Jurnal Matematika Integratif. p-ISSN:1412-6184, e-ISSN:2549-903
Vol. 19, No. 2 (2023), pp. 245–257. doi:10.24198/jmi.v19.n2.49600.245-257

Invers Matrik RSLPFL$_{circfr}$ *(b, 0, . . . , 0, b)* Berordo $n{\times}n(n \geq 3)$ Menggunakan Matrik Blok *2×2*

Ade Novia Rahma, Rahel Edrian,
Rahmawati, Corry Corazon Marzuki

Program Studi Matematika, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Email: adenoviarahma_mufti@yahoo.co.id,
11850422162@students.uin-suska.ac.id,
rahmawati.@uin-suska.ac.id, corry@uin-suska.ac.id

Abstrak
Penelitian ini bertujuan untuk menentukan invers dari matriks RSLPFLcircfr bentuk khusus (*b,0, . . . , 0,b*) berordo $n{\times}n$ dengan $n{\geq}3$ menggunakan matriks blok *2×2*. Dalam menentukan inversnya terdapat tiga langkah yang dikerjakan. Pertama memblok atau mempartisi matriks RSLPFLcircfr dari ordo *3×3* sampai *8×8* dengan dua alternative cara blok. Kedua, menentukan invers submatriks yang invertible dengan menerapkan komplemen Schur lalu menentukan invers matriks RSLPFLcircfr dengan menerapkan kembali komplemen Schur. Ketiga, menentukan bentuk umum invers submatriks yang invertible dan bentuk umum matriks RSLPFLcircfr dan membuktikan dengan aturan invers lalu menerapkan pada contoh soal sesuai dengan Teorema sehingga diperoleh invers matrriks RSLPFLcircf
Kata kunci: Blok *2×2*, invers matriks, komplemen Schur, matriks RSLPFL$_{circfr}$

Abstract
This study aims to determine the inverse of a special form RSLPFL$_{circfr}$matrix (b,0,. . . ,0,b)) of order n×n (n≥3) using 2×2 block matrix. In determining it there are three steps that are carried out. First, block or partition the RSLPFL$_{circfr}$matrix from the order 3×3 to 8×8 with two alternative block methods. Second, determine the inverse of an invertible submatrix by applying Schur's complement and then determine the inverse of the RSLPFL$_{circfr}$matrix by re-applying Schur's complement. Third, determine the general form of an invertible submatrix inverse and the general form of the RSLPFL$_{circfr}$matrix and prove it with the inverse rule and then apply it to the example problems according to Theorems.
Keywords: *Block 2×2, inverse of matrix, RSLPFL$_{circfr}$ matrix,Schur's complement*

2000 Mathematics Subject Classification:15A09
Received: 25-08-2023, accepted: 09-12-2023.

1. Pendahuluan

Suatu matriks adalah jajaran persegi panjang yang mana ukuran atau ordo dari suatu matriks dapat dijabarkan dengan jumlah baris × jumlah kolom pada matriks, jika dimensi atau ordo dari dua matriks sama dan elemen-elemen seletaknya sama maka dapat dikatakan kedua matriks tersebut sama (Rainarli et al., 2011)[13]. Biasanya huruf besar menotasikan matriks, dapat ditulis seperti A,B,C, dan sebagainya (Yulian et al., 2019)[15]. Suatu matriks yang berukuran n×n yang hanya memiliki satu entri masukan atau entri input pada baris pertama dan terbentuk dari n vektor, dimana untuk menghasilkan entri pada baris berikutnya yaitu dengan menggeser ke kanan satu posisi entri dari baris sebelumnya dan entri-entri yang terletak pada sepanjang diagonal matriksnya adalah sama disebut dengan matriks *circulant* (Mamula & Achmad, 2021)[9]

Row Skew Last-Plus-First Left adalah sebuah matriks bujur sangkar yang dinotasikan dengan matriks $\text{RSLPFL}_{circfr}\ (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ dimana untuk mendapatkan setiap pada baris $i+1$, diperoleh dengan mengambil entri pertama pada baris ke- i kemudian dikalikan dengan (-1) untuk kolom ke- n pada baris $i+1$, selanjutnya untuk entri kolom ke- $(n-1)$ diperoleh dengan menjumlahkan entri kolom terakhir dan entri kolom pertama pada baris ke-i, dan untuk entri-entri kolom pada baris $i+1$ selanjutnya diperoleh dengan menggeser satu posisi ke kiri entri-entri pada baris ke- i secara siklis. Matriks *Row Skew Last-Plus-First Left* atau matriks $\text{RSLPFL}_{circfr}\ (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ memiliki bentuk umum(Jiang & Hong, 2014)[7]:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1}+a_0 & -a_0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ a_{n-2} & a_{n-1}+a_0 & \cdots & -a_{n-3} \\ a_{n-1}+a_0 & \cdots & -a_{n-3}+a_{n-2} & -a_{n-2} \end{bmatrix}$$

Suatu matriks dapat diperoleh determinan dan invers atau kebalikannya yang mana jika suatu matriks berbentuk bujur sangkar misalkan A, dan terdapat suatu matriks B dimana memiliki ukuran yang juga sama dengan matriks A lalu diperoleh $AB= BA= I$, maka A memiliki sifat dapat dibalik (*invertible*) dan B disebut sebagai kebalikan atau invers dari A (Anton & Rorres, 2013)[1]. Hasil nilai determinan yang diperoleh dari suatu matriks dapat ditemukan dengan menghitung menggunakan beberapa metode seperti metode Komplemen Schur, metode Reduksi Baris, dan metode Ekspansi Laplace/Kofaktor (Purnama Sari et al., 2020)[10]. Sedangkan untuk mempermudah menentukan invers suatu matriks yang berukuran $n\times n$dapat digunakan salah satu cara yaitu dengan memblok sebagaimana penelitian sebelumnya

