Jurnal Matematika Integratif. p-ISSN:1412-6184, e-ISSN:2549-903
Vol. 19, No. 2 (2023), pp. 213–222. doi:10.24198/jmi.v19.n2.41896.213-222

Penyelesaian Masalah Nilai Awal PDB Linear Orde Tiga Dengan Koefisien Konstan Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian

Fathudin, Aang Nuryaman, dan Ahmad Faisol

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Lampung
Jl. Soemantri Brojonegoro No 1, Gedong Meneng, Bandarlampung 35145
Email: fathudinuzin@gmail.com, aang.nuryaman@fmipa.unila.ac.id, ahmadfaisol@fmipa.unila.ac.id

Abstrak
Banyak masalah fenomena alam yang dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial. Sering kali untuk memahami fenomena tersebut diperlukan penyelesaian dari persamaan diferensial tersebut. Metode Dekomposisi Adomian (MDA) merupakan salah satu metode yang telah banyak digunakan dalam menyelesaikan model matematika dalam bentuk persamaan diferensial, baik Persamaan Diferensial Biasa (PDB) maupun Persamaan Diferensial Parsial (PDP). Metode ini dibagi menjadi tiga langkah inti. Langkah pertama adalah menguraikan bagian F dari persamaan operator $Fy(x) = g(x)$ menjadi L dan R, di mana L adalah operator linear yang memiliki invers dan R adalah operator linear lainnya. Langkah kedua adalah mengoperasikan invers dari operator L dalam persamaan ini untuk mendapatkan $y(x)$ dan langkah ketiga mengasumsikan solusi yang diperoleh pada langkah kedua berbentuk deret fungsi yang memberikan relasi rekursif dan kemudian menyelesaikannya. Penelitian ini bertujuan menerapkan MDA pada masalah nilai awal persamaan diferensial biasa linear orde ketiga dengan koefisien konstan baik homogen maupun tak homogen. Berdasarkan perbandingan solusi eksak dengan solusi menggunakan MDA hingga suku keempat, hasilnya menunjukkan bahwa solusi hampiran sesuai dengan solusi eksak.
Kata kunci: Metode Dekomposisi Adomian, Persamaan Diferensial Biasa, masalah nilai awal.

2000 Mathematics Subject Classification: 34A05
Received: 14-09-2023, accepted: 18-11-2023.

Abstract
Many natural phenomena problems can be modeled in the form of differential equations. Often to understand this phenomenon requires solving the differential equation. The Adomian Decomposition Method (ADM) is a method that has been widely used in solving mathematical models in the form of differential equations, both Ordinary Differential Equations (ODE) and Partial Differential Equations (PDE). This method is divided into three core steps. The first step is to decompose the $\mathbf{F}$*part of the operator equation* $\mathbf{Fy}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x})$*into* $\mathbf{L}$*and* $\mathbf{R}$*, where* $\mathbf{L}$*is a linear operator that has an inverse and* $\mathbf{R}$*is another linear operator. The second step is to operate the inverse of the* $\mathbf{L}$*operator on this equation to get y(x) and the third step assumes the solution obtained in the second step is in the form of a function series that gives a recursive relation and then solves it. This study will apply the ADM to the initial value problem of a third-order linear ordinary differential equation with constant coefficients, both homogeneous and inhomogeneous. Based on the comparison of the exact solution with the solution using the ADM to the fourth term, the results show that the approximate solution corresponds to the exact solution.*
Keywords: *Adomian Decomposition Method, Ordinary Differential Equations, the initial value problem.*

1. Pendahuluan

Persamaan diferensial merupakan salah satu konsep matematika yang banyak digunakan dalam pemodelan matematika suatu fenomena alam pada berbagai bidang ilmu seperti fisika, teknik, biologi, kimia, ekonomi, dan lain-lain [1]. Beberapa penerapan persamaan diferensial, khususnya persamaan diferensial biasa, dalam pemodelan matematika dapat dilihat pada [2], [3], dan [4]. Terkait dengan sifat fisis, persamaan diferensial biasa umumnya dilengkapi dengan nilai awal dan nilai batas. Persamaan diferensial biasa yang dilengkapi dengan nilai awal disebut masalah nilai awal, sedangkan persamaan diferensial biasa dengan nilai batas disebut masalah nilai batas. Berdasarkan kelinearannya persamaan diferensial biasa terbagi menjadi dua bagian yaitu persamaan diferensial biasa linear dan persamaan diferensial biasa nonlinear [5].

