

Rekonstruksi Permukaan Bebas Fluida Menggunakan Metode *Volume of Fluid*

URAY AGUSTIAN, EVI NOVIANI*, YUDHI

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas
Tanjungpura

Jl. Prof. Dr. H Hadari Nawawi, Bansir Laut, Kec Pontianak Tenggara, Kota
Pontianak, Kalbar 78124

*Email Korespondensi: evi_noviani@math.untan.ac.id

Abstrak

Fluida merupakan suatu zat yang akan mengalami perubahan bentuk dan posisi apabila terkena tegangan geser. Bentuk fluida dapat berubah seiring dengan berubah bentuk permukaannya. Batas permukaan ini selanjutnya disebut permukaan bebas fluida. Permasalahan aliran fluida yang menyertakan permukaan bebas dinyatakan dalam bentuk persamaan-persamaan diferensial parsial. Dalam menyelesaikan masalah tersebut diperlukan teknik-teknik tertentu, salah satunya secara numerik, jika solusi eksak belum dapat ditentukan. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji pemodelan permukaan bebas fluida dan solusinya secara numerik dengan menggunakan metode *Volume of Fluid* (VOF). Pemodelan permasalahan aliran fluida dengan permukaan bebas secara umum dimulai dengan menggunakan hukum kekekalan massa dan hukum kekekalan momentum, yang menghasilkan persamaan Navier-Stokes. Fluida diasumsikan bersifat *incompressible*. Penelitian ini menggunakan metode VOF dengan algoritma Parker dan Young untuk menyelesaikan permasalahan batas bebas fluida. Fluida digambarkan berbentuk setengah lingkaran dengan jari-jari 1 dan ukuran grid 10×5 . Batas Fluida tersebut dibagi menjadi 14 partisi, lalu ditentukan luas masing-masing grid dan dicari nilai kemiringan garis pada partisi tersebut melalui empat nilai grid di sekitarnya. Untuk selanjutnya, didapatkan persamaan garis untuk setiap partisi. Dari penghitungan, didapatkan fungsi *piecewise* dengan error rata-rata sebesar 0,01459715.

Kata Kunci: Fluida Batas Bebas, Metode VOF, Algoritma Parker dan Young.

Abstract

Fluid is a substance that changes shape and position when exposed to shear stress. The domain of the fluid can change along with changing the shape of the surface. This boundary is called the free surface boundary. We expressed the fluid flow problems involving free surfaces as partial differential equations. In solving this problem, certain techniques are needed, one of which is numerical, if the exact solution cannot be determined. This study examines the modelling of the free surface of the fluid and its solution numerically using the Volume of Fluid (VOF) method. Modelling fluid flow problems with a free surface, in general, begins by using the law of the conservation of mass and the law of the conservation of momentum, which produces the Navier-Stokes equation. The fluid is assumed to be incompressible. This study uses the VOF method with the Parker and Young algorithm to solve the free surface boundary problem. The surface of the fluid is described as a semicircle with a radius of 1 and a grid size of 10×5 . We divide the boundary of the fluid into 14 partitions, then the area of each grid is determined, and the slope of the line is found on the partition through the four surrounding grid values. Henceforth, we obtained the equation of the line for each partition. We get a piecewise function from the calculation with an average error of 0.01459715.

Keywords: Fluid-Free Boundary, VOF Method, Parker and Youngs Algorithms.

1. PENDAHULUAN

Fluida adalah zat yang akan mengalami perubahan bentuk dan posisi dari posisi semula ke posisi terkini secara berkelanjutan apabila terkena tegangan geser (Nasution [1]). Pada fluida, bentuk dan posisi biasanya tergantung pada bentuk permukaan. Permukaan menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI) adalah bidang yang rata pada suatu zat. Pada fluida berupa zat cair, permukaan yang berhubungan langsung dengan udara disebut sebagai permukaan bebas. Dinamakan demikian, karena bentuk permukaan ini dapat berubah sesuai dengan kondisi pada fluida tersebut. Dalam kehidupan sehari-hari dapat kita amati permukaan air di sungai, dapat beriak ataupun dapat berupa permukaan datar jika permukaan air tersebut tenang. Pemodelan matematika pada aliran fluida yang menyertakan permukaan bebas ini secara matematis dapat disajikan menggunakan persamaan diferensial parsial dengan menggunakan asumsi-asumsi pada dasar-dasar mekanika fluida.

Untuk membangun model matematika aliran fluida dengan permukaan bebas, diperlukan penggunaan hukum kekekalan massa dan momentum. Fluida diasumsikan tak dapat termampatkan/*incompressible*. Kemudian dengan menggunakan persamaan hukum Newton II didapatkan suatu persamaan Navier-Stokes (Ashrigz dan Poo, [2]). Untuk menentukan solusi dari persamaan-persamaan hasil pemodelan tersebut dapat didekati melalui pendekatan eksak maupun numerik. Solusi eksak, terkadang tidak dapat ditemukan sejauh ini. Hal ini bersesuaian dengan pemodelan yang digunakan. Jika solusi eksak belum ditemukan, maka solusi dapat didekati secara numerik. Secara khusus, karena adanya perubahan bentuk pada fluida, maka domain fluida tersebut juga berubah. Dengan demikian proses rekonstruksi permukaan bebas fluida juga memerlukan teknik khusus tertentu.

Metode *Marker and Cell* (MAC) yang diperkenalkan oleh Harrow [3] dan rekan-rekannya merupakan metode awal dalam menentukan permukaan bebas fluida dengan menggunakan tekanan dan kecepatan sebagai variabel terikat yang utama, namun memiliki kekurangan yaitu tidak dapat membaca permukaan bebas secara jelas. Selanjutnya, metode *Volume of Fluid*

(VOF) yang dikembangkan pertama kali oleh Hirt dan Nichols [3] berhasil menggambarkan permukaan bebas dengan membuat partisi-partisi baru dengan jelas dalam dimensi dua atau tiga dimensi (Hoang *et al.*, [4]). Metode ini dibantu salah satunya dengan menggunakan algoritma Parker dan Young (Pollard Jr. dan Puckett, [5]; Rashidi *et al.*, [6]), yang digunakan untuk mencari suatu persamaan dari garis yang menjadi suatu permukaan bebas fluida. Penelitian sebelumnya seperti Marianne pada thesisnya (Francois, [7]) menyajikan rekontruksi permukaan bebas berbentuk setengah lingkaran dengan menentukan garis-garis perbagian lalu dicari nilai-nilai variabelnya dan hasil akhirnya dibandingkan dengan berbagai macam ukuran grid pada bentuk fluida setengah lingkaran dengan visualisasi berupa gambar. James dan Elbridge [5] menyajikan rekontruksi VOF dengan algoritma Parker dan Young untuk menentukan kemiringan dan memberikan nilai galat yang baik.