Misalkan P merupakan suatu matriks $m\times n$

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-k)} & a_{1(n-(k-1))} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{(m-k)1} & \cdots & a_{(m-k)(n-k)} & a_{(m-k)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-k)n} \\ a_{(m-(k-1))1} & \cdots & a_{(m-(k-1))(n-k)} & a_{(m-(k-1))(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-(k-1))n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(n-k)} & a_{m(n(k-1))} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan beberapa penelitian yang membahas mengenai matriks sirkulan (Azizah et al., 2018)[3], (Fahlevi, 2021)[5], (aryani, fitri and andari, 2015)[2] khususnya matriks RSFPLR_{circfr} dan RSLPFL_{circfr} yang juga dibahas pada penelitian sebelumnya (Jiang & Hong, 2014)[7], (Rahmawati et al., 2020)[12], (Cui & Jiang, 2020)[4] dan juga penelitian sebelumnya (Rahma et al., 2019)[11] dengan beberapa metode yang digunakan dalam memperoleh invers suatu matriks, maka penelitian ini membahas invers matriks RSLPFLcircfr $(b,0,\ldots,0,b)$ menggunakan matriks blok 2×2, dan bentuk umumnya sebagai berikut:

$$R_n = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2b & -b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2b & -b & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 2b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & -b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2b & -b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan judul penelitian "Invers Matriks RSLPFL$_{circfr}$ Bentuk Khusus *(b, 0, . . . , 0, b)* Berordo $n{\times}n$ dengan $n{\geq}3$ Menggunakan Matriks Blok *2×2*". Penelitian tersebut bertujuan untuk memperoleh bentuk secara umum invers matriks RSLPFLcircfr (*b, 0, . . . , 0, b*) berordo $n{\times}n$ dengan $n{\geq}3$ pada Persamaan di atas menggunakan matriks blok *2×2*.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan suatu penelitian studi literatur dengan beberapa langkah yang diterapkan yaitu pertama diberikan suatu matriks RSLPFL$_{circfr}$ $(b,0,\dots,0,b)$ dengan $b{\neq}0$ berordo $n{\times}n$, selanjutnya mempartisi atau memblok matriks tersebut yang berordo $3{\times}3$ hingga berordo 8×8 menggunakan matriks blok 2×2 sehingga memiliki masing-masing submatriks, selanjutnya menentukan invers matriks tersebut yang berordo 3×3 hingga berordo 8×8 dengan matriks blok 2×2 menggunakan teorema-teorema Komplemen Schur yang didefinisikan dari matriks yang dipartisi menjadi blok-blok, salah satunya adalah persegi dan nonsingular dan itu membuat penggunaan invers dari matriks blok (Redivo-Zaglia, 2004)[14], lalu mengamati dan menduga bentuk umum matriks invers dari submatriks yang *invertible* dan menduga bentuk umum matriks invers dari matriks yang berordo 3×3 hingga berordo 8×8, kemudian membuktikan bentuk umum terhadap matriks invers dari submatriks *invertible* yang merupakan bagian dari matriks RSLPFL$_{circfr}$ $(b,0,\dots,0,b)$ dengan $b{\neq}0$ berordo $n \times n$ dengan aturan invers dan akhirnya membuktikan bentuk umum matriks invers dari matriks tersebut dengan pembuktian $RR^{-1} = R^{-1}R = I$ lalu menerapkan bentuk umum matriks invers dari matriks tersebut dengan contoh soal.

Adapun teori pendukung yang digunakan adalah sebagai berikut:

Definisi 2.1. *(Ilhamsyah et al., 2017)*[6] *Suatu matriks yang diblok sehingga menjadi beberapa bagian matriks dengan ukuran yang lebih kecil dari matriks sebelumnya dan memuat garis horizontal dan vertikal diantara baris dan kolom matriks. Kemudian, matriks berukuran kecil tersebut dinamakan sebagai submatriks.*

Definisi 2.2. *Redivo-Zaglia, M. (2004)*[14] *Salah satu metode untuk menganalisis matriks yang banyak menggunakan pertidaksamaan matriks adalah komplemen schur. Dalam kegunaannya matriks berukuran besar yang telah diblok sebelumnya sering menggunakan komplemen schur.*

$$\underset{(j+k)\times(l+m)}{P} = \begin{pmatrix} \underset{j\times l}{A} & \underset{j\times m}{B} \\ \underset{k\times l}{C} & \underset{k\times m}{D} \end{pmatrix}$$

(1) Jika A matriks *invertible,* maka komplemen *schur* A adalah $D - CA^{-1}B$.
(2) Jika D matriks *invertible,* maka komplemen *schur* D adalah $A - BD^{-1}C$.
(3) Jika B matriks *invertible,* maka komplemen *schur* B adalah $C - DB^{-1}A$.
(4) Jika C matriks *invertible,* maka komplemen *schur* C adalah $B - AC^{-1}D$.

Suatu matriks yang memiliki invers disebut sebagai matriks tak singular (*non-singular*). Apabila matriks A merupakan matriks yang dapat dibalik atau mempunyai invers, maka invers pada matriks A akan ditulis sebagai A^{-1}, dimana nilai $det\,(A) \neq 0$. Sedangkan, apabila

$det\,(A) = 0$ maka di matriks A dikatakan sebagai matriks yang singular sehingga matriks tidak memiliki invers.

Definisi 2.3. *(Lu, T. T., & Shiou, S. H. (2002)*[8] *Matriks non-singular P dengan P^{-1} dapat diblok menjadi matriks blok 2×2 dengan cara memblok matriks seperti berikut:*

$$P = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \text{ dan } P^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$$

Untuk mengalikan matriks P dengan P^{-1} dan P^{-1} dengan P tidak dapat dilakukan dengan ukuran atau ordo sembarang. Misalkan A, B, C, dan D memiliki ukuran $j \times l$, $j \times m$, $k \times l$, dan $k \times m$ untuk $j + k = l + m$. Selanjutnya E, F, G, dan H harus mempunyai ukuran $l \times j$, $l \times k$, $m \times j$, dan $m \times k$. Artinya, P^{-1} ada di dalam blok transpos P. Misalkan suatu blok dari A, B, C, dan D adalah matriks bujur sangkar tak singular. Sehingga untuk menghindari matriks diperumum kemungkinan memiliki tiga blok yaitu:

(1) Blok diagonal bujur sangkar yaitu: $j = l$ dan $k = m$.
(2) Kuadrat blok diagonal: $j = m$ dan $k = l$.
(3) Semua blok bujur sangkar: $j = m = l = m$.

Teorema 2.4. *(Lu, T. T., & Shiou, S. H. 2002)*[8] *Jika P adalah matriks bujur sangkar, maka:*

(1) Untuk matriks $P = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$ maka akan memiliki invers jika dan hanya jika A dan D punya invers, sehingga $P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$.

(2) Untuk matriks $P = \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ maka akan memiliki invers jika dan hanya jika B dan C punya invers, sehingga $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ C^{-1} & 0 \end{bmatrix}$.

