

## Pemodelan Aliran Fluida Bidang Miring Pada Lapisan Tipis

SYED BILAL ASIM, EVI NOVIANI\*, HELMI HELMI

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Tanjungpura

Jl. Prof. Dr. H. Hadari Nawawi, Pontianak, 78124, Indonesia

Email: syed.bilal.asim@student.untan.ac.id, evi\_noviani@math.untan.ac.id,  
helmi@math.untan.ac.id

\*Penulis Korespondensi

### Abstrak

Aliran fluida dapat dinyatakan sebagai persamaan diferensial parsial. Penelitian ini bertujuan untuk menyajikan penurunan pemodelan aliran fluida pada bidang miring. Aliran fluida diasumsikan bersifat *incompressible* dan *irrotational*. Dalam memodelkan aliran fluida pada bidang miring, dilibatkan berbagai persamaan, yaitu persamaan kontinuitas, persamaan *Navier-Stokes*, persamaan *power-law*, dan persamaan tekanan. Persamaan *Navier-Stokes*, *power-law*, dan tekanan diubah ke dalam bentuk persamaan tanpa dimensi, untuk kemudian diselesaikan dengan mensubstitusikan persamaan *power-law* dan tekanan ke dalam persamaan *Navier-Stokes*. Bilangan Reynolds diasumsikan sangat kecil. Akibatnya, parameter bilangan Reynolds yang ada di dalam persamaan *Navier-Stokes* dihilangkan. Selanjutnya persamaan Navier-Stoks yang telah dibangun ditransformasikan dalam bentuk berdimensi kembali. Kemudian persamaan *Navier-Stokes* yang telah terbangun dan kontinuitas diintegrasikan dengan pendekatan lapisan tipis. Dalam membentuk model aliran fluida di bidang miring, diperlukan juga persamaan kinematik permukaan bebas yang menghasilkan persamaan diferensial, sehingga didapatkan model dan solusi dari aliran fluida bidang miring pada lapisan tipis. Model aliran tipis dalam bidang miring yang didapatkan berbentuk persamaan kuasi linear orde pertama dengan solusi berupa fungsi posisi fluida yang mengalir pada waktu tertentu yang tergantung pula oleh jenis fluida.

Kata Kunci: Persamaan kontinuitas, persamaan *Navier-Stokes*, model *power-law*, bilangan Reynolds.

---

2000 Mathematics Subject Classification: 65L12

Received: 2022-07-22, Accepted: 2023-03-25, Published: 2023-06-04.

### **Abstract**

*Fluid flow can be expressed as a partial differential equation. This study presents a deduction of fluid flow modelling on an inclined plane. The fluid flow is assumed to be incompressible and irrotational. Modelling fluid flow in the incline involves various equations: the continuity equation, the Navier-Stokes equation, the power equation, and the pressure equation. The Navier-Stokes, power-law, and pressure equations are transformed into dimensionless forms and then solved by substituting the power-law and pressure equations into the Navier-Stokes equation. Reynold's number is assumed to be very small, so we can omit it in the Navier-Stokes equation. Further, the Navier-Stokes equation that has been built is transformed into dimensional form. In constructing a fluid flow model on an inclined plane, free surface kinematic equations are also needed, which produce differential equations, so that models and solutions for fluid flow on an inclined plane are obtained in thin layers. This model is in the form of a first-order quasi-linear equation. We obtain that the solution is a function of the position of the fluid flowing at a certain time which also depends on the fluid type.*

*Keywords:* Continuity equation, Navier-Stokes equation, power-law model, Reynolds number.

## 1. PENDAHULUAN

Sampai saat ini, pengembangan ilmu matematika semakin berkembang di berbagai cabang. Salah satunya yaitu pemodelan matematika. Pemodelan matematika adalah suatu proses mengubah masalah dari dunia nyata ke dalam bentuk matematika untuk menemukan solusi dari suatu masalah (Ang, [1]). Pemodelan matematika juga diterapkan kedalam beberapa disiplin ilmu pengetahuan, salah satunya didalam ilmu fisika yang menjelaskan hukum alam yang ada di dunia ini. Dalam bidang fisika terdapat sebuah pembahasan yaitu fluida. Fluida adalah zat atau subsistem yang akan mengalami deformasi secara berkesinambungan kalau terkena gaya geser (gaya tangensial) walaupun gaya tersebut kecil sekali pun (Nasution, [2]). Fluida dibedakan menjadi dua menurut karakteristiknya, yaitu fluida Newtonian dan fluida non-Newtonian.