Pada penelitian ini, permukaan bebas fluida direkonstruksi dengan menggunakan VOF dengan algoritma Parker dan Young. Batasan masalah yang dikaji adalah menggunakan fluida berbentuk setengah lingkaran. Penggambaran fluida berbentuk setengah lingkaran ini dimisalkan dalam kasus nyata yaitu dari setetes air yang berada dibawa ranting pohon dan divisualisasi bentuk fluidanya menjadi sebuah setengah lingkaran dengan isi dalam fluida merupakan fluida sejenis (Youngs, [8]). Lebih lanjut, secara numerik, kita dapat menghitung galat/error secara mudah dengan membandingkannya dengan bentuk lingkaran yang sudah diketahui fungsinya dalam dua dimensi. Dengan penghitungan galat ini dapat diketahui sejauh mana algoritma yang digunakan dapat mendekati masalah yang sebenarnya.

Metode VOF memberikan penghitungan bentuk permukaan bebas dengan jelas untuk tiap-tiap partisi yang digunakan. Metode ini memberikan nilai 1 pada partisi dengan fluida yang penuh, dan bernilai nol jika pada partisi tersebut tidak terdapat fluida. Sedangkan pada partisi yang sebagian berisi fluida bernilai $0 < x < 1$ (Pollard Jr dan Puckett, [5]). Pada penelitian ini fluida digambarkan dengan bantuan aplikasi GeoGebra dan dicari luas masing-masing grid dengan konsep integral tentu, sehingga dapat dicari persamaan garis masing-masing kasus (total 14 kasus) dengan menggunakan algoritma Parker dan Young. Algoritma ini digunakan karena sangat efektif untuk mencari masing-masing garis yang sudah dipartisi. Hasil akhir dari metode ini berupa suatu fungsi linear yang disatukan menjadi fungsi piecewise dan divisualisasi batas eksak dan batas metode dengan aplikasi GeoGebra.

2. METODE PENELITIAN

2.1. Pemodelan Permukaan Bebas Fluida. Aliran fluida dengan permukaan bebas adalah aliran-aliran fluida yang batasnya tidak dibatasi dan hanya diketahui kondisi awalnya saja. Pemodelan ini dapat dibangun melalui suatu persamaan Hukum Kekekalan Massa.

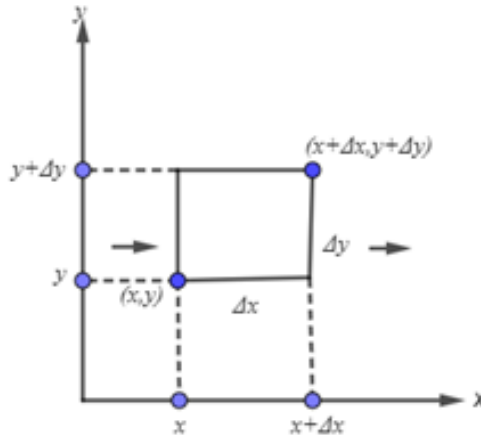
Definisi 2.1 (Potter dan Wiggert, [9]). *Hukum kekekalan Massa menyatakan bahwa tidak ada massa yang diciptakan maupun dimusnahkan meskipun terkena reaksi. Hukum kekekalan massa dapat ditulis dalam bentuk:*

$$\frac{\partial m}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

dengan:

m : massa (kg)
 t : waktu (s).

Hukum kekekalan massa secara umum menyatakan bahwa massa yang masuk suatu elemen dx, dy sama dengan massa yang keluar. Penurunan hukum kekekalan massa diselesaikan dengan menggunakan massa jenis yang didefinisikan suatu massa dibagi volume. Dalam Gambar 1 dijelaskan terkait massa yang masuk dan keluar untuk kasus dua dimensi yaitu dx dan dy . Perubahan massa terhadap waktu ini terjadi dikarenakan adanya partikel yang masuk pada kondisi x dan y dalam kecepatan tetap dan keluar sejauh Δx dan Δy akan keluar menjadi partikel massa saat $x + \Delta x$ dan $y + \Delta y$ digambarkan sebagai berikut:



1.png

GAMBAR 1. Ilustrasi massa masuk dan massa keluar pada partikel fluida dua dimensi.

Massa partikel fluida dinyatakan sebagai sebuah persamaan massa jenis partikel yaitu:

$$\rho = \frac{m}{A}, \quad (2)$$

dengan:

ρ : massa jenis ($kg\ m^{-2}$)

m : massa (m)

A : luas (m^2).

Dari Persamaan (2), didapat massa masuk searah sumbu x per satuan waktu yaitu:

$$\rho \cdot u|_x \cdot \Delta y = \frac{\partial m}{\partial t}, \quad (3)$$

dengan $u|_x$ adalah kecepatan massa masuk saat posisi x .

Dari Persamaan (2), didapat massa keluar searah sumbu x per satuan waktu yaitu:

$$\rho \cdot u|_{x+\Delta x} \cdot \Delta y = \frac{\partial m}{\partial t}, \quad (4)$$

dengan $u|_{x+\Delta x}$ adalah kecepatan massa keluar saat posisi $x + \Delta x$.

Dari Persamaan (2), didapat massa masuk searah sumbu y per satuan waktu yaitu:

$$\rho \cdot v|_y \cdot \Delta x = \frac{\partial m}{\partial t}, \quad (5)$$

dengan $v|_y$ adalah kecepatan massa masuk saat posisi y .

Dari Persamaan (2), didapat massa keluar searah sumbu y per satuan waktu yaitu:

$$\rho \cdot v|_{y+\Delta y} \cdot \Delta x = \frac{\partial m}{\partial t}, \quad (6)$$

dengan $v|_{y+\Delta y}$ adalah kecepatan massa keluar saat posisi $y + \Delta y$.

Persamaan (3)-(6) disubstitusikan ke Persamaan (1) sehingga menjadi:

$$\Delta x \cdot \Delta y \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} = (\rho \cdot u|_x \cdot \Delta y - \rho \cdot u|_{x+\Delta x} \cdot \Delta y) + (\rho \cdot \Delta x \cdot v|_y - \rho \cdot \Delta x \cdot v|_{y+\Delta y}), \quad (7)$$

dengan $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t}$ adalah perubahan massa per satuan waktu ($\frac{\partial m}{\partial t}$).