Teorema 2.5. *(Lu, T. T., & Shiou, S. H. 2002)*[8] *Jika P adalah matriks bujur sangkar, maka:*

(1) Untuk matriks $P = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$, maka akan memiliki invers jika dan hanya jika A dan D punya invers, sehingga $P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}$.

(2) Untuk matriks $P = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$, maka akan memiliki invers jika dan hanya jika A dan D punya invers, sehingga $P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$.

Teorema 2.6. *(Lu, T. T., & Shiou, S. H. 2002)*[8] *Misalkan P merupakan matriks bujur sangkar, maka:*

(1) Dimisalkan submatriks A pada matriks P yang terdapat dalam Persamaan (1.1) adalah non-singular. Maka matriks dari Persamaan (1.1) mempunyai invers jika dan hanya komplemen schur dari submatriks A memiliki invers dan $\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1}$ juga memiliki invers, sehingga didapatkan:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1} \\ -\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1} & \left(D - CA^{-1}B\right)^{-1} \end{bmatrix}.$$

(2) Dimisalkan submatriks D pada matriks P yang terdapat dalam Persamaan (1.1) adalah non-singular. Maka matriks P dari Persamaan (1.1) mempunyai invers jika

dan hanya jika komplemen schur dari submatriks D memiliki invers dan $(A-BD^{-1}C)$ *juga memiliki invers, sehingga didapatkan:*

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} & -\left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} BD^{-1} \\ -D^{-1}C\left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C\left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} BD^{-1} \end{bmatrix}$$

(3) *Dimisalkan submatriks B pada matriks P yang terdapat dalam Persamaan (1.1) adalah non-singular. Maka matriks P dari Persamaan (1.1) mempunyai invers jika dan hanya jika komplemen schur dari submatriks B memilki invers dan* $\left(C - DB^{-1}A\right)$ *juga memiliki invers, sehingga didapatkan:*

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -\left(C - DB^{-1}A\right)^{-1} DB^{-1} & \left(C - DB^{-1}A\right)^{-1} \\ B^{-1} + B^{-1}A\left(C - DB^{-1}A\right)^{-1} DB^{-1} & -B^{-1}A\left(C - DB^{-1}A\right)^{-1} \end{bmatrix}.$$

(4) *Dimisalkan submatriks C pada matriks P yang terdapat dalam Persamaan (1.1) adalah non-singular. Maka matriks P dari Persamaan (1.1) mempunyai invers jika dan hanya jika komplemen schur dari submatriks C memiliki invers dan* $\left(B - AC^{-1}D\right)$ *juga memiliki invers, sehingga didapatkan:*

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -C^{-1}D\left(B - AC^{-1}D\right)^{-1} & C^{-1} + C^{-1}D\left(B - AC^{-1}D\right)^{-1} AC^{-1} \\ \left(B - AC^{-1}D\right)^{-1} & -\left(B - AC^{-1}D\right)^{-1} AC^{-1} \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.7. *(Lu, T. T., & Shiou, S. H. 2002)*[8] *Jika P adalah matriks bujur sangkar, maka:*

(1) *Untuk matriks* $P = \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix}$, *maka akan memiliki invers jika dan hanya jika B dan C mempunyai invers sehingga* $P^{-1} = \begin{bmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{bmatrix}$.

(2) *Untuk matriks* $P = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$, *maka akan memiliki invers jika hanya jika B dan C mempunyai invers sehingga* $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}AC^{-1} \end{bmatrix}$

3. Hasil dan Pembahasan

Berdasarkan matriks RSLPFL$_{circfr}$ $(b, 0, \ldots, 0, b)$ terdapat empat cara yang mungkin dapat diterapkan dalam memblok matriks RSLPFL$_{circfr}$ dan dari keempat cara tersebut terdapat dua cara yang memenuhi sifat-sifat blok matriks. Berikut diberikan matriks RSLPFL$_{circfr}$ bentuk khusus $n \times n$ yang kemudian diblok atau dipartisi dengan dua cara yaitu:

Cara 2:

$$R_n = \left[\begin{array}{c|cccccc} b & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 2b & -b \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2b & -b & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 2b & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & -b & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2b & -b & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Cara 3:

$$R_n = \left[\begin{array}{cccccc|c} b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2b & -b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2b & -b & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 2b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & -b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2b & -b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Selain dua cara di atas tidak terdapat cara memblok yang memenuhi sifat-sifat blok dimana harus terdapat submatriks yang *invertible.*

Selanjutnya invers submatriks yang *Invertible* dari matriks $RSLPFL_{circfr}$ berbentuk khusus berordo $n \times n$ melalui penerapan Komplemen *schur*: Berdasarkan teorema 2.6

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} E' & F' \\ G' & H' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m^{-1}nl^{-1} & m^{-1} \\ l^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} E' & F' \\ G' & H' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(m-nl^{-1}k)^{-1}nl^{-1} & (m-nl^{-1}k)^{-1} \\ l^{-1}+l^{-1}k(m-nl^{-1}k)^{-1}nl^{-1} & -l^{-1}k(m-nl^{-1}k)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} E' & F' \\ G' & H' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m^{-1}n(l-km^{-1}n)^{-1} & m^{-1}+m^{-1}n(l-km^{-1}n)^{-1}km^{-1} \\ (l-km^{-1}n)^{-1} & -(l-km^{-1}n)^{-1}km^{-1} \end{bmatrix}$$

Untuk cara 2 diperoleh invers submatriks yang *invertible* sebagai berikut:

$$B^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} \\ \hline \frac{1}{b} & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} \\ \frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } C^{-1} = \left[\tfrac{1}{2b}\right] \qquad (3\times 3)$$

$$B^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} \\ \hline \frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} & 0 \\ \frac{1}{b} & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} \\ \frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} & 0 \\ \frac{1}{b} & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } C^{-1} = \left[\tfrac{1}{2b}\right] \qquad (4\times 4)$$

$\vdots$

$$B^{-1} = \left[\begin{array}{ccccc|c} \frac{1}{32b} & \frac{1}{32b} & \frac{1}{16b} & \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} \\ \hline \frac{1}{16b} & \frac{1}{16b} & \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 \\ \frac{1}{8b} & \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{32b} & \frac{1}{32b} & \frac{1}{16b} & \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} \\ \frac{1}{16b} & \frac{1}{16b} & \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 \\ \frac{1}{8b} & \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan $C^{-1} = \left[\tfrac{1}{2b}\right]$ (7×7)

$$B^{-1} = \left[\begin{array}{cccccc|c} \frac{1}{64b} & \frac{1}{64b} & \frac{1}{32b} & \frac{1}{16b} & \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} \\ \hline \frac{1}{32b} & \frac{1}{32b} & \frac{1}{16b} & \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 \\ \frac{1}{16b} & \frac{1}{16b} & \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8b} & \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{64b} & \frac{1}{64b} & \frac{1}{32b} & \frac{1}{16b} & \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} \\ \frac{1}{32b} & \frac{1}{32b} & \frac{1}{16b} & \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 \\ \frac{1}{16b} & \frac{1}{16b} & \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8b} & \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan $C^{-1} = \left[\tfrac{1}{2b}\right]$ (8×8)