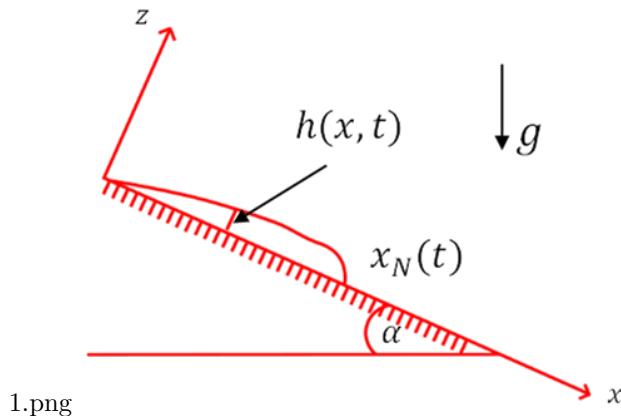
Fluida Newtonian adalah sebutan untuk fluida yang mengalir secara kontinu berapapun gaya geser diberikan padanya. Contoh fluida Newtonian yaitu air, udara, ethanol, benzene, dan sebagainya. Sedangkan fluida non-Newtonian adalah fluida yang mengalir secara tidak kontinu jika diberikan tegangan geser. Contoh fluida non-Newtonian adalah bahan puding (yang masih cair) dan cairan cat (Halliday *et al.*, [3]). Jika dilihat dari aspek geometris, salah satu jenis fluida yaitu fluida lapisan tipis. Lapisan tipis merupakan fluida yang ketinggiannya jauh lebih kecil dibandingkan panjang fluidanya. Contoh fluida lapisan tipis adalah aliran lava, lapisan paru-paru mamalia, lapisan air mata pada bola mata (Martanegara *et al.*, [4]).

Di dalam pemodelan fluida, model-model yang biasa dibuat adalah memodelkan bentuk aliran fluida dengan kondisi permukaan atau masalah tertentu. Aliran fluida adalah cara untuk menjelaskan gerak suatu fluida dengan membagi fluida tersebut menjadi elemen-elemen volume yang sangat kecil, yang dapat dinamakan partikel-partikel fluida, dan mengikuti gerak masing-masing partikelnya (Halliday dan Resnick, [5]). Sehingga pada penelitian ini, peneliti berfokus untuk memodelkan aliran fluida lapisan tipis yang mengalir pada permukaan bebas dengan kondisi bidang miring dengan menggunakan model *power-law* dan mencari solusi dari model yang didapat. Dengan memperdalam penelitian Ganguly *et al.* [6] yang membahas tentang aliran dua dimensi dari lapisan tipis fluida *power-law* yang menuruni bidang miring dengan menggunakan pendekatan lubrikasi.

## 2. METODE PENELITIAN

Langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah menurunkan persamaan-persamaan dasar dari hukum kesetimbangan yang mempengaruhi aliran fluida. Selanjutnya mengubah persamaan yang didapat menjadi persamaan dengan variable tidak memiliki dimensi. Setelah itu persamaan diselesaikan melalui proses integrasi sehingga didapat solusi hasil integrasi yang akan menjelaskan aliran fluida pada bidang miring.

Fluida yang dikaji berada pada suatu bidang miring seperti yang diilustrasikan pada Gambar 1. Ketinggian fluida pada garis koordinat  $x$  di waktu  $t$  dinotasikan  $h(x, t)$  dan posisi fluida yang searah sumbu  $x$  di waktu  $t$  dinotasikan  $x_N(t)$ . Selanjutnya  $\alpha$  merupakan kemiringan bidang dan  $g$  merupakan gaya gravitasi. Ilustrasi terdapat pada Gambar 1.



GAMBAR 1. Fluida lapisan tipis mengalir di bidang miring.

Dalam membangun model aliran fluida bidang miring pada lapisan tipis ada beberapa hal yang perlu diperhatikan untuk mendekati model yang diharapkan, yaitu:

1. Permasalahan ditinjau sebagai masalah dua dimensi dan diturunkan terhadap waktu.
2. Permukaan bidang miring merupakan permukaan yang halus.
3. Sudut bidang miring ( $\alpha$ ) terletak pada  $0 < \alpha < 90$ .
4. Aliran fluida bersifat tidak termampatkan (*incompressible*).
5. Fluida diasumsikan sebagai fluida tak berotasi (*irrotational*).
6. Fluida yang mengalir merupakan fluida lapisan tipis.
7. Suhu diabaikan.
8. Fluida memiliki kekentalan tinggi sehingga fluida mengalir merayap atau bergerak perlahan.
9. Gaya inersia sangat kecil sehingga mengakibatkan bilang Reynolds sangat kecil.

Kemudian dalam membangun model aliran fluida diperlukan juga persamaan dasar dari hukum kesetimbangan yaitu hukum kekekalan massa dan hukum kekekalan momentum yang menghasilkan persamaan kontinuitas dan persamaan *Navier-Stokes*. Dalam membangun parameter-parameter yang ada pada persamaan *Navier-Stokes* diperlukan model *power-law*.

**2.1. Model Power-Law.** Model *power-law* biasa juga disebut model Ostwald de Waele yaitu model yang menggambarkan perilaku fluida non-Newtonian tentang hubungan *shear stress* dan *shear rate*. Model *power-law* diperkenalkan oleh Ostwald (1925) dan de Waele (1923) [7]. Model *power-law* dapat dituliskan (Irgens, [8]):

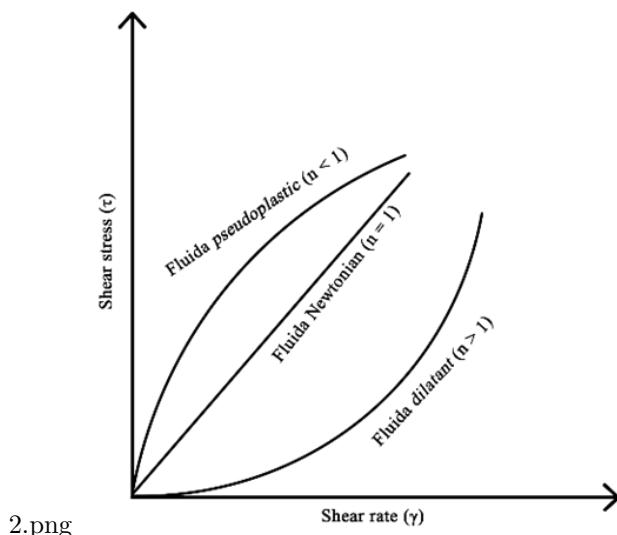
$$\eta = k\gamma^{n-1}, \quad (1)$$

dengan:

- $\eta$  : viskositas (untuk fluida non-Newtonian),
- $n$  : indeks *power-law*,
- $k$  : indeks konsistensi aliran,
- $\gamma$  : besaran *shear rate*.