Ketika kedua ruas dibagi dengan $\Delta x \Delta y$ akan didapatkan:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho \cdot u|_x - \rho \cdot u|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \frac{\rho \cdot v|_y - \rho \cdot v|_{y+\Delta y}}{\Delta y}. \quad (8)$$

Karena ukuran partikel fluida yang sangat kecil, didapatkan turunan untuk $\Delta x \Delta y$ menjadi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u}{\partial x} - \frac{\partial \rho v}{\partial y}, \quad (9)$$

di mana Persamaan (9) merupakan persamaan kekekalan massa untuk sumbu x dan y .

Definisi 2.2 (Potter dan Wiggert, [9]). *Untuk kondisi di mana aliran bersifat incompressible yaitu di mana massa jenis diasumsikan konstan, yaitu:*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (10)$$

dengan menghubungkan persamaan (9) dan (10), maka menjadi sebuah persamaan fluida bersifat incompressible dengan variabel x dan y yaitu:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (11)$$

$\nabla \cdot \vec{u}$ adalah perkalian vektor turunan dari variabel x dan y terhadap sumbu x dan y .

Definisi 2.3 (Giancolli, [10]). *Hukum kekekalan momentum adalah momentum total sebuah sistem benda majemuk yang terisolasi dari lingkungannya dan diturunkan dari persamaan Hukum Newton II sehingga menjadi:*

$$F = \frac{\partial}{\partial t} (m \cdot v), \quad (12)$$

dengan

F : gaya total (N)

$\frac{\partial}{\partial t} (m \cdot v)$: perubahan momentum (N m⁻¹).

Untuk arah yang sumbu x , momentum masuk melintasi bidang x per satuan waktu yaitu:

$$\frac{\partial}{\partial t} (m \cdot u)|_x = \rho \cdot uu|_x \cdot \Delta y. \quad (13)$$

Sedangkan momentum keluar pada $x + \Delta x$ per satuan waktu yaitu:

$$\frac{\partial}{\partial t} (m \cdot u)|_{x+\Delta x} = \rho \cdot uu|_{x+\Delta x} \cdot \Delta y. \quad (14)$$

Resultan gaya eksternal dari arah sumbu x yang melintasi bidang x per satuan waktu yaitu:

$$\frac{\partial}{\partial t} (m \cdot u) = (\rho|_x - \rho|_{x+\Delta x}) \cdot \Delta y + \rho g_x \Delta y. \quad (15)$$

Pada arah yang sumbu x , momentum masuk melintasi bidang y per satuan waktu yaitu:

$$\frac{\partial}{\partial t} (m \cdot v)|_y = \rho \cdot uv|_y \cdot \Delta x. \quad (16)$$

Sedangkan untuk sumbu x , momentum keluar melintasi bidang y per satuan waktu yaitu:

$$\frac{\partial}{\partial t} (m \cdot v)|_{y+\Delta y} = \rho \cdot uv|_{y+\Delta y} \cdot \Delta x. \quad (17)$$

Resultan gaya eksternal dari arah sumbu x yang melintasi bidang y per satuan waktu yaitu:

$$(\rho|_y - \rho|_{y+\Delta y}) \cdot \Delta x + \rho g_y \Delta x. \quad (18)$$

Persamaan (12) disubstitusikan dengan menjumlahkan Persamaan (13)-(18) akan menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} \cdot (\Delta x \cdot \Delta y) &= (\rho \cdot uu|_x \cdot \Delta y - \rho \cdot uu|_{x+\Delta x} \cdot \Delta y) \\ &\quad + (\rho \cdot uv|_y \cdot \Delta x - \rho \cdot uv|_{y+\Delta y} \cdot \Delta x) \\ &\quad + (\rho|_x - \rho|_{x+\Delta x} \cdot \Delta y + \rho g_x \Delta), \end{aligned} \quad (19)$$

dengan $\frac{\partial \rho u}{\partial t} \cdot \Delta x \cdot \Delta y$ merupakan perubahan momentum.

Ketika kedua ruas pada Persamaan (19) dibagi dengan $\Delta x \Delta y$ didapatkan:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = \frac{\rho \cdot uu|_x - \rho \cdot uu|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \frac{\rho \cdot uv|_y - \rho \cdot uv|_{y+\Delta y}}{\Delta y} + \frac{\rho|_x - \rho|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \frac{\rho g_x}{\Delta x}. \quad (20)$$

Karena partikel fluida yang sangat kecil didapatkan turunan untuk $\Delta x \Delta y$ menjadi:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} = -\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho g_x. \quad (21)$$

Persamaan (21) merupakan persamaan perubahan momentum melalui sumbu x . Untuk arah yang sumbu y , momentum masuk melintasi bidang y persatuan waktu yaitu:

$$\frac{\partial}{\partial t} (m \cdot v)|_y = \rho \cdot vv|_y \cdot \Delta x. \quad (22)$$

Sedangkan jika sumbu y , momentum keluar melintasi bidang y persatuan waktu yaitu:

$$\frac{\partial}{\partial t} (m \cdot v)|_{y+\Delta y} = \rho \cdot vv|_{y+\Delta y} \cdot \Delta x. \quad (23)$$

Resultan gaya eksternal dari arah sumbu y yang melintasi bidang y persatuan waktu yaitu:

$$(\rho|_y - \rho|_{y+\Delta y}) \cdot \Delta x + \rho g_y \Delta x. \quad (24)$$

Untuk arah yang sumbu x , momentum masuk melintasi bidang x persatuan waktu yaitu:

$$\frac{\partial}{\partial t} (m \cdot v)|_x = \rho \cdot uv|_x \cdot \Delta y. \quad (25)$$

Sedangkan jika sumbu y , momentum keluar melintasi bidang x persatuan waktu yaitu:

$$\frac{\partial}{\partial t} (m \cdot v)|_{x+\Delta x} = \rho \cdot uv|_{x+\Delta x} \cdot \Delta y. \quad (26)$$

Resultan gaya eksternal dari arah sumbu x yang melintasi bidang x persatuan waktu yaitu:

$$\rho|_x - \rho|_{x+\Delta x} \cdot \Delta y + \rho g_x \Delta y. \quad (27)$$

Persamaan (12) disubstitusikan dengan menjumlahkan persamaan (22)-(27), hasilnya:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v}{\partial t} \cdot \Delta x \cdot \Delta y &= (\rho \cdot vv|_y \cdot \Delta x - \rho \cdot vv|_{y+\Delta y} \cdot \Delta x) \\ &+ (\rho \cdot uv|_x \cdot \Delta y - \rho \cdot uv|_{x+\Delta x} \cdot \Delta y) \\ &+ \rho|_y - \rho|_{y+\Delta y} \cdot \Delta x + \rho g_y \Delta x. \end{aligned} \quad (28)$$