Untuk cara 3 diperoleh invers submatriks yang *invertible* sebagai berikut:

Invers submatriks dari matriks RSLPFL$_{circfr}$ $(b, 0, \dots, 0, b)$ berordo 3×3 sampai 5×5

$$C^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} \\ \hline \frac{1}{2b} & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} \\ \frac{1}{2b} & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } B^{-1} = \left[\tfrac{1}{b}\right] \qquad (3\times 3)$$

$$C^{-1} = \left[\begin{array}{c|cc} \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} \\ \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 \\ \hline \frac{1}{2b} & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} \\ \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 \\ \frac{1}{2b} & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } B^{-1} = \left[\tfrac{1}{b}\right] \qquad (4\times 4)$$

$\vdots$

$$C^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccccc} \frac{1}{64b} & \frac{1}{32b} & \frac{1}{16b} & \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} \\ \frac{1}{32b} & \frac{1}{16b} & \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 \\ \frac{1}{16b} & \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{64b} & \frac{1}{32b} & \frac{1}{16b} & \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} \\ \frac{1}{32b} & \frac{1}{16b} & \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 \\ \frac{1}{16b} & \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan $B^{-1} = \left[\frac{1}{b}\right]$ (7×7)

$$C^{-1} = \left[\begin{array}{c|cccccc} \frac{1}{128b} & \frac{1}{64b} & \frac{1}{32b} & \frac{1}{16b} & \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} \\ \frac{1}{64b} & \frac{1}{32b} & \frac{1}{16b} & \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 \\ \frac{1}{32b} & \frac{1}{16b} & \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 & 0 \\ \frac{1}{16b} & \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{128b} & \frac{1}{64b} & \frac{1}{32b} & \frac{1}{16b} & \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} \\ \frac{1}{64b} & \frac{1}{32b} & \frac{1}{16b} & \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 \\ \frac{1}{32b} & \frac{1}{16b} & \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 & 0 \\ \frac{1}{16b} & \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4b} & \frac{1}{2b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan $B^{-1} = \left[\frac{1}{b}\right]$ (8×8)

Selanjutnya untuk menentukan invers matriks RSLPFL$_{circfr}$ bentuk khusus berordo $n{\times}n$, akan diperoleh dengan menerapkan kembali komplemen *schur* sebagai berikut. Invers matirks RSLPFL$_{circfr}$ bentuk khusus berordo 3×3 sampai 5×5 dapat diperoleh dengan dua cara blok atau partisi yaitu:

Cara 2:

3×3

$$R_3^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{5b} & \frac{1}{5b} & \frac{2}{5b} \\ \hline \frac{2}{5b} & \frac{2}{5b} & \frac{-1}{5b} \\ \frac{4}{5b} & \frac{-1}{5b} & \frac{-2}{5b} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{5b} & \frac{1}{5b} & \frac{2}{5b} \\ \frac{2}{5b} & \frac{2}{5b} & \frac{-1}{5b} \\ \frac{4}{5b} & \frac{-1}{5b} & \frac{-2}{5b} \end{bmatrix}$$

$$R_4^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{9b} & \frac{1}{9b} & \frac{2}{9b} & \frac{4}{9b} \\ \hline \frac{2}{9b} & \frac{2}{9b} & \frac{4}{9b} & \frac{-1}{9b} \\ \frac{4}{9b} & \frac{4}{9b} & \frac{-1}{9b} & \frac{-2}{9b} \\ \frac{8}{9b} & \frac{-1}{9b} & \frac{-2}{9b} & \frac{-4}{9b} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{9b} & \frac{1}{9b} & \frac{2}{9b} & \frac{4}{9b} \\ \frac{2}{9b} & \frac{2}{9b} & \frac{4}{9b} & \frac{-1}{9b} \\ \frac{4}{9b} & \frac{4}{9b} & \frac{-1}{9b} & \frac{-2}{9b} \\ \frac{8}{9b} & \frac{-1}{9b} & \frac{-2}{9b} & \frac{-4}{9b} \end{bmatrix}$$

$\vdots$

$$R_7^{-1} = \left[\begin{array}{cccccc|c} \frac{1}{65b} & \frac{1}{65b} & \frac{2}{65b} & \frac{4}{65b} & \frac{8}{65b} & \frac{16}{65b} & \frac{32}{65b} \\ \hline \frac{2}{65b} & \frac{2}{65b} & \frac{4}{65b} & \frac{8}{65b} & \frac{16}{65b} & \frac{32}{65b} & \frac{-1}{65b} \\ \frac{4}{65b} & \frac{4}{65b} & \frac{8}{65b} & \frac{16}{65b} & \frac{32}{65b} & \frac{-1}{65b} & \frac{-2}{65b} \\ \frac{8}{65b} & \frac{8}{65b} & \frac{16}{65b} & \frac{32}{65b} & \frac{-1}{65b} & \frac{-2}{65b} & \frac{-4}{65b} \\ \frac{16}{65b} & \frac{16}{65b} & \frac{32}{65b} & \frac{-1}{65b} & \frac{-2}{65b} & \frac{-4}{65b} & \frac{-8}{65b} \\ \frac{32}{65b} & \frac{32}{65b} & \frac{-1}{65b} & \frac{-2}{65b} & \frac{-4}{65b} & \frac{-8}{65b} & \frac{-16}{65b} \\ \frac{64}{65b} & \frac{-1}{65b} & \frac{-2}{65b} & \frac{-4}{65b} & \frac{-8}{65b} & \frac{-16}{65b} & \frac{-32}{65b} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{65b} & \frac{1}{65b} & \frac{2}{65b} & \frac{4}{65b} & \frac{8}{65b} & \frac{16}{65b} & \frac{32}{65b} \\ \frac{2}{65b} & \frac{2}{65b} & \frac{4}{65b} & \frac{8}{65b} & \frac{16}{65b} & \frac{32}{65b} & \frac{-1}{65b} \\ \frac{4}{65b} & \frac{4}{65b} & \frac{8}{65b} & \frac{16}{65b} & \frac{32}{65b} & \frac{-1}{65b} & \frac{-2}{65b} \\ \frac{8}{65b} & \frac{8}{65b} & \frac{16}{65b} & \frac{32}{65b} & \frac{-1}{65b} & \frac{-2}{65b} & \frac{-4}{65b} \\ \frac{16}{65b} & \frac{16}{65b} & \frac{32}{65b} & \frac{-1}{65b} & \frac{-2}{65b} & \frac{-4}{65b} & \frac{-8}{65b} \\ \frac{32}{65b} & \frac{32}{65b} & \frac{-1}{65b} & \frac{-2}{65b} & \frac{-4}{65b} & \frac{-8}{65b} & \frac{-16}{65b} \\ \frac{64}{65b} & \frac{-1}{65b} & \frac{-2}{65b} & \frac{-4}{65b} & \frac{-8}{65b} & \frac{-16}{65b} & \frac{-32}{65b} \end{bmatrix}$$