Model *power-law* digunakan untuk memodelkan fluida non-Newtonian. Fluida non-Newtonian dapat dibagi menjadi dua tipe yaitu fluida *pseudoplastic* dan fluida *dilatant*. Untuk fluida *pseudoplastic* ( $n < 1$ ), terjadi suatu fenomena dimana viskositasnya cenderung menurun tetapi *shear stress* dari fluida ini akan semakin meningkat. Salah satu contoh dari fluida *pseudoplastic* adalah minyak mineral dan *polymer additive*.

Pada fluida *dilatant* ( $n > 1$ ), fluida ini mempunyai perilaku aliran yang berlawanan dengan fluida *pseudoplastic* yaitu terjadi fenomena dimana viskositas dan *shear stress* dari fluida ini akan cenderung mengalami peningkatan. Contoh dari jenis ini adalah pasta. Dalam model fluida *power-law*, *shear stress*, dan *shear rate* ditunjukkan pada Gambar 2 (Chhabra dan Richardson, [9]).



GAMBAR 2. Kurva hubungan jenis fluida antara *shear stress* dan *shear rate*.

Setelah membangun persamaan *Navier-Stokes* dengan menggunakan model *power-law*, persamaan *Navier-Stokes* diubah ke dalam bentuk persamaan tanpa dimensi. Dimana konsep membuat tanpa dimensi yaitu menghilangkan satuan dari persamaan yang didapat (Subagyo dan Mursadin, [10]). Dalam konsep mekanika fluida, salah satu parameter tanpa dimensi adalah bilangan Reynolds.

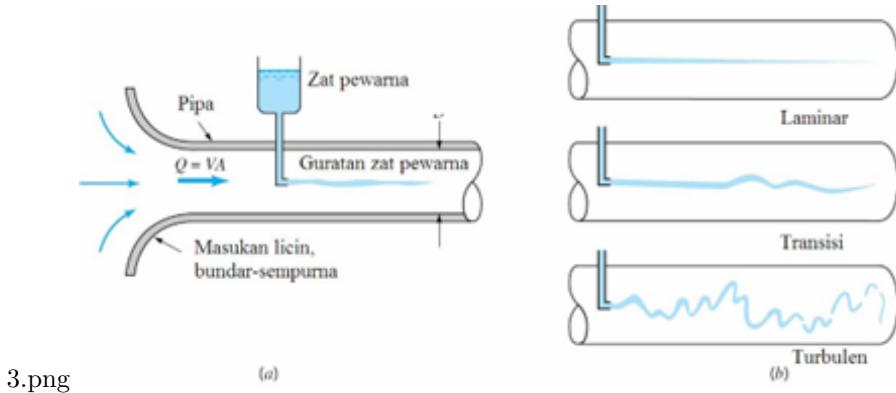
**2.2. Bilangan Reynolds.** Bilangan Reynolds adalah bilangan yang tidak mempunyai dimensi, dimana menyatakan perbandingan gaya-gaya inersia terhadap gaya-gaya kekentalan. Bilangan Reynolds menunjukan bahwa suatu aliran dapat diklasifikasikan dalam nilai atau angka tertentu. Bilangan Reynolds dirumuskan sebagai:

$$Re = \frac{\rho U l}{\mu}, \quad (2)$$

dengan:

- $Re$  : bilangan Reynolds,
- $\rho$  : massa jenis ( $kg/m^3$ ),
- $U$  : kecepatan ( $m/s$ ),
- $l$  : panjang ( $m$ ),
- $\mu$  : viskositas ( $N.s/m^2$ ).

Osborne Reynolds (1842-1912), Ilmuwan matematika Inggris, adalah orang yang pertama kali yang membedakan klasifikasi aliran dengan peralatan sederhana yang bisa di lihat pada Gambar 3.



GAMBAR 3. Ilustrasi setiap jenis aliran.

Dari Gambar 3 dapat dilihat bahwa klasifikasi aliran dapat dibedakan menjadi 3 aliran, yaitu aliran laminar, transisi, dan turbulen.

#### 1. Aliran laminar

Aliran laminar adalah aliran dimana fluida bergerak dengan kondisi lapisan-lapisan yang membentuk garis-garis alir yang tidak saling berpotongan satu sama lain. Fluida dapat dikatakan aliran laminer jika  $Re \leq 2000$ .

#### 2. Aliran transisi

Aliran transisi adalah aliran dimana fluida beralih dari aliran laminar ke aliran turbulen. Fluida dapat dikatakan aliran transisi jika  $2000 \leq Re \leq 4000$ .