Kedua ruas dibagi dengan $\Delta x \Delta y$ dan didapat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v}{\partial t} &= \frac{\rho \cdot vv|_y - \rho \cdot vv|_{y+\Delta y}}{\Delta y} + \frac{\rho \cdot uv|_x - \rho \cdot uv|_{x+\Delta x}}{\Delta x} \\ &+ \frac{\rho|_y - \rho|_{y+\Delta y}}{\Delta y} + \frac{\rho g_y}{\Delta y}. \end{aligned} \quad (29)$$

Karena partikel fluida yang sangat kecil didapatkan turunan untuk $\Delta x \Delta y$ menjadi:

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho v v}{\partial y} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} = -\frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho g_y. \quad (30)$$

Persamaan (30) merupakan persamaan perubahan momentum melalui sumbu y .

Persamaan (21) dan (30) merupakan persamaan Navier-Stokes yang digunakan untuk menggambarkan pemodelan permukaan bebas fluida.

2.2. Algoritma Rekontruksi Permukaan VOF. Dalam menentukan nilai pada suatu permukaan VOF, didefinisikan setiap permukaan sebagai suatu partikel penanda. Dalam metode VOF, persamaan aliran volume dirata-ratakan secara langsung untuk mendapatkan persamaan tunggal dan permukaan dilacak menggunakan faktor indikator y (Gopala dan Wachem, [11]). Metode ini akan menjadi sulit jika permukaan terdistorsi atau geometrinya sulit. Untuk mencari batas VOF dilakukan rekontruksi dengan algoritma VOF. Algoritma rekontruksi ini memiliki beberapa tahap dalam penyelesaiannya (Pilliod Jr dan Puckett, [5]).

- (1) Misalkan θ sebagai daerah di \mathbb{R}^2 dan asumsi $\bar{z}(s) = (x(s), y(s))$ untuk $0 < s < 1$ sebagai permukaan bagian yang halus. Sebagai contoh $\bar{z}(0) = \bar{z}(1)$, di mana \bar{z} merupakan suatu garis dan $\bar{z}(0), \bar{z}(1) \in \theta$.
- (2) Garis \bar{z} memiliki dua daerah fluida yaitu daerah terang dan daerah gelap. Untuk θ dengan grid kotak θ^h di mana h dinotasikan sebagai jarak grid. Untuk setiap $0 \leq i \leq M$ dan $0 \leq j \leq N$ yang di mana $f_{i,j}$ direpresentasikan sebagai fraksi i, j mewakili volume sel yang ditempati fluida yang lebih gelap. Fraksi volume $f_{i,j}$ dengan $i = 0, \dots, M$ dan $j = 0, \dots, N$.
- (3) Untuk menentukan fraksi i, j dengan nilai diantara $0 < x < 1$ yang memiliki sebagian fluida, untuk mencari luas grid pada fluida tersebut dengan nilai tengah $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Banyak partisi atau grid pada selang $[x_{i-1}, x_i]$ adalah

$$h_i = \left\lceil \frac{f(x_i^*)}{h} \right\rceil, \quad (31)$$

dengan h adalah

$$h = \frac{x_{i-1} - x_i}{n}. \quad (32)$$

Maka luas grid tersebut adalah

$$L = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - (h_i - 1)h) dx, \quad (33)$$

di mana nilai $f(x)$ yang dipakai adalah suatu fungsi dan untuk ketentuan tertentu ditambah sesuai dengan aturan grid yang berlaku.

- (4) Setiap algoritma menyatakan bagian yang menghasilkan pendekatan linier dalam permukaan di beberapa sel multfluida yang dimana setiap sel memenuhi $0 < f_{i,j} < 1$. Algoritma yang didapat menghasilkan kemiringan dan vektor normal ke permukaan. Secara umum, \bar{n} menunjukkan vektor normal dan daerah gelap di fluida. Untuk menemukan \bar{n} dengan pendekatan permukaan dicari terlebih dahulu nilai kemiringan \bar{m} . Hal ini dapat diterapkan dengan merekontruksi permukaan dalam grid baru sehingga menghasilkan koordinat baru yaitu $\bar{n} = (n_x, n_y)$ dengan d sebagai jarak. Dalam hal ini garis memenuhi persamaan:

$$n_x + n_y = d. \quad (34)$$

- (5) Dalam hal ini juga, ditemukan persamaan garis dengan kemiringan yaitu:

$$y = \bar{m}x + b. \quad (35)$$

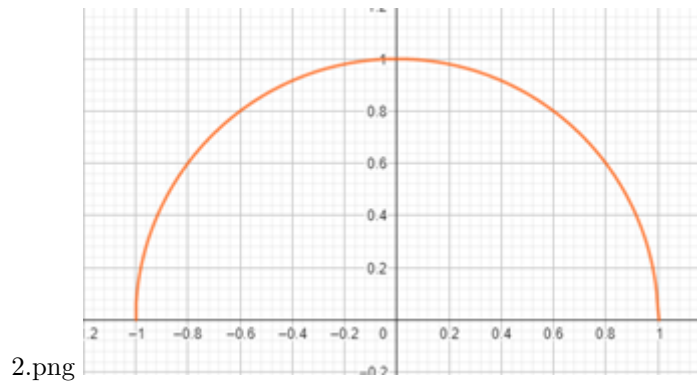
3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pemodelan batas permukaan fluida dengan menggunakan metode *Volume Of Fluid* (VOF) dilakukan pada kasus fluida yang berbentuk setengah lingkaran. Kurva setengah lingkaran dapat ditulis:

$$y = \sqrt{1 - x^2}. \quad (36)$$

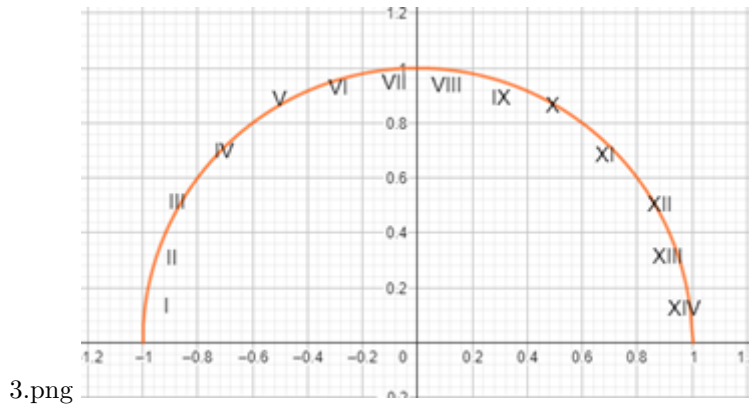
Fluida berbentuk setengah lingkaran dengan jari-jari 1 tersebut dibuat melalui aplikasi GeoGebra dengan ukuran grid 10×5 , seperti dapat dilihat pada Gambar 2.