Terkait penyelesaian masalah nilai awal maupun masalah nilai batas, terkadang teknik-teknik analitik tidak dapat digunakan untuk mendapatkan solusi eksaknya. Untuk itu, diperlukan metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah tersebut. Pendekatan yang digunakan dalam metode numerik merupakan pendekatan analisis matematis. Sehingga hasil yang diperoleh merupakan nilai hampiran yang akan mendekati nilai sebenarnya [6].

Banyak metode yang telah dikembangkan untuk menyelesaikan masalah nilai awal pada persamaan diferensial biasa, salah satunya adalah Metode Dekomposisi Adomian (MDA). Matode ini diperkenalkan dan dikembangkan pada tahun 1970-an hingga 1990-an oleh George Adomian, ketua PT pusat Matematika terapan di Universitas Georgia. MDA adalah metode semi-analitik untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial [7] – [8].

Beberapa penelitian sebelumnya banyak dibahas mengenai aplikasi metode dekomposisi adomian untuk masalah nilai awal. Misalnya Fadugba, *et al.* [7], yang telah mengilustrasikan penyelesaian persamaan diferensial biasa odre dua menggunakan metode ini. Selanjutnya Mirawati, *et al.* [8], telah memodifikasi metode ini pada operator linearnya untuk menyelesaikan masalah nilai awal persamaan diferensial biasa orde dua. Kemudian artikel yang disusun oleh Anita [9], yang menggunakan metode ini untuk menyelesaikan persamaan parabolik. Selanjutnya pada artikel yang disusun oleh Maria [10] yang menggunakan metode tersebut untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial nonlinear.

Oleh karena itu, pada penelitian kali ini akan dikaji penggunaan MDA pada kasus Masalah Nilai Awal Persamaan Diferensial Orde Tiga. Mengingat luasnya persamaan diferensial maka penulis akan membatasi untuk persamaan diferensial biasa linear dengan koefisien konstan dalam kasus homogen dan nonhomogen.

Tujuan penelitian ini adalah mengkonstruksi dan mengaplikasikan MDA untuk menyelesaikan masalah nilai awal persamaan diferensial biasa linear orde tiga yang berbentuk

$$s\left(x\right)\frac{d^3y}{dx^3}+p\left(x\right)\frac{d^2y}{dx^2}+q\left(x\right)\frac{dy}{dx}+r\left(x\right)y=g(x)$$

dengan $s\left(x\right),p\left(x\right),q\left(x\right)danr(x)$ berupa fungsi konstan dengan x sebagai variabel bebas dan dilengkapi dengan nilai awal $y\left(0\right)=\alpha,y^{'}\left(0\right)=\beta,y^{''}\left(0\right)=\mu$.

2. Metode Penelitian

Pada bagian ini akan disajikan secara singkat kontruksi solusi masalah nilai awal PDB orde-3 menggunakan MDA. Penjelasan lebih lengkap mengenai metode ini dapat dilihat pada [7]. Tinjau masalah nilai awal berupa PDB linear orde-3 dengan koefisien konstan dalam bentuk umum:

$$\begin{array}{c} a_3\frac{d^3y}{dx^3}+a_2\frac{d^2y}{dx^2}+a_1\frac{dy}{dx}+a_0y=h\left(x\right)\\ y\left(0\right)=\alpha,y^{'}\left(0\right)=\beta,y^{''}\left(0\right)=\mu \end{array}\tag{1}$$

Dimana a_3,a_2,a_1,a_0 adalah konstanta dan $h(x)$ fungsi kontinu pada suatu interval $I\subseteq R$ dan $a_3\neq0$ untuk setiap x pada interval I. Berikut adalah langkah-langkah yang dilakukan dalam mengkontruksi penyelesaian masalah nilai awal (1).

Langkah pertama: Ubah Persamaan (1) ke dalam bentuk standar

$$\frac{d^3y}{dx^3}+p\frac{d^2y}{dx^2}+q\frac{dy}{dx}+ry=g(x)\tag{2}$$

dengan $p=\frac{a_2}{a_3},q=\frac{a_1}{a_3},r=\frac{a_0}{a_3}$, dan $g\left(x\right)=\frac{h(x)}{a_3}$.