#### 3. Aliran turbulen

Aliran turbulen adalah aliran dimana fluida yaitu partikel-partikelnya bergerak secara acak dan tidak stabil dengan kecepatan berfluktuasi yang saling berinteraksi. Dengan kata lain pergerakan dari garis alir partikel fluidanya bisa saling berpotongan. Fluida dapat dikatakan aliran turbulen jika  $Re \geq 4000$  (Nurcholis, [12]).

### 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pemodelan aliran fluida pada bidang miring dengan geometri yang disajikan pada Gambar 1, dimulai dengan menggunakan persamaan kontinuitas dan persamaan *Navier-Stokes*. Persamaan ini dibentuk melalui hukum kekekalan massa dan hukum kekekalan momentum,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \alpha, \quad (4)$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \cos \alpha. \quad (5)$$

Tegangan geser ( $\tau$ ) pada persamaan *Navier-Stokes* dicari dengan menggunakan model *power-law*. Persamaan *power-law* dari keadaan fluida yang tidak dapat dimampatkan (*incompressible*) didefinisikan sebagai (Irgens, [8]):

$$\tau_{ij} = 2k [2D_{ml}D_{lm}]^{\frac{n-1}{2}} D_{ij}, \quad (6)$$

dengan  $D_{ij}$  adalah tensor laju regangan yang diberikan oleh komponen kecepatan ( $U$ ) yang ditentukan oleh:

$$D_{ij} = \frac{1}{2} (\partial U_{i,j} + \partial U_{j,i}). \quad (7)$$

Indeks  $i$  dan  $j$  merupakan arah tensor laju regangan. Selanjutnya  $2D_{ml}D_{lm}$  adalah besaran *shear rate*, yang dapat didefinisikan sebagai:

$$2D_{ml}D_{lm} = 2trD^2, \quad (8)$$

di mana bentuk dari  $D$  pada persamaan (8) adalah

$$D = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Menggunakan persamaan (7), (8), dan (9) maka akan didapatkan:

$$\left. \begin{aligned} D_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & D_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ D_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & D_{ml}D_{lm} &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Diasumsikan aliran fluida lapisan tipis yaitu kedalaman lapisan ( $h_0$ ) tidak melebihi panjang kemiringan permukaan ( $l_0$ ). Asumsi ini dapat dituliskan

$$\epsilon = \frac{h_0}{l_0} \ll 1. \quad (11)$$

Misal diperkenalkan koordinat tanpa dimensi yaitu:

$$x' = \frac{x}{l_0}, \quad z' = \frac{z}{h_0}, \quad (12)$$

begitu juga komponen kecepatan  $u$  dan  $w$  dibuat menjadi tanpa dimensi juga, sehingga menjadi:

$$u = U_0 u', \quad w = \epsilon U_0 w'. \quad (13)$$

Dengan menggunakan persamaan (11), (12), dan (13), maka persamaan (10) berubah bentuk menjadi tanpa dimensi yaitu:

$$\left. \begin{aligned} D_{xx} &= \frac{U_0}{l_0} \frac{\partial u'}{\partial x'} & D_{zz} &= \frac{U_0}{l_0} \frac{\partial w'}{\partial z'} \\ D_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{U_0}{\epsilon l_0} \right) \frac{\partial u'}{\partial z'} & D_{ml}D_{lm} &= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial(U_0 u')}{\partial(z' h_0)} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{U_0}{h_0} \right)^2 \left( \frac{\partial u'}{\partial z'} \right)^2 \end{aligned} \right\}. \quad (14)$$

Selanjutnya mensubstitusikan persamaan (14) ke dalam persamaan (6), sehingga didapatkan:

$$\tau_{xx} = 2k\epsilon \left( \frac{U_0}{h_0} \right)^n \left| \frac{\partial u'}{\partial z'} \right|^{n-1} \frac{\partial u'}{\partial x'}, \quad (15)$$

$$\tau_{xz} = k \left( \frac{U_0}{h_0} \right)^n \left| \frac{\partial u'}{\partial z'} \right|^{n-1} \frac{\partial u'}{\partial z'}, \quad (16)$$

$$\tau_{zz} = 2k\epsilon \left( \frac{U_0}{h_0} \right)^n \left| \frac{\partial u'}{\partial z'} \right|^{n-1} \frac{\partial w'}{\partial z'}. \quad (17)$$

Diasumsikan bahwa nilai  $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$  pada persamaan *Navier-Stokes* sama besarnya dengan  $\frac{\partial p}{\partial x}$ . dalam penelitian Johnson dan Mangkoesoebroto tahun 1993 [13] dari pertimbangan fisik bahwa dalam pendekatan film tipis, gradien tekanan  $\frac{\partial p}{\partial x}$  dan  $\frac{\partial \tau}{\partial z}$  memiliki nilai yang sama besarnya. Suku inersia dapat diabaikan, sehingga didapatkan  $p = \frac{k}{\epsilon} \left( \frac{U_0}{h_0} \right)^n$ . Karena bentuk  $p$  masih memiliki dimensi maka dibuat menjadi tanpa dimensi, sehingga menjadi:

$$p = \frac{k}{\epsilon} \left( \frac{U_0}{h_0} \right)^n p'. \quad (18)$$

Substitusikan persamaan (11)-(18) ke dalam persamaan (4) dan (5), untuk menjadi bentuk tanpa dimensi, sehingga menjadi

