangan vektor $(\eta(M), v(M))$ yang merupakan eigenmode, berlaku untuk matriks M_2 hingga $\overline{M_l}$ terdapat eigenmode. Oleh karena itu:

$$\underline{M_1} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}, ..., \overline{M_l} = \begin{bmatrix} a_l & b_l \\ c_l & d_l \end{bmatrix}$$

Terdapat vektor $\eta(M)$ dan vektor $v(M)$, diperoleh:

$$\begin{aligned} \eta(M) &= \left(\lambda_1 \left(\underline{M_1}, \lambda_2 (M_2), ..., \lambda_l \left(\overline{M_l}\right)\right)\right) \\ &\vdots \\ v(M) &= \left(v_1 \left(\underline{M_1}, v_2 (M_2), ..., v_l \left(\overline{M_l}\right)\right)\right) \end{aligned} \tag{1}$$

Perhatikan bahwa misal E^* adalah eigenmode, juga merupakan pasangan vektor $(\eta(M), v(M))$ artinya $E^* = (\eta(M), v(M))$, sehingga dari persamaan (3.2), diperoleh:

$$E^* = \left(\eta\left(\underline{M_1}\right), v\left(\underline{M_1}\right), ..., \left(\eta\left(\overline{M_l}\right), v\left(\overline{M_l}\right)\right)\right) = \left(E^*\left(\underline{M_1}\right), E^*(M_2), ..., E^*\left(\overline{M_l}\right)\right) \tag{2}$$

Selanjutnya berdasarkan Akibat 2.3 diterangkan bahwa nilai eigen matriks interval M adalah tunggal (*unique*), kemudian berdasarkan Teorema 2.4 disebutkan vektor eigen dari matriks M adalah tidak tunggal (*not unique*). Eigenmode berupa pasangan vektor $(\eta(M), v(M))$ sehingga pada Akibat 2.3 yang menyatakan nilai eigen tunggal yang menyebabkan vektor $\eta(M) = (\lambda\lambda...\lambda)^T$ adalah tunggal (*unique*), akan tetapi vektor eigen tidak tunggal (*not unique*) berdasarkan Teorema 2.4 sehingga vektor $v(M)$ pada eigenmode tidak tunggal yaitu $(\eta(M), m \otimes v)$ dengan $m \in \mathbb{R}$. Sedemikian hingga eigenmode pada matriks aljabar max-plus interval $E^* = \left(E^*\left(\underline{M_1}\right), E^*(M_2), ..., E^*\left(\overline{M_l}\right)\right)$, dimana sifat $\left(E^*\left(\underline{M_1}\right), E^*(M_2), ..., E^*\left(\overline{M_l}\right)\right)$ tidak tunggal (*not unique*).

4. Simpulan

Dalam artikel ini telah dikaji eigenmode dari suatu matriks tak tereduksi atas aljabar Max-Plus Interval. Berdasarkan analisis yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa Matriks-matriks yang didefinisikan dalam aljabar Max-Plus Interval memenuhi semua sifat operasi yang berlaku dalam $I(\mathbb{R})_{\max}$. Hal ini mengonfirmasi konsistensi aljabar Max-Plus Interval dalam konteks matriks tak tereduksi. Eigenmode dari matriks tak tereduksi dalam aljabar Max-Plus Interval terbukti eksis. Ini menunjukkan bahwa sistem dinamis yang dimodelkan dengan matriks tersebut memiliki pola perubahan yang dapat diidentifikasi melalui analisis eigenmode. Salah satu temuan penting dari penelitian ini adalah bahwa eigenmode pada matriks tak tereduksi atas aljabar Max-Plus Interval tidak bersifat tunggal (*not unique*). Ini berarti bahwa untuk suatu matriks tertentu, terdapat lebih dari satu vektor eigen yang dapat memenuhi persamaan eigen yang diberikan.

Temuan-temuan ini memberikan wawasan baru tentang struktur dan dinamika sistem yang diatur oleh matriks dalam aljabar Max-Plus Interval. Pemahaman yang lebih baik tentang eigenmode ini diharapkan dapat diaplikasikan dalam berbagai bidang, seperti optimasi jaringan, analisis sistem transportasi, dan pemodelan ekonomi. Penelitian lebih lanjut diperlukan untuk mengeksplorasi potensi aplikasi dan pengembangan algoritma yang lebih efisien untuk mengidentifikasi eigenmode dalam konteks yang lebih kompleks.

Daftar Pustaka

[1] Cechlarova, K., 2005, Eigenvectors of Interval Matrices Over Max-Plus Algebra, *Journal of Discrete Applied Mathematics.*

[2] Fahim Kistosil, Subiono, dan Jacob Van der Woude, 2017, On a Generalization of Power Algorithms Over Max-Plus Algebra, *Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Applications.*

[3] Farlow, Kasie, 2009, Max-Plus Algebra. Blacksburg, Virginia: Master's Thesis Submitted to the Faculty of the Virginia Polythechnic and State University.

[4] Fitri Aryani, Tri Novita Sari, 2016, Nilai Eigen dan Vektor Eigen Universal Matriks Interval atas Aljabar Max-Plus Interval, *SNTIKI.*

[5] Himmatul M., dan Subiono, 2017, Thesis: Karakterisasi Nilai Eigen, Vektor Eigen, dan Eigenmode dari Matriks Tak Tereduksi dan Tereduksi dalam Aljabar Max-Plus. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

[6] K¨onigsberg, Zvi Retchkiman, 2009, A Generalized Eigenmode Algorithm for Reducible Regular Matrices over the Max-Plus Algebra, *International Mathematical Forum*, 4, no. 24,1157 - 1171.

[7] M. Andy Rudhito, Sri Wahyuni, Ari Suparwanto, dan F.Susilo, 2008, Matriks Aljabar Max-Plus Interval, Prosiding SEMNAS mahasiswa S3 Matematika, UGM.

[8] M. Andy Rudhito, Sri Wahyuni, Ari Suparwanto, F. Susilo, 2009, Penerapan Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur pada Jaringan Antrian dengan Waktu Aktifitas Kabur, Prosiding Seminar Nasional FMIPA UNY.

[9] Myscova, Helena, 2012, Interval Eigenvectors Of Circulant Matrices In Fuzzy Algebra, *Acta Electrotechnica et Informatica*, 57-61.

[10] Siswanto, Ari S., M. Andy R, 2014, Ruang Vektor Eigen suatu Matriks atas Aljabar Max-Plus, Seminar Nasional dan Workshop Aljabar dan Pembelajarannya, Malang: Universitas Malang.

[11] Siswanto, Ari Suparwanto, dan M. Andy Rudhito, 2013, Penentuan Nilai Eigen suatu Matriks atas Aljabar Max Plus, Prosiding Seminar Nasional UNY, 141-145.

[12] Subiono, 2015, *Aljabar Min-Max-Plus dan Terapannya*, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.