Langkah kedua: Tinjau persamaan (2) dalam bentuk persamaan operator

$$Fy(x)=g(x)\tag{3}$$

dimana F merupakan operator diferensial biasa linear. Bagian linear dari F di dekomposisikan menjadi L dan R dengan $L=\frac{d^3}{dx^3}\left(.\right)$ merupakan operator linear yang mempunyai invers $L^{-1}=\int_0^x\int_0^x\int_0^x\left(.\right)dtdtdt$ dan R merupakan operator linear lainnya yaitu $p\frac{d^2}{dx^2}+q\frac{d}{dx}+r$. Dengan demikian persamaan (3) dapat ditulis menjadi

$$Ly\left(x\right)=g\left(x\right)-Ry\left(x\right)\tag{4}$$

Langkah ketiga: Operasikan operator L^{-1} di kedua ruas pada persamaan (4) sehingga diperoleh

$$L^{-1}Ly\left(x\right)=L^{-1}g\left(x\right)-L^{-1}Ry\left(x\right)\tag{5}$$

Langkah keempat: : Substitusikan syarat awal dan dengan menggunakan definisi L^{-1} maka persamaan (5) memberikan

$$y\left(x\right)=y\left(0\right)+xy^{'}\left(0\right)+\frac{y^{''}\left(0\right)}{2}x^2+L^{-1}g\left(x\right)-L^{-1}Ry\left(x\right)\tag{6}$$

Langkah kelima: : : Misalkan solusi $y(x)$ berbentuk deret $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ sehingga persamaan (6) menjadi

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = y(0) + xy^{'}(0) + \frac{y^{''}(0)}{2}x^2 + L^{-1}g(x) - L^{-1}R\sum_{n=0}^{\infty} y_n \tag{7}$$

Proses penyelesaian dengan menyamakan indeks dari kedua ruas persamaan (7) memberikan sistem persamaan rekursif sebagai berikut

$$y_0 = y(0) + xy^{'}(0) + \frac{y''}{2}x^2 + L^{-1}g(x) \tag{8}$$

$$y_n = -L^{-1}Ry_{n-1} \tag{9}$$

Berdasarkan solusi dari persamaan rekursif (8)-(9) maka hampiran solusi dari masalah nilai awal (1) diberikan oleh

$$Y_N(x) = \sum_{n=0}^{N} y_n = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_N \tag{10}$$

dengan $\lim_{N\to\infty} Y_N = y(x)$.

3. Hasil dan Pembahasan

Pada bab ini akan disajikan dua contoh penerapan MDA pada kasus persamaan diferensial biasa linear orde-3 homogen dan tak homogen. Untuk penyederhanaan, kasus yang akan ditinjau adalah persamaan diferensial dengan koefisien konstan.

Contoh 1:
Tinjau masalah nilai awal

$$\begin{gathered} y^{'''} + 3y^{''} - 4y^{'} - 12y = 0 \\ y(0) = 0, y^{'}(0) = 1, y^{''}(0) = 1 \end{gathered} \tag{11}$$

Solusi eksak dari masalah nilai awal (11) diberikan oleh

$$y(x) = \frac{3}{10}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{5}e^{-3x} \tag{12}$$

Bila fungsi eksponen di dalam solusi eksak pada persamaan (12) dinyatakan dalam bentuk deret Mac Laurin, maka solusi eksak dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y(x) = &\frac{3}{10}\left(1 + 2x + \frac{4}{2}x^2 + \frac{8}{6}x^3 + \frac{16}{24}x^4 + \frac{32}{120}x^5 + \frac{64}{720}x^6 + \ldots\right) \\ &-\frac{1}{2}\left(1 - 2x + \frac{4}{2}x^2 - \frac{8}{6}x^3 + \frac{16}{24}x^4 - \frac{32}{120}x^5 + \frac{64}{720}x^6 \mp \ldots\right) \\ &+\frac{1}{5}\left(1 - 3x + \frac{9}{2}x^2 - \frac{27}{6}x^3 + \frac{81}{24}x^4 - \frac{243}{120}x^5 + \frac{729}{720}x^6 \mp \ldots\right) \end{aligned} \tag{13}$$

$$y(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{13}{24}x^4 - \frac{23}{120}x^5 + \frac{133}{720}x^6 + \ldots \tag{14}$$