$$\begin{aligned} \left( \frac{\rho \epsilon^{1+n} U_0^{2-n} l_0^n}{k} \right) \left( \frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + w' \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) &= \left( 2\epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x'} \left( \left| \frac{\partial u'}{\partial z'} \right|^{n-1} \frac{\partial u'}{\partial x'} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z'} \left( \left| \frac{\partial u'}{\partial z'} \right|^{n-1} \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) - \frac{\partial p'}{\partial x'} \right. \\ &\quad \left. + \rho g \sin \alpha \left( \frac{h_0^{1+n}}{k U_0^n} \right) \right), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \left( \frac{\rho \epsilon^{1+n} U_0^{2-n} l_0^n}{k} \right) \left( \frac{\partial w'}{\partial t'} + u' \frac{\partial w'}{\partial x'} + w' \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) &= \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x'} \left( \left| \frac{\partial u'}{\partial z'} \right|^{n-1} \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) \\ &\quad + 2\epsilon^2 \frac{\partial}{\partial z'} \left( \left| \frac{\partial u'}{\partial z'} \right|^{n-1} \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) - \frac{\partial p'}{\partial z'} \\ &\quad - \epsilon \rho g \cos \alpha \left( \frac{h_0^{1+n}}{k U_0^n} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Karena mempertimbangkan aliran yang sangat kental menuruni bidang miring, suku inersia sangat kecil yang mengakibatkan bilangan Reynolds sangat kecil  $\left( \frac{\rho \epsilon^{1+n} U_0^{2-n} l_0^n}{k} \right) \ll 1$ , sehingga pada sisi kiri pada persamaan (19) dan (20) dapat diabaikan. Sehingga didapatkan

$$0 = \left( 2\epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x'} \left( \left| \frac{\partial u'}{\partial z'} \right|^{n-1} \frac{\partial u'}{\partial x'} \right) + \frac{\partial}{\partial z'} \left( \left| \frac{\partial u'}{\partial z'} \right|^{n-1} \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) - \frac{\partial p'}{\partial x'} + \rho g \sin \alpha \left( \frac{h_0^{1+n}}{k U_0^n} \right) \right), \quad (21)$$

$$0 = \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x'} \left( \left| \frac{\partial u'}{\partial z'} \right|^{n-1} \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) + 2\epsilon^2 \frac{\partial}{\partial z'} \left( \left| \frac{\partial u'}{\partial z'} \right|^{n-1} \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) - \frac{\partial p'}{\partial z'} - \epsilon \rho g \cos \alpha \left( \frac{h_0^{1+n}}{k U_0^n} \right). \quad (22)$$

Elanjutnya persamaan (21) dan (22) diubah menjadi bentuk berdimensi kembali dengan memanfaatkan persamaan (11), (12), (13) dan (18), sehingga menjadi:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{k}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^n + g \sin \alpha, \quad (23)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \cos \alpha. \quad (24)$$

Integralkan persamaan (24) terhadap  $z$ , didapatkan

$$p(x, z, t) = -\rho g z \cos \alpha + A(x, t), \quad (25)$$

di mana  $A$  adalah fungsi dari  $x$  dan  $t$  sebarang yang merupakan konstanta pengintegralan. Karena fluida diletakkan di permukaan bebas yaitu bidang miring maka  $z = h(x, t)$ . Dengan menggunakan nilai tekanan atmosfer ( $p_0$ ) pada persamaan (25), nilai  $A(x, t)$  dapat diperoleh

$$A(x, t) = p_0 + \rho g h(x, t) \cos \alpha. \quad (26)$$

Kemudian mensubstitusikan persamaan (26) ke dalam persamaan (25), sehingga menjadi:

$$p(x, z, t) = p_0 + \rho g (h(x, t) - z) \cos \alpha. \quad (27)$$

Substitusikan persamaan (27) ke dalam persamaan (23), lalu didapatkan

$$K \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^n = \frac{\partial h}{\partial x} (g \cos \alpha) - g \sin \alpha, \quad (28)$$

di mana  $K = \frac{k}{\rho}$ . Karena kondisi fluida adalah lapisan tipis maka ketinggian fluida dari permukaan bidang miring ( $h$ ) kecil atau mengabaikan  $\frac{\partial h}{\partial x}$ , sehingga persamaan (28) berubah menjadi:

$$K \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^n = -g \sin \alpha. \quad (29)$$

Integralkan persamaan (29) terhadap  $z$ , didapatkan:

$$K \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^n = -gz \sin \alpha + f(x, t), \quad (30)$$

dengan  $f(x, t)$  adalah fungsi sebarang yang merupakan konstanta hasil pengintegralan. Pada permukaan bebas, tegangan geser  $\tau_{xz}$  lenyap. Berdasarkan persamaan (16), saat  $\tau_{xz} = 0$ , maka  $K \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^n$  dapat diabaikan. Dan dari persamaan (30), nilai  $f(x, t)$  adalah

$$f(x, t) = g h(x, t) \sin \alpha. \quad (31)$$

Menggunakan persamaan (31), persamaan (30) dapat ditulis kembali menjadi:

$$K \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^n = g (h(x, t) - z) \sin \alpha. \quad (32)$$

persamaan (32) dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial z} = a(\alpha, n) (h(x, t) - z)^{\frac{1}{n}}, \quad (33)$$

engan  $a(\alpha, n) = \left( \frac{g \sin \alpha}{K} \right)^{\frac{1}{n}}$ . Selanjutnya dengan mengintegralkan persamaan (32) terhadap  $z$  dengan memfaatkan kondisi batas  $u = 0$  dan  $z = 0$ , didapatkan:

$$u(x, z, t) = \frac{na(\alpha, n)}{n+1} \left( (h(x, t))^{\frac{n+1}{n}} - (h(x, t) - z)^{\frac{n+1}{n}} \right). \quad (34)$$