$$R_8^{-1} = \left[\begin{array}{ccccccc|c}
\frac{1}{129b} & \frac{1}{129b} & \frac{2}{129b} & \frac{4}{129b} & \frac{8}{129b} & \frac{16}{129b} & \frac{32}{129b} & \frac{64}{129b} \\ \hline
\frac{2}{129b} & \frac{2}{129b} & \frac{4}{129b} & \frac{8}{129b} & \frac{16}{129b} & \frac{32}{129b} & \frac{64}{129b} & \frac{-1}{129b} \\
\frac{4}{129b} & \frac{4}{129b} & \frac{8}{129b} & \frac{16}{129b} & \frac{32}{129b} & \frac{64}{129b} & \frac{-1}{129b} & \frac{-2}{129b} \\
\frac{8}{129b} & \frac{8}{129b} & \frac{16}{129b} & \frac{32}{129b} & \frac{64}{129b} & \frac{-1}{129b} & \frac{-2}{129b} & \frac{-4}{129b} \\
\frac{16}{129b} & \frac{16}{129b} & \frac{32}{129b} & \frac{64}{129b} & \frac{-1}{129b} & \frac{-2}{129b} & \frac{-4}{129b} & \frac{-8}{129b} \\
\frac{32}{129b} & \frac{32}{129b} & \frac{64}{129b} & \frac{-1}{129b} & \frac{-2}{129b} & \frac{-4}{129b} & \frac{-8}{129b} & \frac{-16}{129b} \\
\frac{64}{129b} & \frac{64}{129b} & \frac{-1}{129b} & \frac{-2}{129b} & \frac{-4}{129b} & \frac{-8}{129b} & \frac{-16}{129b} & \frac{-32}{129b} \\
\frac{128}{129b} & \frac{-1}{129b} & \frac{-2}{129b} & \frac{-4}{129b} & \frac{-8}{129b} & \frac{-16}{129b} & \frac{-32}{129b} & \frac{-64}{129b}
\end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix}
\frac{1}{129b} & \frac{1}{129b} & \frac{2}{129b} & \frac{4}{129b} & \frac{8}{129b} & \frac{16}{129b} & \frac{32}{129b} & \frac{64}{129b} \\
\frac{2}{129b} & \frac{2}{129b} & \frac{4}{129b} & \frac{8}{129b} & \frac{16}{129b} & \frac{32}{129b} & \frac{64}{129b} & \frac{-1}{129b} \\
\frac{4}{129b} & \frac{4}{129b} & \frac{8}{129b} & \frac{16}{129b} & \frac{32}{129b} & \frac{64}{129b} & \frac{-1}{129b} & \frac{-2}{129b} \\
\frac{8}{129b} & \frac{8}{129b} & \frac{16}{129b} & \frac{32}{129b} & \frac{64}{129b} & \frac{-1}{129b} & \frac{-2}{129b} & \frac{-4}{129b} \\
\frac{16}{129b} & \frac{16}{129b} & \frac{32}{129b} & \frac{64}{129b} & \frac{-1}{129b} & \frac{-2}{129b} & \frac{-4}{129b} & \frac{-8}{129b} \\
\frac{32}{129b} & \frac{32}{129b} & \frac{64}{129b} & \frac{-1}{129b} & \frac{-2}{129b} & \frac{-4}{129b} & \frac{-8}{129b} & \frac{-16}{129b} \\
\frac{64}{129b} & \frac{64}{129b} & \frac{-1}{129b} & \frac{-2}{129b} & \frac{-4}{129b} & \frac{-8}{129b} & \frac{-16}{129b} & \frac{-32}{129b} \\
\frac{128}{129b} & \frac{-1}{129b} & \frac{-2}{129b} & \frac{-4}{129b} & \frac{-8}{129b} & \frac{-16}{129b} & \frac{-32}{129b} & \frac{-64}{129b}
\end{bmatrix}$$

Cara 3:

$$R_3^{-1} = \left[\begin{array}{c|cc}
\frac{1}{5b} & \frac{1}{5b} & \frac{2}{5b} \\
\frac{2}{5b} & \frac{2}{5b} & \frac{-1}{5b} \\ \hline
\frac{4}{5b} & \frac{-1}{5b} & \frac{-2}{5b}
\end{array}\right] = \begin{bmatrix}
\frac{1}{5b} & \frac{1}{5b} & \frac{2}{5b} \\
\frac{2}{5b} & \frac{2}{5b} & \frac{-1}{5b} \\
\frac{4}{5b} & \frac{-1}{5b} & \frac{-2}{5b}
\end{bmatrix} (3 \times 3)$$

$$R_4^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc}
\frac{1}{9b} & \frac{1}{9b} & \frac{2}{9b} & \frac{4}{9b} \\
\frac{2}{9b} & \frac{2}{9b} & \frac{4}{9b} & \frac{-1}{9b} \\
\frac{4}{9b} & \frac{4}{9b} & \frac{-1}{9b} & \frac{-2}{9b} \\ \hline
\frac{8}{9b} & \frac{-1}{9b} & \frac{-2}{9b} & \frac{-4}{9b}
\end{array}\right] = \begin{bmatrix}
\frac{1}{9b} & \frac{1}{9b} & \frac{2}{9b} & \frac{4}{9b} \\
\frac{2}{9b} & \frac{2}{9b} & \frac{4}{9b} & \frac{-1}{9b} \\
\frac{4}{9b} & \frac{4}{9b} & \frac{-1}{9b} & \frac{-2}{9b} \\
\frac{8}{9b} & \frac{-1}{9b} & \frac{-2}{9b} & \frac{-4}{9b}
\end{bmatrix} (4 \times 4)$$