Selanjutnya, gambar fluida setengah lingkaran diberi penentuan tepi grid untuk membaginya menjadi beberapa kotak di dalam fluida tersebut. Grid yang memuat garis tepi fluida



GAMBAR 2. Ilustrasi fungsi setengah lingkaran ukuran grid 10×5 .

dinomori I, II dan seterusnya sampai XIV, yang untuk selanjutnya disebut blok, seperti pada Gambar 3.



GAMBAR 3. Ilustrasi fungsi setengah lingkaran ukuran grid 10×5 diberi penentuan grid.

Kemudian Langkah selanjutnya ditentukan masing-masing luas blok dengan memanfaatkan penghitungan luas daerah di bawah kurva dengan rumus integral tentu sebagai berikut:

$$L = \frac{1}{A} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - (h_i - 1)h) dx, \quad (37)$$

dengan

- L : luas grid
- A : luas persegi
- x_i : batas atas
- x_{i-1} : batas bawah
- $(h_i - 1)h$: lebar grid pada grid yang tidak dicari.

Aturan fluida dalam hal ini, jika kotak atau blok yang memiliki persegi penuh maka bernilai 1, jika kosong akan bernilai 0, dan jika tidak sepenuhnya diisi fluida maka bernilai $0 < x < 1$. Ada beberapa kasus yang dapat dicari menggunakan konsep integral yaitu pada kasus di bagian batas permukaan fluida itu sendiri.

Untuk kasus grid VIII (grid yang diberi tanda kotak pada Gambar 4) dapat dicari menggunakan konsep integral:

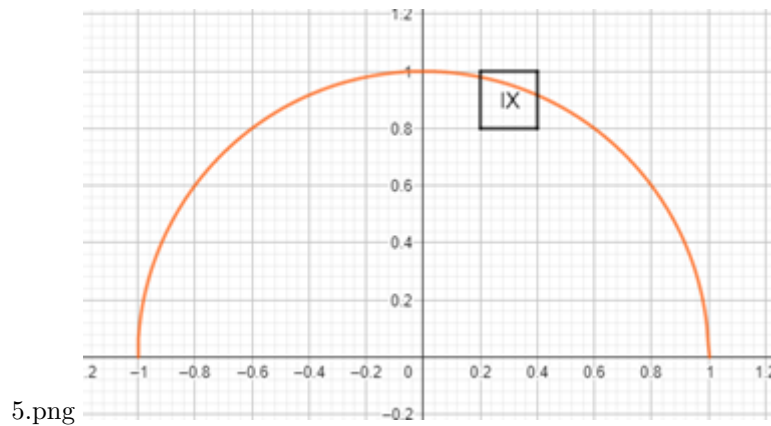
$$L = \frac{1}{0,04} \int_0^{0,2} (\sqrt{1-x^2} - 4,2) dx. \quad (38)$$



GAMBAR 4. Penentuan nilai grid VIII.

Nilai pada grid VIII yaitu dibulatkan 0,9665 dan memiliki nilai yang sama dengan grid I, VII, dan XIV pada Gambar 3.

Untuk kasus grid IX (grid yang diberi tanda kotak pada Gambar 5) dapat dicari menggunakan konsep integral:



GAMBAR 5. Penentuan nilai grid IX.

$$L = \frac{1}{0,04} \int_{0,2}^{0,4} \left(\sqrt{1-x^2} - 4, 2 \right) dx. \quad (39)$$

Nilai pada grid IX yaitu 0,7601 dan memiliki nilai yang sama dengan grid II, VI, dan XIII pada Gambar 3.

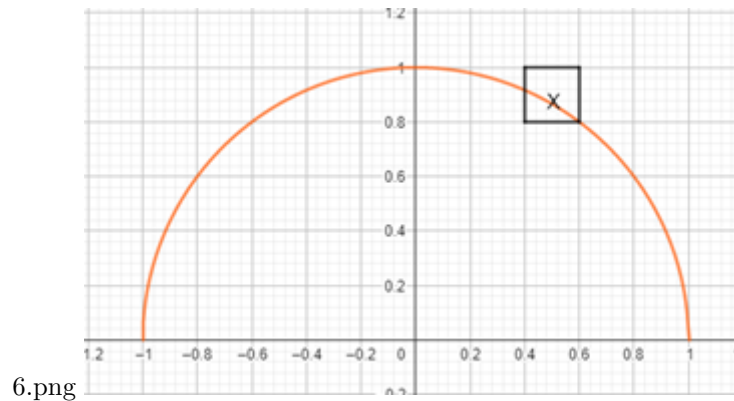
Untuk kasus grid X (grid yang diberi tanda kotak pada Gambar 6) dapat dicari menggunakan konsep integral.

$$L = \frac{1}{0,04} \int_{0,4}^{0,6} \left(\sqrt{1-x^2} - 4, 2 \right) dx. \quad (40)$$

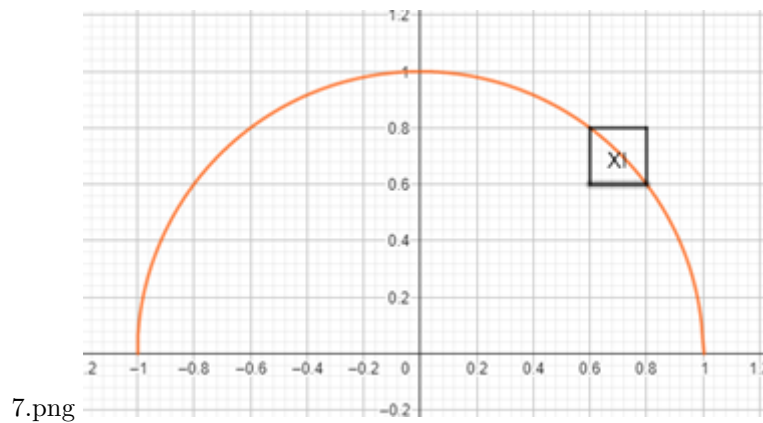
Nilai pada grid X yaitu 0,3172 dan memiliki nilai yang sama dengan grid III, V, dan XII pada Gambar 3.