Persamaan (34) disubstitusikan ke dalam persamaan (3), didapat:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -a(\alpha, n) \frac{\partial h}{\partial x} \left( (h(x, t))^{\frac{1}{n}} - (h(x, t) - z)^{\frac{1}{n}} \right). \quad (35)$$

Integralkan persamaan (35) terhadap  $z$  dengan memfaatkan kondisi batas  $w = 0$  dan  $z = 0$ , maka didapatkan:

$$w = a(\alpha, n) \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \left( \frac{n}{n+1} \left( (h(x, t))^{\frac{n+1}{n}} - (h(x, t) - z)^{\frac{n+1}{n}} \right) - z (h(x, t))^{\frac{1}{n}} \right). \quad (36)$$

Karena fluida diletakkan di permukaan bebas yaitu bidang miring, maka  $z = h(x, t)$  atau dapat ditulis  $h(x, t) - z = 0$ . Untuk suatu partikel yang berada pada koordinat  $(x, z)$  dan partikel tersebut berada pada permukaan, maka dapat dinyatakan  $\frac{\partial(h(x,t)-z)}{\partial t} = 0$ . Dengan memanfaatkan aturan rantai di mana  $\frac{\partial x}{\partial t}$  dan  $\frac{\partial z}{\partial t}$  adalah arah kecepatan koordinat  $x$  dan  $z$  dimisalkan secara berturut-turut adalah  $u$  dan  $w$ . Maka didapatkan persamaan kinematik di permukaan bebas, yaitu:

$$w|_{z=h(x,t)} = \frac{\partial h}{\partial t} + u(x, h, t) \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (37)$$

substitusikan persamaan (34) dan (36) ke dalam persamaan (27), maka didapatkan:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \left( \frac{g \sin \alpha}{K} \right)^{\frac{1}{n}} (h)^{\frac{n+1}{n}} \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (38)$$

Persamaan (38) adalah model aliran fluida lapisan tipis yang menuruni bidang miring. Selanjutnya dicari solusi dari model yang didapat. Persamaan (38) merupakan persamaan

quasi linear orde pertama. Untuk mencari solusi dari persamaan (38), ditentukan persamaan karakteristik dari persamaan (38), yaitu:

$$\frac{\frac{\partial t}{\partial s}}{1} = \frac{\frac{\partial x}{\partial s}}{\left(\frac{g \sin \alpha}{K}\right)^{\frac{1}{n}} (h)^{\frac{n+1}{n}}}, \quad \frac{\partial h}{\partial s} = 0, \quad (39)$$

sehingga penyelesaian pada persamaan (39) dapat dituliskan

$$c_1 = x - tk_1, \quad c_2 = h. \quad (40)$$

Setelah didapatkan penyelesaian dari persamaan karakteristik (39), selanjutnya dicari solusi umum dari persamaan (38), yaitu:

$$\begin{aligned} f(c_1, c_2) &= 0, \\ c_2 &= F(c_1). \end{aligned} \quad (41)$$

Substitusikan persamaan (40) ke dalam persamaan (41), sehingga menjadi

$$h(x, t) = F\left(x - \left(\left(\frac{g \sin \alpha}{K}\right)^{\frac{1}{n}} (h)^{\frac{n+1}{n}}\right)t\right). \quad (42)$$

Persamaan (42) adalah solusi dari model aliran fluida lapisan tipis yang menuruni bidang miring, dimana  $F$  merupakan fungsi dari sembarang variabel tunggal. Dari persamaan (42) dapat terlihat bahwa nilai  $h$  menuruni bidang miring dengan kecepatan  $\left(\frac{g h^{n+1} \sin \alpha}{K}\right)^{\frac{1}{n}}$ .

Selanjutnya dianggap bahwa bentuk gumpalan (fluida) dua dimensi dengan menggunakan model *power-law* itu terbatas di setiap waktu (saat  $t$ ), yang menempati wilayah  $0 \leq x \leq x_N(t)$ , di mana  $x_N(t)$  adalah posisi fluida bagian depan. Karena nilai  $n$  dan  $K$  yang lebih besar dari  $h$  maka fluida akan bergerak lebih cepat, yang mengakibatkan bagian belakang gumpalan akan memperoleh kemiringan yang lebih landai seiring berjalananya waktu, sedangkan bagian depan akan semakin curam. Untuk mencari posisi fluida bagian depan, digunakan penelitian Huppert tahun 1982 [14], yang menyajikan ekspresi untuk posisi fluida bagian depan ( $x_N(t)$ ), yang ditentukan oleh tegangan permukaan dan tidak tergantung pada koefisien viskositas.