Tulis persamaan (11) ke dalam bentuk

$$y^{'''} = -\left(-12y - 4y^{'} + 3y^{''}\right) \tag{15}$$

Selanjutnya operasikan operator L^{-1} pada persamaan (15) yang memberikan

$$\int_0^x \int_0^x \int_0^x y^{'''}(t)\, dtdtdt = -L^{-1}\left(-12y - 4y^{'} + 3y^{''}\right) \tag{16}$$

Jika ruas kiri diintegralkan maka diperoleh

$$y(x) - y(0) - xy^{'}(0) - \frac{y^{''}(0)}{2}x^2 = -L^{-1}\left(-12y - 4y^{'} + 3y^{''}\right) \tag{17}$$

atau

$$y(x) = y(0) + xy^{'}(0) + \frac{y^{''}(0)}{2}x^2 - L^{-1}\left(-12y - 4y^{'} + 3y^{''}\right) \tag{18}$$

Kemudian jika $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ disubstitusikan ke persamaan (18) maka kita punya

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = y(0) + xy^{'}(0) + \frac{y^{''}(0)}{2}x^2 - L^{-1}\left(-12\sum_{n=0}^{\infty} y_n - 4\sum_{n=0}^{\infty} y_n^{'} + 3\sum_{n=0}^{\infty} y_n^{''}\right) \tag{19}$$

Proses menyamakan indeks dari kedua ruas pada persamaan (19) diperoleh relasi rekursi sebagai berikut:

$$y_0 = y(0) + xy^{'}(0) + \frac{y''(0)}{2}x^2 \tag{20}$$

$$y_1 = -L^{-1}\left(-12y_0 - 4y_0^{'} + 3y_0^{''}\right) \tag{21}$$

$$y_2 = -L^{-1}\left(-12y_1 - 4y_1^{'} + 3y_1^{''}\right) \tag{22}$$

$$\vdots$$

$$y_n = -L^{-1}\left(-12y_{n-1} - 4y_{n-1}^{'} + 3y_{n-1}^{''}\right) \tag{23}$$

Jika syarat awal pada persamaan (11) disubstitusikan ke persamaan (20) maka diperoleh

$$y_0 = x + \frac{x^2}{2} \tag{24}$$

Berdasarkan persamaan (24) maka persamaan (21) memberikan

$$y_1 = \int_0^x \int_0^x \int_0^x 12\left(t + \frac{t^2}{2}\right) dtdtdt + \int_0^x \int_0^x \int_0^x 4(1+t)\, dtdtdt - \int_0^x \int_0^x \int_0^x 3(1)\, dtdtdt$$

$$y_1 = \int_0^x \int_0^x \left(6t^2 + 2t^3\right) dtdt + \int_0^x \int_0^x \left(4t + 2t^2\right) dtdt - \int_0^x \int_0^x (3t)\, dtdt$$

$$= \int_0^x \left(2t^3 + \frac{1}{2}t^4\right) dt + \int_0^x \left(2t^2 + \frac{2}{3}t^3\right) dt - \int_0^x \left(\frac{3}{2}t^2\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{10}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^3 \tag{25}$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (25) pada persamaan (22) maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
y_2 &= \int_0^x \int_0^x \int_0^x 12\left(\frac{1}{10}t^5 + \frac{8}{12}t^4 + \frac{1}{6}t^3\right) dtdtdt + \int_0^x \int_0^x \int_0^x 4\left(\frac{1}{2}t^4 + \frac{8}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2\right) dtdtdt \\
&- \int_0^x \int_0^x \int_0^x 3\left(2t^3 + 8t^2 + t\right) dtdtdt \\
&= \int_0^x \int_0^x \left(\frac{6}{30}t^6 + \frac{8}{5}t^5 + \frac{1}{2}t^4\right) dtdt + \int_0^x \int_0^x \left(\frac{2}{5}t^5 + \frac{32}{12}t^4 + \frac{2}{3}t^3\right) dtdt \\
&- \int_0^x \int_0^x \left(\frac{3}{2}t^4 + 8t^3 + \frac{3}{2}t^2\right) dtdt \\
&= \int_0^x \left(\frac{1}{35}t^7 + \frac{8}{30}t^6 + \frac{1}{10}t^5\right) dt + \int_0^x \left(\frac{2}{30}t^6 + \frac{32}{60}t^5 + \frac{1}{6}t^4\right) dt \\
&- \int_0^x \left(\frac{3}{10}t^5 + 2t^4 + \frac{1}{2}t^3\right) dt \\
&= \frac{1}{280}x^8 + \frac{1}{21}x^7 + \frac{1}{18}x^6 - \frac{22}{60}x^5 - \frac{1}{8}x^4 \qquad (26)
\end{aligned}
$$