Untuk kasus grid XI (grid yang diberi tanda kotak pada Gambar 7) dapat dicari menggunakan konsep integral.

$$L = \frac{1}{0,04} \int_{0,6}^{0,8} \left(\sqrt{1-x^2} - 3, 2 \right) dx. \quad (41)$$

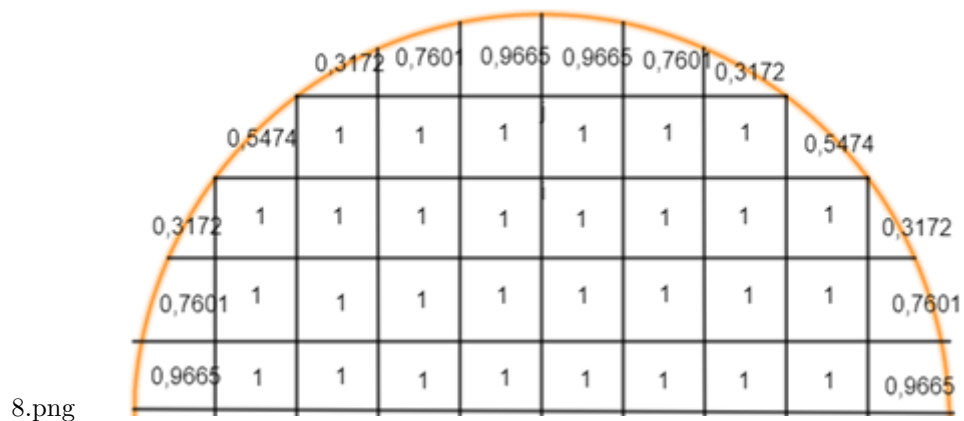


GAMBAR 6. Penentuan nilai grid X.



GAMBAR 7. Penentuan nilai grid XI.

Untuk nilai pada grid XI yaitu 0,5474 dan memiliki nilai yang sama dengan grid IV pada Gambar 3. Blok yang sudah diberi nilai dapat dilihat pada Gambar 8.



GAMBAR 8. Blok yang sudah diberi nilai.

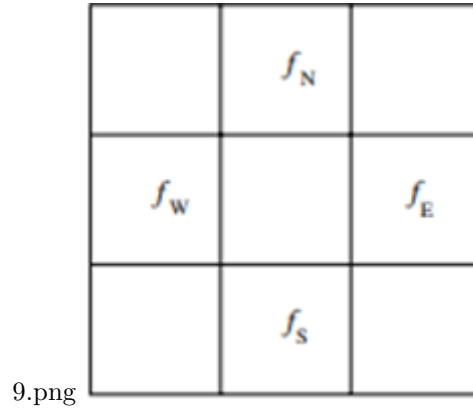
Selanjutnya, untuk masing-masing blok yang terdapat pada batas permukaan fluida dihitung (Hirt dan Nichols, [3]):

$$f_e = \frac{1}{2 + \alpha} (f_{i+1,j-1} + \alpha f_{i+1,j} + f_{i+1,j+1}), \quad (42)$$

$$f_w = \frac{1}{2 + \alpha} (f_{i-1,j-1} + \alpha f_{i-1,j} + f_{i-1,j+1}), \quad (43)$$

$$f_n = \frac{1}{2 + \alpha} (f_{i-1,j+1} + \alpha f_{i,j+1} + f_{i+1,j+1}), \quad (44)$$

$$f_s = \frac{1}{2 + \alpha} (f_{i-1,j-1} + \alpha f_{i,j-1} + f_{i+1,j-1}), \quad (45)$$



GAMBAR 9. Ilustrasi paker dan young.

dengan

α : parameter bebas

f_e : nilai grid sebelah timur

f_w : nilai grid sebelah barat

f_n : nilai grid sebelah utara

f_s : nilai grid sebelah selatan.

Yang diambil di kasus ini $\alpha = 2$ untuk 14 kasus yang ada pada batas permukaan bebas. Setelah itu, dicari nilai ∇f dengan rumus (Hirt dan Nichols, [3]):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_e - f_w}{2}, \quad (46)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f_n - f_s}{2}, \quad (47)$$

dicari kemiringan \bar{m} dengan rumus

$$\bar{m} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}, \quad (48)$$

dan didapat persamaan garis masing-masing garis perbagian yang baru yaitu dengan persamaan

$$y - y_1 = \bar{m} (x - x_1). \quad (49)$$

Hasil yang didapat adalah disajikan dalam Tabel 1 yaitu nilai f_e , f_w , f_n , f_s , dan persamaan garis yang baru pada 14 kasus batas bebas fluida dengan menggunakan rumus (42) sampai (49).

Selanjutnya, dicari nilai galat yang ditentukan dengan rumus (Francois, [7]):

$$\varepsilon_i = \frac{|y_{eksak} - y_{metode}|}{y_{eksak}}. \quad (50)$$

Dari penghitungan, didapatkan nilai-nilai seperti yang dituliskan pada Tabel 2.

TABEL 1. Tabel nilai variabel f_e , f_w , f_n , f_s , dan persamaan garis yang baru pada 14 kasus batas bebas fluida.

Kasus Garis	f_e	f_w	f_n	f_s	y
I	1	0	0,63005	0,73325	$9,6899225x + 9,6899225$
II	1	0	0,4086	0,73325	$3,0802026x + 3,23382104$
III	0,88685	0	0,13685	0,63005	$1,87061882x + 2,03852393$
IV	0,8293	0,0793	0,0793	0,8293	$x + 1,4$
V	0,63005	0,13685	0	0,88685	$0,5562561x + 1,14245024$
VI	0,73325	0,4086	0	1	$0,32465x + 1,04493$
VII	0,73325	0,63005	0	1	$0,1032x + 1$
VIII	0,63005	0,73325	0	1	$-0,1032x + 1$
IX	0,4086	0,73325	0	1	$-0,32465x + 1,04493$
X	0,13685	0,63005	0	0,88685	$-0,5562561x + 1,14245024$
XI	0,0793	0,8293	0,0793	0,8293	$-x + 1,4$
XII	0,13685	0	0,88685	0,63005	$-1,87061882x + 2,03852393$
XIII	0	1	0,4086	0,73325	$-3,0802026x + 3,23382104$
XIV	0	1	0,63005	0,73325	$-9,6899225x + 9,6899225$