$$\vdots$$

$$R_7^{-1} = \left[\begin{array}{c|cccccc}
\frac{1}{65b} & \frac{1}{65b} & \frac{2}{65b} & \frac{4}{65b} & \frac{8}{65b} & \frac{16}{65b} & \frac{32}{65b} \\
\frac{2}{65b} & \frac{2}{65b} & \frac{4}{65b} & \frac{8}{65b} & \frac{16}{65b} & \frac{32}{65b} & \frac{-1}{65b} \\
\frac{4}{65b} & \frac{4}{65b} & \frac{8}{65b} & \frac{16}{65b} & \frac{32}{65b} & \frac{-1}{65b} & \frac{-2}{65b} \\
\frac{8}{65b} & \frac{8}{65b} & \frac{16}{65b} & \frac{32}{65b} & \frac{-1}{65b} & \frac{-2}{65b} & \frac{-4}{65b} \\
\frac{16}{65b} & \frac{16}{65b} & \frac{32}{65b} & \frac{-1}{65b} & \frac{-2}{65b} & \frac{-4}{65b} & \frac{-8}{65b} \\
\frac{32}{65b} & \frac{32}{65b} & \frac{-1}{65b} & \frac{-2}{65b} & \frac{-4}{65b} & \frac{-8}{65b} & \frac{-16}{65b} \\ \hline
\frac{64}{65b} & \frac{-1}{65b} & \frac{-2}{65b} & \frac{-4}{65b} & \frac{-8}{65b} & \frac{-16}{65b} & \frac{-32}{65b}
\end{array}\right] = \begin{bmatrix}
\frac{1}{65b} & \frac{1}{65b} & \frac{2}{65b} & \frac{4}{65b} & \frac{8}{65b} & \frac{16}{65b} & \frac{32}{65b} \\
\frac{2}{65b} & \frac{2}{65b} & \frac{4}{65b} & \frac{8}{65b} & \frac{16}{65b} & \frac{32}{65b} & \frac{-1}{65b} \\
\frac{4}{65b} & \frac{4}{65b} & \frac{8}{65b} & \frac{16}{65b} & \frac{32}{65b} & \frac{-1}{65b} & \frac{-2}{65b} \\
\frac{8}{65b} & \frac{8}{65b} & \frac{16}{65b} & \frac{32}{65b} & \frac{-1}{65b} & \frac{-2}{65b} & \frac{-4}{65b} \\
\frac{16}{65b} & \frac{16}{65b} & \frac{32}{65b} & \frac{-1}{65b} & \frac{-2}{65b} & \frac{-4}{65b} & \frac{-8}{65b} \\
\frac{32}{65b} & \frac{32}{65b} & \frac{-1}{65b} & \frac{-2}{65b} & \frac{-4}{65b} & \frac{-8}{65b} & \frac{-16}{65b} \\
\frac{64}{65b} & \frac{-1}{65b} & \frac{-2}{65b} & \frac{-4}{65b} & \frac{-8}{65b} & \frac{-16}{65b} & \frac{-32}{65b}
\end{bmatrix}$$

$$R_8^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccccccc}
\frac{1}{129b} & \frac{1}{129b} & \frac{2}{129b} & \frac{4}{129b} & \frac{8}{129b} & \frac{16}{129b} & \frac{32}{129b} & \frac{64}{129b} \\
\frac{2}{129b} & \frac{2}{129b} & \frac{4}{129b} & \frac{8}{129b} & \frac{16}{129b} & \frac{32}{129b} & \frac{64}{129b} & \frac{-1}{129b} \\
\frac{4}{129b} & \frac{4}{129b} & \frac{8}{129b} & \frac{16}{129b} & \frac{32}{129b} & \frac{64}{129b} & \frac{-1}{129b} & \frac{-2}{129b} \\
\frac{8}{129b} & \frac{8}{129b} & \frac{16}{129b} & \frac{32}{129b} & \frac{64}{129b} & \frac{-1}{129b} & \frac{-2}{129b} & \frac{-4}{129b} \\
\frac{16}{129b} & \frac{16}{129b} & \frac{32}{129b} & \frac{64}{129b} & \frac{-1}{129b} & \frac{-2}{129b} & \frac{-4}{129b} & \frac{-8}{129b} \\
\frac{32}{129b} & \frac{32}{129b} & \frac{64}{129b} & \frac{-1}{129b} & \frac{-2}{129b} & \frac{-4}{129b} & \frac{-8}{129b} & \frac{-16}{129b} \\
\frac{64}{129b} & \frac{64}{129b} & \frac{-1}{129b} & \frac{-2}{129b} & \frac{-4}{129b} & \frac{-8}{129b} & \frac{-16}{129b} & \frac{-32}{129b} \\ \hline
\frac{128}{129b} & \frac{-1}{129b} & \frac{-2}{129b} & \frac{-4}{129b} & \frac{-8}{129b} & \frac{-16}{129b} & \frac{-32}{129b} & \frac{-64}{129b}
\end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix}
\frac{1}{129b} & \frac{1}{129b} & \frac{2}{129b} & \frac{4}{129b} & \frac{8}{129b} & \frac{16}{129b} & \frac{32}{129b} & \frac{64}{129b} \\
\frac{2}{129b} & \frac{2}{129b} & \frac{4}{129b} & \frac{8}{129b} & \frac{16}{129b} & \frac{32}{129b} & \frac{64}{129b} & \frac{-1}{129b} \\
\frac{4}{129b} & \frac{4}{129b} & \frac{8}{129b} & \frac{16}{129b} & \frac{32}{129b} & \frac{64}{129b} & \frac{-1}{129b} & \frac{-2}{129b} \\
\frac{8}{129b} & \frac{8}{129b} & \frac{16}{129b} & \frac{32}{129b} & \frac{64}{129b} & \frac{-1}{129b} & \frac{-2}{129b} & \frac{-4}{129b} \\
\frac{16}{129b} & \frac{16}{129b} & \frac{32}{129b} & \frac{64}{129b} & \frac{-1}{129b} & \frac{-2}{129b} & \frac{-4}{129b} & \frac{-8}{129b} \\
\frac{32}{129b} & \frac{32}{129b} & \frac{64}{129b} & \frac{-1}{129b} & \frac{-2}{129b} & \frac{-4}{129b} & \frac{-8}{129b} & \frac{-16}{129b} \\
\frac{64}{129b} & \frac{64}{129b} & \frac{-1}{129b} & \frac{-2}{129b} & \frac{-4}{129b} & \frac{-8}{129b} & \frac{-16}{129b} & \frac{-32}{129b} \\
\frac{128}{129b} & \frac{-1}{129b} & \frac{-2}{129b} & \frac{-4}{129b} & \frac{-8}{129b} & \frac{-16}{129b} & \frac{-32}{129b} & \frac{-64}{129b}
\end{bmatrix}$$

Berdasarkan penjabaran di atas dapat diduga bentuk umum invers submatriks yang *invertible* dari invers matriks RSLPFL$_{circfr}$ $(b, 0, \ldots, 0, b)$, maka disajikan pada Teorema 3.1 dan Teorema 3.2 sebagai berikut.