Penggunaan skema rekursi (23) memberikan:

$$
\begin{aligned}
y_3 &= \int_0^x \int_0^x \int_0^x 12\left(\frac{1}{280}t^8 + \frac{1}{21}t^7 + \frac{1}{18}t^6 - \frac{22}{60}t^5 - \frac{1}{8}t^4\right) dtdtdt \\
&+ \int_0^x \int_0^x \int_0^x 4\left(\frac{8}{280}t^7 + \frac{1}{3}t^6 + \frac{1}{3}t^5 - \frac{11}{6}t^4 - \frac{1}{2}t^3\right) dtdtdt \\
&- \int_0^x \int_0^x \int_0^x 3\left(\frac{56}{280}t^6 + 2t^5 + \frac{5}{3}t^4 - \frac{22}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2\right) dtdtdt \\
&= \int_0^x \int_0^x \left(\frac{12}{2520}t^9 + \frac{12}{168}t^8 + \frac{12}{126}t^7 - \frac{22}{30}t^6 - \frac{3}{10}t^5\right) dtdt \\
&+ \int_0^x \int_0^x \left(\frac{32}{2240}t^8 + \frac{4}{21}t^7 + \frac{4}{18}t^6 - \frac{22}{15}t^5 - \frac{1}{2}t^4\right) dtdt \\
&- \int_0^x \int_0^x \left(\frac{168}{1960}t^7 + t^6 + t^5 - \frac{11}{3}t^4 - \frac{9}{6}t^3\right) dtdt \\
&= \int_0^x \left(\frac{12}{25200}t^{10} + \frac{12}{1512}t^9 + \frac{12}{1008}t^8 - \frac{22}{210}t^7 - \frac{3}{60}t^6\right) dt \\
&+ \int_0^x \left(\frac{32}{20160}t^9 + \frac{4}{168}t^8 + \frac{4}{126}t^7 - \frac{22}{90}t^6 - \frac{1}{10}t^5\right) dt \\
&- \int_0^x \left(\frac{168}{15680}t^8 + \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{6}t^6 - \frac{11}{10}t^5 - \frac{9}{24}t^4\right) dt \\
&= \frac{12}{277200}x^{11} + \frac{1}{1050}x^{10} + \frac{1}{360}x^9 - \frac{72}{504}x^8 - \frac{83}{1260}x^7 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{3}{40}x^5 \qquad (27)
\end{aligned}
$$

Jika prosedur yang sama kita lanjutkan maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
y_4 = \frac{12}{50450400}x^{14} + \frac{1}{128700}x^{13} + \frac{1}{23100}x^{12} - \frac{131}{96300}x^{11} - \frac{313}{37800}x^{10} \\
+\frac{1087}{2268}x^9 + \frac{749}{1152}x^8 - \frac{9}{140}x^7 - \frac{9}{240}x^6
\end{aligned} \qquad (28)
$$

Akibatnya, hampiran solusi masalah nilai awal (11) diberikan oleh

$$
\begin{aligned}
y(x) &\cong y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\
&= \left(x + \frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{10}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^3\right) \\
&+ \left(\frac{1}{280}x^8 + \frac{1}{21}x^7 + \frac{1}{18}x^6 - \frac{22}{60}x^5 - \frac{1}{8}x^4\right) \\
&+ \left(\frac{12}{277200}x^{11} + \frac{1}{1050}x^{10} + \frac{1}{360}x^9 - \frac{72}{504}x^8 - \frac{83}{1260}x^7 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{3}{40}x^5\right) \\
&+ (\frac{12}{50450400}x^{14} + \frac{1}{128700}x^{13} + \frac{1}{23100}x^{12} - \frac{131}{96300}x^{11} - \frac{313}{37800}x^{10} + \frac{1087}{2268}x^9 + \frac{749}{1152}x^8 \\
&- \frac{9}{140}x^7 - \frac{9}{240}x^6) \\
&= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{13}{24}x^4 - \frac{23}{120}x^5 + \frac{133}{720}x^6 \pm \ldots + \frac{12}{50450400}x^{14}
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Berdasarkan persamaan (14) dan persamaan (28) maka dapat dilihat bahwa solusi hampiran masalah nilai awal (11) menggunakan MDA hingga suku ke-6 identik dengan solusi eksaknya. Berikut disajikan contoh untuk kasus tak homogen.