TABEL 2. Tabel hubungan nilai x , y_{metode} dengan y_{eksak} , dan ε

Kasus Garis	Interval	Nilai x	y_{eksak}	y_{metode}	ε
I	(-1;0) dan (-0,98; 0,2)	-0,98	0,19899	0,193798	0,026126
II	(-0,98;0,2) dan (-0,92;0,4)	-0,94	0,34117	0,338395	0,008146
III	(-0,92;0,4) dan (-0,8;0,6)	-0,88	0,47497	0,456148	0,039636
IV	(-0,8;0,6) dan (-0,6;0,8)	-0,65	0,75993	0,75	0,013072
V	(-0,6;0,8) dan (-0,4;0,92)	-0,45	0,89302	0,892194	0,000935
VI	(-0,4;0,92) dan (-0,2;0,98)	-0,25	0,96824	0,963768	0,004625
VII	(-0,2;0,98) dan (0;1)	-0,15	0,98868	0,98452	0,004208
VIII	(0;1) dan (0,2;0,98)	0,15	0,98868	0,98452	0,004208
IX	(0,2;0,98) dan (0,4;0,92)	0,25	0,96824	0,9637675	0,004625
X	(0,4;0,92) dan (0,6;0,8)	0,5	0,86602	0,8643874	0,001891
XI	(0,6;0,8) dan (0,8;0,6)	0,7	0,71414	0,7	0,019804
XII	(0,8;0,6) dan (0,92;0,4)	0,9	0,34496	0,420185	0,036031
XIII	(0,92;0,4) dan (0,98;0,2)	0,95	0,31224	0,307593	0,014915
XIV	(0,98;0,2) dan (1;0)	0,98	0,19899	0,193798	0,026126
$\sum_{i=I}^{XIV} \varepsilon_i$					0,20436

Pada Tabel 2 dijelaskan terkait interval dari masing-masing partisi yang diambil salah satu nilai x dari interval tersebut dan disubstitusikan ke dalam persamaan garis yang sudah dipartisi sehingga didapat nilai eksak, metode dan galat. Didapat nilai errornya dengan menggunakan rumus (Francois, [7]):

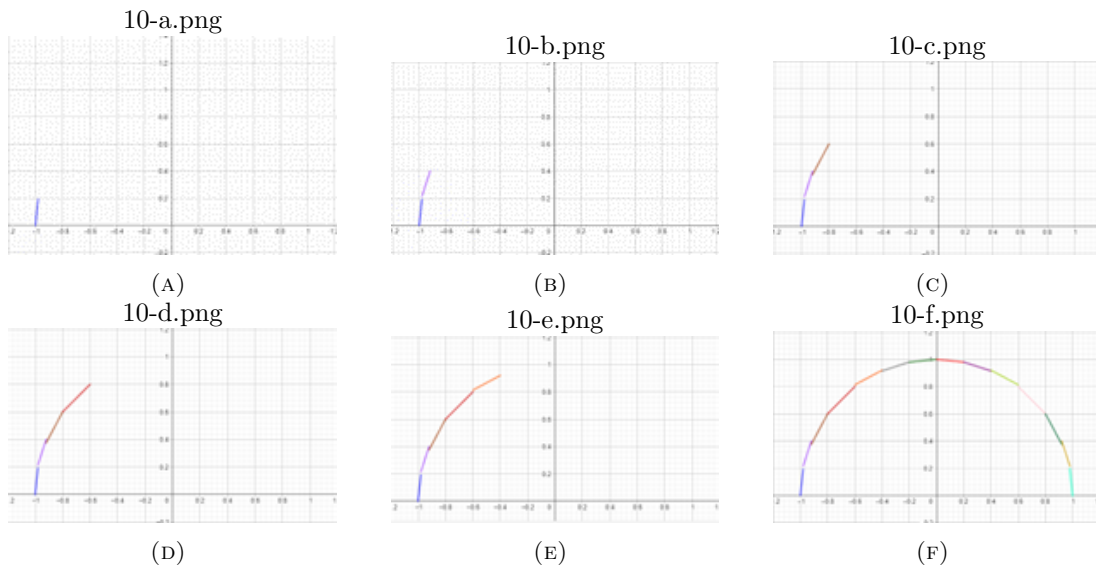
$$error = \frac{\sum_{i=I}^{XIV} \varepsilon_i}{h}, \quad (51)$$

dengan h nilai lokasi atau banyak jumlah kasus. Nilai error didapat yaitu 0,01459715 yang di mana hasil ini baik karena nilai error mendekati 0 dengan pemodelan matematika berupa

fungsi *piecewise* yaitu:

$$g(x) = \begin{cases} 9,6899225x + 9,6899225 & -1 \leq x < -0,98 \\ 3,08024026x + 3,23382104 & -0,98 \leq x < -0,92 \\ 1,79815491x + 2,030852393 & -0,92 \leq x < -0,8 \\ x + 1,4 & -0,8 \leq x < -0,6 \\ 0,55612561x + 1,14245024 & -0,6 \leq x < -0,4 \\ 0,32465x + 1,04493 & -0,4 \leq x < -0,2 \\ 0,1032x + 1 & -0,2 \leq x < 0 \\ -0,1032x + 1 & 0 \leq x < 0,2 \\ -0,32465x + 1,04493 & 0,2 \leq x < 0,4 \\ -0,55612561x + 1,14245024 & 0,4 \leq x < 0,6 \\ -x + 1,4 & 0,6 \leq x < 0,8 \\ -1,79815491x + 2,030852393 & 0,8 \leq x < 0,92 \\ -3,08024026x + 3,23382104 & 0,92 \leq x < 0,98 \\ -9,6899225x + 9,6899225 & 0,98 \leq x < 1 \end{cases} . \quad (52)$$