Teorema 3.1. *Jika diberikan matriks RSLPFL$_{circfr}$ $(b, 0, \ldots, 0, b)$ berordo $n \times n$ sebagai berikut:*

$$R_n = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 2b & -b \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2b & -b & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 2b & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & -b & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 2b & -b & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^{(n-2)}b} & \frac{1}{2^{(n-2)}b} & \frac{1}{2^{(n-3)}b} & \cdots & \frac{1}{2^3 b} & \frac{1}{2^2 b} & \frac{1}{2b} \\ \frac{1}{2^{(n-3)}b} & \frac{1}{2^{(n-3)}b} & \frac{1}{2^{(n-4)}b} & \cdots & \frac{1}{2^2 b} & \frac{1}{2b} & 0 \\ \frac{1}{2^{(n-4)}b} & \frac{1}{2^{(n-4)}b} & \frac{1}{2^{(n-5)}b} & \cdots & \frac{1}{2b} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2^2 b} & \frac{1}{2^2 b} & \frac{1}{2b} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{b} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(n-1)}$ *dan* $C^{-1} = \left[\frac{1}{2b}\right]$

yang mana B dan C merupakan suatu submatriks yang invertible dari R_n maka invers dari B dan C adalah:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^{(n-2)}b} & \frac{1}{2^{(n-2)}b} & \frac{1}{2^{(n-3)}b} & \cdots & \frac{1}{2^3 b} & \frac{1}{2^2 b} & \frac{1}{2b} \\ \frac{1}{2^{(n-3)}b} & \frac{1}{2^{(n-3)}b} & \frac{1}{2^{(n-4)}b} & \cdots & \frac{1}{2^2 b} & \frac{1}{2b} & 0 \\ \frac{1}{2^{(n-4)}b} & \frac{1}{2^{(n-4)}b} & \frac{1}{2^{(n-5)}b} & \cdots & \frac{1}{2b} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2^2 b} & \frac{1}{2^2 b} & \frac{1}{2b} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{b} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(n-1)} \quad \text{dan } C^{-1} = \left[\frac{1}{2b}\right]$$

Proof. Berdasarkan definisi Invers, maka pembuktian Teorema 3.1 cukup dengan menunjukkan bahwa terdapat matriks identitas I sedemikian sehingga $BB^{-1} = B^{-1}B = I$

$$BB^{-1} = B^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(n-1)} = I$$

□

Teorema 3.2. *Diberikan matriks RSLPFL$_{circfr}$ $(b, 0, \ldots, 0, b)$ berordo $n \times n$ sebagai berikut:*

$$R_n = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 2b & -b \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2b & -b & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 2b & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & -b & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 2b & -b & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\textit{dengan } C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2b & -b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2b & -b & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 2b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & -b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2b & -b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(n-1)} \quad \textit{dan } B = \begin{bmatrix} b \end{bmatrix}$$

dimana C *dan* B *merupakan suatu submatriks yang invertible dari matriks* $RSLPFL_{circfr}$ *bentuk khusus dengan* $b \in R$ *maka invers dari matriks* C *dan* B *adalah*

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^{(n-1)}b} & \frac{1}{2^{(n-2)}b} & \frac{1}{2^{(n-3)}b} & \cdots & \frac{1}{2^3b} & \frac{1}{2^2b} & \frac{1}{2b} \\ \frac{1}{2^{(n-2)}b} & \frac{1}{2^{(n-3)}b} & \frac{1}{2^{(n-4)}b} & \cdots & \frac{1}{2^2b} & \frac{1}{2b} & 0 \\ \frac{1}{2^{(n-3)}b} & \frac{1}{2^{(n-4)}b} & \frac{1}{2^{(n-5)}b} & \cdots & \frac{1}{2b} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2^3b} & \frac{1}{2^2b} & \frac{1}{2b} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2^2b} & \frac{1}{2b} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2b} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(n-1)} \quad \textit{dan } B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{b} \end{bmatrix}$$

Proof. Berdasarkan definisi Invers, maka pembuktian Teorema 3.2 cukup dengan menunjukkan bahwa terdapat matriks identitas I sedemikian sehingga $CC^{-1} = I$ dan $C^{-1}C = I$

$$CC^{-1} = C^{-1}C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(n-1)} = I$$

□

Berdasarkan penjabaran dapat diduga bentuk umum invers matriks $\text{RSLPFL}_{circfr}\,(b, 0, \dots, 0, b)$ berordo $n \times n$, $n \geq 3$ dengan disajikan pada Teorema 3.3 sebagai berikut.

Teorema 3.3. *Misalkan*

$$R_n = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2b & -b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2b & -b & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 2b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & -b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2b & -b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dimana matriks $RSLPFL_{circfr}$ *tersebut memiliki bentuk khusus dengan* $b \in R$ *maka invers dari matriks tersebut adalah:*

$$R_n^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{1}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{2}{(1+2?^{(n-1)})b} & \cdots & \frac{2^{(n-4)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{2^{(n-3)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{2^{(n-2)}}{(1+2?^{(n-1)})b} \\ \frac{2}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{2}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{2^2}{(1+2?^{(n-1)})b} & \cdots & \frac{2^{(n-3)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{2^{(n-2)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{-1}{(1+2?^{(n-1)})b} \\ \frac{2^2}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{2^2}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{2^3}{(1+2?^{(n-1)})b} & \cdots & \frac{2^{(n-2)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{-1}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{-2}{(1+2?^{(n-1)})b} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{2^{(n-3)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{2^{(n-3)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{2^{(n-2)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \cdots & \frac{-2^{(n-6)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{-2^{(n-5)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{-2^{(n-4)}}{(1+2?^{(n-1)})b} \\ \frac{2^{(n-2)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{2^{(n-2)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{-1}{(1+2?^{(n-1)})b} & \cdots & \frac{-2^{(n-5)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{-2^{(n-4)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{-2^{(n-3)}}{(1+2?^{(n-1)})b} \\ \frac{2^{(n-1)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{-1}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{-2}{(1+2?^{(n-1)})b} & \cdots & \frac{-2^{(n-4)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{-2^{(n-3)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{-2^{(n-2)}}{(1+2?^{(n-1)})b} \end{bmatrix}$$