Contoh 2: Tinjau masalah nilai awal

$$
\begin{gathered}
y^{'''} + 2y^{''} - y^{'} - 2y = x \\
y(0) = 0, y^{'}(0) = 1, y^{''}(0) = 1
\end{gathered}
\tag{30}
$$

Solusi eksak dari masalah nilai awal (30) diberikan oleh

$$
y(x) = \frac{-3}{2}e^{-x} + \frac{5}{6}e^{x} + \frac{5}{12}e^{-2x} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \tag{31}
$$

Bila fungsi eksponen di dalam solusi eksak pada persamaan (31) dinyatakan dalam bentuk deret Mac Laurin, maka solusi eksak dapat ditulis sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \frac{-3}{2}\left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 \mp \ldots\right) \\
&+ \frac{5}{6}\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \ldots\right) \\
&+ \frac{5}{12}\left(1 - 2x + \frac{4}{2}x^2 - \frac{8}{6}x^3 + \frac{16}{24}x^4 - \frac{32}{120}x^5 + \frac{64}{720}x^6 \mp \ldots\right) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

$$
y(x) = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{11}{120}x^5 + - \ldots \tag{32}
$$

Tulis persamaan (30) ke dalam bentuk

$$
y^{'''} = x - \left(-2y - y^{'} + 2y^{''}\right) \tag{33}
$$

Selanjutnya operasikan operator L^{-1} pada persamaan (33) yang memberikan

$$
\int_0^x \int_0^x \int_0^x y^{'''}(t)\, dtdtdt = L^{-1}(x) - L^{-1}\left(-2y - y^{'} + 2y^{''}\right) \tag{34}
$$

Jika ruas kiri pada persamaan (34) dingintegralkan maka diperoleh

$$
y(x) - y(0) - xy^{'}(0) - \frac{y^{''}(0)}{2}x^2 = L^{-1}(x) - L^{-1}\left(-2y - y^{'} + 2y^{''}\right) \tag{35}
$$

atau

$$y(x) = y(0) + xy^{'}(0) + \frac{y^{''}(0)}{2}x^2 + L^{-1}(x) - L^{-1}\left(-2y - y^{'} + 2y^{''}\right) \tag{36}$$

Jika $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ disubstitusikan ke persamaan (36) maka kita punya

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = y(0) + xy^{'}(0) + \frac{y^{''}(0)}{2}x^2 + L^{-1}(x) - L^{-1}\left(-2\sum_{n=0}^{\infty} y_n - \sum_{n=0}^{\infty} y_n^{'} + 2\sum_{n=0}^{\infty} y_n^{''}\right) \tag{37}$$

Proses menyamakan indeks dari kedua ruas pada persamaan (37) diperoleh relasi rekursi sebagai berikut:

$$y_0 = y(0) + xy^{'}(0) + \frac{y''(0)}{2}x^2 + L^{-1}(x) \tag{38}$$

$$y_1 = -L^{-1}\left(-2y_0 - y_0^{'} + 2y_0^{''}\right) \tag{39}$$

$$y_2 = -L^{-1}\left(-2y_1 - y_1^{'} + 2y_1^{''}\right) \tag{40}$$

$$\vdots$$

$$y_n = -L^{-1}\left(-2y_{n-1} - y_{n-1}^{'} + 2y_{n-1}^{''}\right) \tag{41}$$

Jika syarat awal pada persamaan (30) disubstitusikan ke persamaan (38) maka diperoleh

$$y_0 = 0 + x + \frac{x^2}{2} + \int_0^x \int_0^x \int_0^x t\,dtdtdt = x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{24}x^4 \tag{42}$$