Persamaan (38) menunjukkan bahwa  $h$  konstan sepanjang karakteristik yang diberikan oleh

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \left(\frac{g \sin \alpha}{K}\right)^{\frac{1}{n}} (h)^{\frac{n+1}{n}}. \quad (43)$$

Misalkan bahwa  $h = f_1(x)$ . Persamaan karakteristik (43) dapat diintegralkan terhadap  $t$  sehingga menjadi

$$x = \left(\frac{g \sin \alpha}{K}\right)^{\frac{1}{n}} f_1^{\frac{n+1}{n}}(x) t + c. \quad (44)$$

Pada saat  $x_0$ , nilai  $c$  dapat dituliskan menjadi

$$c = x_0 - \left(\frac{g \sin \alpha}{K}\right)^{\frac{1}{n}} f_1^{\frac{n+1}{n}}(x_0) t. \quad (45)$$

Katakan  $x$  adalah  $x_0$  yang merupakan nilai awal dari karakteristik. Substitusikan persamaan (45) ke dalam persamaan (44), sehingga menjadi

$$x = x_0 + \left(\frac{g \sin \alpha}{K}\right)^{\frac{1}{n}} f_1^{\frac{n+1}{n}}(x - x_0) t. \quad (46)$$

Persamaan (46) dapat disederhanakan menjadi

$$f_1(x) = x^{\frac{n}{n+1}} \left(\frac{g \sin \alpha}{K}\right)^{-\frac{n}{n(n+1)}} t^{-\frac{n}{n+1}} ; (x \gg x_0), \quad (47)$$

atau dapat ditulis

$$h(x, t) = \left( \frac{K}{g \sin \alpha} \right)^{\frac{1}{n+1}} x^{\frac{n}{n+1}} t^{-\frac{n}{n+1}}. \quad (48)$$

Karena gumpalan harus tetap konstan, persamaan (48) diintegralkan dengan batas  $0 \leq x \leq x_N(t)$ , menjadi:

$$\int_0^{x_N(t)} h(x, t) dx = C, \quad (49)$$

di mana  $C$  adalah konstanta yang menunjukkan luas penampang gumpalan. Selanjutnya di substitusikan persamaan (48) ke dalam persamaan (49), sehingga menjadi:

$$x_N(t, n) = \left( \frac{C^{n+1} g \sin \alpha}{K} \right)^{\frac{1}{2n+1}} (t)^{\frac{n}{2n+1}} \left( \frac{2n+1}{n+1} \right)^{\frac{n+1}{2n+1}}, \quad (50)$$

menurut penelitian Huppert [14] yang telah mengamati hasil normalisasi dari berbagai pengamatan, nilai  $C$  yang mewakili dengan baik adalah ketika  $C^{\frac{1}{2}}$ . Dengan demikian persamaan (50) dapat ditulis menjadi:

$$x_N(t, n) = \left( \frac{C^{\frac{1}{2}} g \sin \alpha}{K} \right)^{\frac{1}{2n+1}} (t)^{\frac{n}{2n+1}} \left( \frac{2n+1}{n+1} \right)^{\frac{n+1}{2n+1}}. \quad (51)$$

Pada persamaan (51) nilai  $C^{\frac{1}{2}}$  masih memiliki dimensi panjangnya ( $m$ ), sehingga ketika  $\frac{x_N(t, n)}{C^{\frac{1}{2}}}$  maka nilai  $C^{\frac{1}{2}}$  menjadi tanpa dimensi. Selanjutnya pada persamaan (51) juga  $\left( \frac{C^{\frac{1}{2}} g \sin \alpha}{K} \right)^{\frac{1}{n}}$  memiliki dimensi waktu ( $s$ ), sehingga dapat ditulis sebagai:

$$\bar{x}_N(\bar{t}, n) = \frac{x_N(t, n)}{C^{\frac{1}{2}}}; \quad \bar{t} = \left( \frac{C^{\frac{1}{2}} g \sin \alpha}{K} \right)^{\frac{1}{n}} t, \quad (52)$$

di mana  $\bar{x}_N(\bar{t}, n)$  dan  $\bar{t}$  adalah variabel tanpa dimensi, dengan menggunakan persamaan (52) lalu disubstitusikan ke dalam persamaan (51). Sehingga persamaan (51) menjadi bentuk tanpa dimensi yaitu:

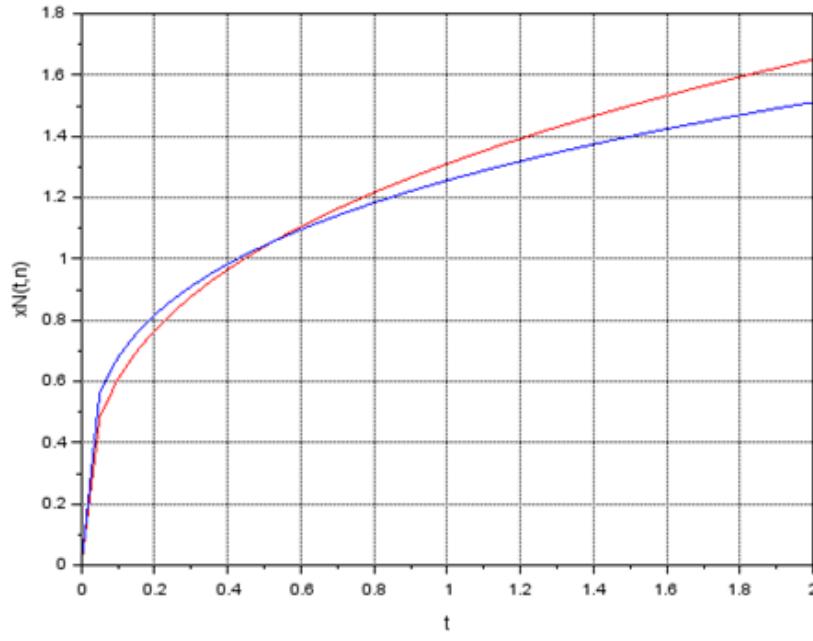
$$\bar{x}_N(\bar{t}, n) = \left( \frac{2n+1}{n+1} \right)^{\frac{n+1}{2n+1}} (\bar{t})^{\frac{n}{2n+1}}. \quad (53)$$