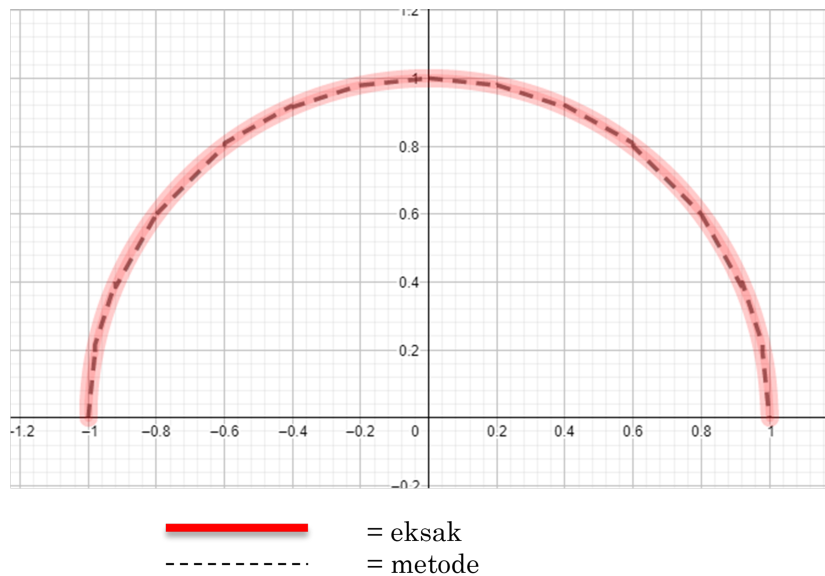
Persamaan (52) merupakan hasil penghitungan batas bebas permukaan fluida berbentuk setengah lingkaran dengan ukuran grid 10×5 . Berikut disajikan visualisasi pembentukan garis per bagian menggunakan masing-masing fungsi pada kasus (total 14 kasus) yang diambil beberapa kasus.



GAMBAR 10. Membuat garis per kasus yang di ambil enam kasus.

- Menjelaskan bahwa dibentuk suatu garis dari titik kasus I yaitu titik diambil dari $A(-1, 0)$ dan $B(-0,98; 0,2)$ dengan persamaan yang dibentuk $y = 9,6899225x + 9,6899225$.
- Menjelaskan bahwa dibentuk suatu garis dari titik kasus II yaitu titik diambil dari $B(-0,98; 0,2)$ dan $C(-0,92; 0,4)$ dengan persamaan yang dibentuk $y = 3,08024026x + 3,23382104$.
- Menjelaskan bahwa dibentuk suatu garis dari titik kasus III yaitu titik diambil dari $C(-0,92; 0,4)$ dan $D(-0,8; 0,6)$ dengan persamaan yang dibentuk $y = 1,79815491x + 2,030852393$.
- Menjelaskan bahwa dibentuk suatu garis dari titik kasus IV yaitu titik diambil dari $D(-0,8; 0,6)$ dan $E(-0,6; 0,8)$ dengan persamaan yang dibentuk $y = x + 1,4$.

- (e) Menjelaskan bahwa dibentuk suatu garis dari titik kasus V yaitu titik diambil dari $E(-0,6;0,8)$ dan $F(-0,4;0,92)$ dengan persamaan yang dibentuk $y = 0,55612561 + 1,14245024x$.
- (f) Menjelaskan bahwa dibentuk suatu garis dari titik kasus XIV yaitu titik diambil dari $N(0,98;0,6)$ dan $O(1;0)$ dengan persamaan yang dibentuk $y = -9,6899225x + 9,6899225$.



11.png

GAMBAR 11. Gambaran persamaan yang per-bagian dengan gambar hasil metode VOF dengan eksak melalui aplikasi geogebra.

Pada Gambar 11 dijelaskan bahwa batas baru dengan warna hitam merupakan batas yang dibentuk dari persamaan garis yang merupakan fungsi piecewise dan warna merah merupakan batas yang dibentuk dari persamaan setengah lingkaran.

4. KESIMPULAN

Dalam penelitian ini, telah dilakukan pemodelan penyelesaian batas fluida secara umum dan didapat persamaannya yaitu Persamaan Navier-Stokes untuk sumbu x dan sumbu y. Untuk penyelesaian batas fluida menggunakan metode VOF yaitu dengan bantuan algoritma Parker dan Young pada kasus fluida yang berbentuk setengah lingkaran. Hasil penelitian menunjukkan bahwa metode VOF dengan rekonstruksi Young dapat menghasilkan hasil simulasi yang akurat pada kasus fluida berbentuk setengah lingkaran. Didapat nilai rata-rata galat yaitu 0,01459715 dan pemodelan batas permukaan fluida yang sudah dipartisi menjadi 14 bagian merupakan suatu fungsi *piecewise*.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Nasution, H., 2008, *Mekanika Fluida Dasar*, Bung Hatta University Press, Padang.
- [2] Ashrigz, N., and Poo, J., 1991, FLAIR: Flux Line Segment Model for Advection and Interface Reconstruction, *Journal of Computational Physc*, Volume 39, Issue 2, Pages 449-468.
- [3] Hirt, C. and Nichols, B., 1981, Volume of Fluid Methods (VOF) for the Dynamics of Free Boundaries, *Journal of Computational Physc*, Volume 19, Pages 201-225.

- [4] Hoang, D. A., van Steijn, V., Portela, L. M., Kreutzer, M. T., and Kleijn, C. R., 2013, Benchmark Numerical Simulations of Segmented Two Phase Flows in Microchannels using The Volume of Fluid, *Journal Computer and Fluids*, Volume 86, Pages 28-36.
- [5] Pilliod Jr, J. E., and Puckett, E. G., 2004, Second Order Accurate Volume Of Fluid Algorithms for Tracking Material Interfaces, *Journal of Computational Physic*, Volume 19, Issue 2, Pages 465-502.
- [6] Rashidi, I., Pasandideh-Fard, M., Passandideh-Fard, M., and Nouri, N. M., 2014, Numerical and experimental study of a ventilated supercavitating vehicle, *Journal of Fluids Engineering*, Volume 136, Issue 10.
- [7] Francois, M., 1998, *A Study of The Volume Fluid Method for Moving for Advection and Interface Reconstruction*, Embry-Riddle Aeronautical University, Florida.
- [8] Youngs, D. L., 1982, Time-Dependent Multi Material Flow with Large Fluid Distorsion, *Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Pages 273-285.
- [9] Potter, M. and Wiggert, D., 2008, *Schaum's Outline Mekanika Fluida*, Erlangga, Jakarta.
- [10] Giancolli, D. C., 2008, *Fisika Edisi Ketujuh-Jilid 1 Prinsip dan Aplikasi*, PT Gelora Aksara Pratama, Jakarta.
- [11] Gopala, V. R. and Wachem, B. G., 2008, Volume of Fluid Methods for Immiscible fluid and free surface flows, *Chemical Engineering Journal*, Volume 141, Issue 1-3, Pages 204-221.
- [12] Riley, N. and Drazin, P., 2006, *The Navier Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solution*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [13] Eliyanto, J. and Hernadi, J., 2019, Pemodelan Persamaan Navier-Stokes untuk aliran Fluida Tak Termampatkan, *Jurnal Ilmiah Matematika*, Volume 6, Issue 1, Pages 22-39.