Berdasarkan persamaan (42) maka persamaan (39) memberikan

$$\begin{aligned}
y_1 &= \int_0^x \int_0^x \int_0^x 2\left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{24}t^4\right) dtdtdt + \int_0^x \int_0^x \int_0^x \left(1 + t + \frac{1}{6}t^3\right) dtdt\,dt \\
&- \int_0^x \int_0^x \int_0^x 2\left(1 + \frac{1}{2}t^2\right) dtdtdt \\
&= \int_0^x \int_0^x \left(t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{60}t^5\right) dtdt + \int_0^x \int_0^x \left(t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4\right) dtdt \\
&- \int_0^x \int_0^x \left(2t + \frac{1}{3}t^3\right) dtdt \\
&= \int_0^x \left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{360}t^6\right) dt + \int_0^x \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5\right) dt - \int_0^x \left(t^2 + \frac{1}{12}t^4\right) dt \\
&= \frac{1}{2520}x^7 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3
\end{aligned} \tag{43}$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (43) pada persamaan (40) maka diperoleh

$$\begin{aligned}
y_2 &= \int_0^x \int_0^x \int_0^x 2\left(\frac{1}{2520}t^7 + \frac{1}{720}t^6 + \frac{1}{8}t^4 - \frac{1}{6}t^3\right) dtdtdt \\
&+ \int_0^x \int_0^x \int_0^x \left(\frac{7}{2520}t^6 + \frac{1}{120}t^5 + \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{2}t^2\right) dtdtdt \\
&- \int_0^x \int_0^x \int_0^x 2\left(\frac{1}{60}t^5 + \frac{1}{240}t^4 + \frac{3}{2}t^2 - t^3\right) dtdtdt \\
&= \int_0^x \int_0^x \left(\frac{1}{10080}t^8 + \frac{1}{2520}t^7 + \frac{1}{20}t^5 - \frac{1}{12}t^4\right) dtdt \\
&+ \int_0^x \int_0^x \left(\frac{1}{2520}t^7 + \frac{1}{720}t^6 + \frac{1}{8}t^4 - \frac{1}{6}t^3\right) dtdt - \int_0^x \int_0^x \left(\frac{7}{180}t^6 + \frac{1}{60}t^5 + t^3 - t^2\right) dtdt \\
&= \int_0^x \left(\frac{1}{90720}t^9 + \frac{1}{20160}t^8 + \frac{1}{120}t^6 - \frac{1}{60}t^5\right) dt \\
&+ \int_0^x \left(\frac{1}{20160}t^8 + \frac{1}{5040}t^7 + \frac{1}{40}t^5 - \frac{1}{24}t^4\right) dt - \int_0^x \left(\frac{1}{1260}t^7 + \frac{1}{360}t^6 + \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3\right) dt \\
&= \frac{1}{907200}x^{10} + \frac{2}{181440}x^9 + \frac{-3}{40320}x^8 + \frac{1}{1260}x^7 + \frac{1}{720}x^6 - \frac{7}{120}x^5 + \frac{1}{12}x^4 \qquad (44)
\end{aligned}$$

Penggunaan skema rekursi (41) dan prosedur yang sama maka kita punya:

$$\begin{aligned}
y_3 = \frac{1}{778377600}x^{13} + \frac{1}{39916800}x^{12} - \frac{1}{3991680}x^{11} - \frac{1}{1209600}x^{10} + \frac{1}{30240}x^9 - \frac{1}{1920}x^8 \\
- \frac{1}{1008}x^7 + \frac{1}{45}x^6 - \frac{1}{30}x^5
\end{aligned} \qquad (45)$$

Akibatnya, hampiran solusi masalah nilai awal (30) diberikan oleh

$$\begin{aligned}
y(x) &\cong y_0 + y_1 + y_2 + y_3 \\
&= \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{24}x^4\right) + \left(\frac{1}{2520}x^7 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3\right) \\
&+ \left(\frac{1}{907200}x^{10} + \frac{2}{181440}x^9 + \frac{-3}{40320}x^8 + \frac{1}{1260}x^7 + \frac{1}{720}x^6 - \frac{7}{120}x^5 + \frac{1}{12}x^4\right) \\
&+ (\frac{1}{778377600}x^{13} + \frac{1}{39916800}x^{12} - \frac{1}{3991680}x^{11} - \frac{1}{1209600}x^{10} + \frac{1}{30240}x^9 - \frac{1}{1920}x^8 \\
&- \frac{1}{1008}x^7 + \frac{1}{45}x^6 - \frac{1}{30}x^5) \\
&= x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{11}{120}x^5 \pm \ldots + \frac{1}{778377600}x^{13} \qquad (46)
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (32) dan persamaan (46) maka dapat dilihat bahwa untuk kasus tak homogen solusi hampiran masalah nilai awal (30) menggunakan MDA hingga suku ke-5 identik dengan solusi eksaknya.