Persamaan (53) merupakan solusi dari model aliran fluida yang menuruni bidang miring. Untuk memudahkan dalam menjelaskan solusi yang didapat, diberikan nilai parameter  $n$ , yaitu minyak zaitun ( $n = 1$ ), dan cokelat ( $n = 0,574$ ) (Steff, [15]). Gambar 4 menjelaskan solusi yang sudah diberikan parameter.

Pada Gambar 4, variasi dari  $\bar{x}_N$  dengan  $\bar{t}$  yang diplot untuk beberapa nilai  $n$ , yaitu  $n = 1$  dan  $n = 0,574$  berdasarkan persamaan (53). Dapat dijelaskan bahwa pada waktu dibawah 0,5, untuk  $n = 0,574$  lebih cepat menuruni bidang miring dibandingkan nilai  $n=1$ . Tetapi untuk waktu diatas 0,5, terjadi kebalikannya, yaitu untuk  $n = 0,574$  lebih lama menuruni bidang miring dibandingkan nilai  $n = 1$ .

#### 4. SIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian, diperoleh model matematika terhadap fluida lapisan tipis yang mengalir pada bidang miring dengan model *power-law*. Melalui pendekatan lubrikasi, persamaan yang mengatur aliran fluida dua dimensi diturunkan. Integrasi dari persamaan yang didapat menghasilkan model aliran fluida yang menuruni bidang miring, yang berupa persamaan diferensial parsial orde satu dengan variable terikat berupa ketinggian/ketebalan fluida yang tergantung waktu dan posisi aliran fluida bagian depan. Setelah proses penghitungan, didapatkan solusi yang menunjukkan posisi aliran fluida yang mengalir menuruni bidang miring. Dari ilustrasi dengan parameter yang digunakan dengan fluida dengan nilai indeks *power-law* tertentu lebih cepat menuruni bidang miring dibandingkan nilai *power-law* yang



4.png

GAMBAR 4. Variasi  $\bar{x}_N$  dengan waktu tanpa berdimensi  $\bar{t}$  untuk  $n = 1$  dan  $0,574$  dihitung dari persamaan (53).

lebih besar. Sampai batas waktu tertentu, setelah waktu tertentu terjadi kebalikannya, untuk nilai indeks *power-law* tertentu lebih lama menuruni bidang miring dibandingkan nilainya yang lebih besar.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1] Ang, K.C., 2001, Teaching mathematical modeling in Singapore schools, *The Mathematics Educator*, Pages 63-75.
- [2] Nasution, H., 2008, *Mekanika Fluida Dasar*, Bung Hatta University Press, Padang.
- [3] Halliday, D., Resnick, R., and Walker, J., 2010, *Fisika Dasar*, Erlangga, Jakarta.
- [4] Martanegara, H.A., Yulianti, K., and Yusnitha, I., 2020, Model Matematika Fluida Lapisan Tipis Pada Bidang Miring, *EurekaMatika*, Volume 8, Issue 1, Pages 29-41.
- [5] Halliday, D. and Resnick, R., 1985, *Fisika*, Erlangga, Jakarta.
- [6] Ganguly, A., Reza, M., and Gupta, A., 2012, Thin-Film Flow of a Power-Law Fluid Down an Inclined Plane, *Fluids Engineering*, Volume 132, Issue 4, Pages 1-5.
- [7] Shapovalov, V.M., 2017, On The Applicability Of The Ostwald-de Waele Model In Solving Applied Problems, *Engineering Physics and Thermophysics*, Volume 90, Issue 5, Pages 1213-1218.
- [8] Irgens, F., 2014, *Rheology and Non-Newtonian Fluids*, Springer, New York.
- [9] Chhabra, R.P. abd Richardson, J.F., 2008, *Non-Newtonian Flow and Applied Rheology*, Butterworth-Heinemann/Elsevier, Amsterdam.
- [10] Subagyo, R. and Mursadin, A., 2017, *Mekanika Fluida II*, Prodi Teknik Mesin Universitas Lambung Mangkurat, Banjarbaru.
- [11] Potter, M.C., 2011, *Mekanika Fluida*, Erlangga, Jakarta.
- [12] Nurcholis, L., 2008, Perhitungan Laju Aliran Fluida Pada Jaringan Pipa, *TRAKSI*, Volume 6, Issue 1, Pages 19-31.
- [13] Johnson, M.W. and Mangkoesoebroto, S., 1993, Analysis of Lubrication Theory for the Power Law Fluid, *Tribology*, Volume 115, Pages 71-77.
- [14] Huppert, H.E., 1983, Flow and Instability of a Viscous Current Down a Slope, *Nature*, Volume 300, Issue 5891, Pages 427-429.

[15] Steff, J.F., 1996, *Rheological Methods In Food Process Engineering*, 2 ed., Freeman Press, USA.