4. Simpulan

Pada kajian ini disajikan bagaimana mengkontruksi solusi hampiran untuk persamaan diferensial biasa orde-3 menggunakan metode dekomposisi adomian. Sebagai ilustrasi disajikan dua contoh untuk kasus persamaan diferensial biasa orde-3 dengan koefisien konstan baik homogen maupun tak homogen. Dari paparan yang disajikan terlihat bahwa solusi hampiran menggunakan metode dekompposisi adomian hingga suku keempat memberikan hasil yang mendekati solusi eksaknya. Dengan demikian metode ini bisa dijadikan salah satu alternatif yang ampuh dalam mendapatkan solusi masalah nilai awal.

Ucapan Terimakasih.

Penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada reviewer yang telah memberikan banyak masukan untuk perbaikan artikel ini. Selain itu, penulis juga menyampaikan ucapan terima kasih kepada LPPM Universitas Lampung yang telah membantu dalam pendanaan sehingga artikel ini dapat dipublikasikan melalui hibah Penelitian Dasar dengan nomor kontrak 714/UN.26/PN/2023.

Daftar Pustaka

[1] Kartono, 2012, *Persamaan Diferensial Biasa.,* Graha Ilmu, Yogyakarta.

[2] da Silva, J.G., de Morais, R.M., da Silva, I.C.R. *et al.*, 2019, Mathematical models applied to thyroid cancer, Biophysical ReviewsVolume 11, Issue *2, April 2019, Pages 183–189.* https://doi.org/10.1007/s12551-019-00504-7.

[3] Khoshnaw, S.H.A., Salih, R.H., and Sulaimany., S., 2020,Mathematical modelling for coronavirus disease (COVID-19) in predicting future behaviours and sensitivity analysis, *Math. Model. Nat. Phenom.*, Volume 15, Issue *33, May 2020, Pages 1–13.* https://doi.org/10.1051/mmnp/2020020.

[4] Nuryaman, A., Zakaria, L., and Suharsono, S., 2020, Parameter sensitivity analysis on mathematical model of methane oxidation using reverse flow reactor with periodically perturbed feed gas, *JP Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 9, Issue *1, February 2020, Pages 1–13.* https://doi.org/10.1051/mmnp/2020020.

[5] Finizio, N., dan Ladas, G., 1998. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern.* Ed. ke-2. Terjemahan Dra. Widiarti Santoso. Erlangga, Jakarta.

[6] Waluya, S.B. 2006. *Persamaan Diferensial.* Graha ilmu, Yogyakarta.

[7] Fadugba, S. E., Zelibe, S. C., dan Edogbanya, O. H. 2013. On the Adomian Dekomposition Method For the Solution of Second Order Ordinary Differential Equations. *International Journal of Mathematics and Statistics Studies.* Vol. 1(2), Pages 20-29.

[8] Faradila,A., Nuryaman, A., Asmiati, and Nur, D.R., 2021, Variational homotopy perturbation method for solving systems of homogeneous linear and nonlinear partial differential equations. Desimal: Jurnal Matematika. Volume 4, No 2. Pages 133-144.

[9] Mirawati., Satyahadewi, N., dan Helmi. 2015. Penyelesaian Masalah Nilai Awal Persamaan Diferensial Biasa Orde Dua Menggunakan Modifikasi Metode Dekomposisi Adomian. *Buletin Ilmiah Ma, Stat, dan Terapannya (Bimaster),* Vol. 04(1), Pages 9-16.

[10] Anita. 2016. Metode Dekomposisi Adomian Untuk Menyelesaikan Persamaan Parabolik Konduksi Panas. *Jurnal Matematika UIN Alauddin Makasar* . Vol (4): 20-24.

[11] Maria, F. 2017. Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial Nonliniear Dengan Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian. *Jurnal Matemaika Universias Sanata Dharma Yogyakarta.* Vol (1):29-34.