Proof. Berdasarkan definisi Invers, maka pembuktian Teorema 3.3 cukup dengan menunjukkan bahwa terdapat matriks identitas I sedemikian sehingga $R_nR_n^{-1} = I$ dan $R_n^{-1}R_n = I$.

$$RR^{-1} = R^{-1}R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_n = I$$

□

Teorema-teorema yang diberikan telah dibuktikan sehingga dapat diterapkan dalam menyelesaikan persoalan invers matriks RSLPFL$_{circfr}$ sebagaimana contoh berikut.

Contoh 3.4. *Diberikan matriks* $R_7 =?\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *dengan* $n = 7$, $b = 5$.

Berdasarkan Teorema 3.1 Teorema 3.2 dan Teorema 3.3 tentukan invers submatriks yang invertible dan tentukan pula invers matriks tersebut!

Penyelesaian:

Berdasarkan Teorema 3.1 maka invers submatriks yang diperoleh dengan cara blok kedua adalah

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{160} & \frac{1}{160} & \frac{1}{80} & \frac{1}{40} & \frac{1}{20} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{80} & \frac{1}{80} & \frac{1}{40} & \frac{1}{20} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{20} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textit{dan } C^{-1} = \left[\tfrac{1}{10}\right]$$

Berdasarkan Teorema 3.2 maka invers submatriks yang diperoleh dengan cara blok ketiga adalah

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{320} & \frac{1}{160} & \frac{1}{80} & \frac{1}{40} & \frac{1}{20} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{160} & \frac{1}{80} & \frac{1}{40} & \frac{1}{20} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{80} & \frac{1}{40} & \frac{1}{20} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{20} & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textit{dan } B^{-1} = \left[\tfrac{1}{5}\right]$$

Berdasarkan Teorema 3.3 maka invers matriks RSLPFL$_{circfr}$ bentuk khusus tersebut adalah sebagai berikut.

$$R_7^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{325} & \frac{1}{325} & \frac{2}{325} & \frac{4}{325} & \frac{8}{325} & \frac{16}{325} & \frac{32}{325} \\ \frac{2}{325} & \frac{2}{325} & \frac{4}{325} & \frac{8}{325} & \frac{16}{325} & \frac{32}{325} & \frac{-1}{325} \\ \frac{4}{325} & \frac{4}{325} & \frac{8}{325} & \frac{16}{325} & \frac{32}{325} & \frac{-1}{325} & \frac{-2}{325} \\ \frac{8}{325} & \frac{8}{325} & \frac{16}{325} & \frac{32}{325} & \frac{-1}{325} & \frac{-2}{325} & \frac{-4}{325} \\ \frac{16}{325} & \frac{16}{325} & \frac{32}{325} & \frac{-1}{325} & \frac{-2}{325} & \frac{-4}{325} & \frac{-8}{325} \\ \frac{32}{325} & \frac{32}{325} & \frac{-1}{325} & \frac{-2}{325} & \frac{-4}{325} & \frac{-8}{325} & \frac{-16}{325} \\ \frac{64}{325} & \frac{-1}{325} & \frac{-2}{325} & \frac{-4}{325} & \frac{-8}{325} & \frac{-16}{325} & \frac{-32}{325} \end{bmatrix}$$

4. Simpulan

Berdasarkan penjabaran dari pembahasan pada bab-bab sebelumnya terdapat dua cara mempartisi atau memblok matriks RSLPFL_{circfr} $(b, 0, \ldots, 0, b)$ berordo $n \times n$ $(n \geq 3)$ dan diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut:

(1) Bentuk umum invers submatriks B dan C yang *invertible* dari matriks RSLPFL_{circfr} bentuk khusus yaitu $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^{(n-2)}b} & \frac{1}{2^{(n-2)}b} & \frac{1}{2^{(n-3)}b} & \cdots & \frac{1}{2^3 b} & \frac{1}{2^2 b} & \frac{1}{2b} \\ \frac{1}{2^{(n-3)}b} & \frac{1}{2^{(n-3)}b} & \frac{1}{2^{(n-4)}b} & \cdots & \frac{1}{2^2 b} & \frac{1}{2b} & 0 \\ \frac{1}{2^{(n-4)}b} & \frac{1}{2^{(n-4)}b} & \frac{1}{2^{(n-5)}b} & \cdots & \frac{1}{2b} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2^2 b} & \frac{1}{2^2 b} & \frac{1}{2b} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{b} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(n-1)}$
dan $C^{-1} = \left[\frac{1}{2b}\right]$

(2) Bentuk umum invers submatriks C dan B yang *invertible* dari matriks RSLPFL_{circfr} bentuk khusus yaitu $C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^{(n-1)}b} & \frac{1}{2^{(n-2)}b} & \frac{1}{2^{(n-3)}b} & \cdots & \frac{1}{2^3 b} & \frac{1}{2^2 b} & \frac{1}{2b} \\ \frac{1}{2^{(n-2)}b} & \frac{1}{2^{(n-3)}b} & \frac{1}{2^{(n-4)}b} & \cdots & \frac{1}{2^2 b} & \frac{1}{2b} & 0 \\ \frac{1}{2^{(n-3)}b} & \frac{1}{2^{(n-4)}b} & \frac{1}{2^{(n-5)}b} & \cdots & \frac{1}{2b} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2^3 b} & \frac{1}{2^2 b} & \frac{1}{2b} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2^2 b} & \frac{1}{2b} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2b} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(n-1)}$
dan $B^{-1} = \left[\frac{1}{b}\right]$

(3) Bentuk umum invers matriks RSLPFLcircfr bentuk khusus (b,0,. . . ,0,b) berordo n×n dengan n≥3 yaitu

$$R_n^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{1}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{2}{(1+2?^{(n-1)})b} & \cdots & \frac{2^{(n-4)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{2^{(n-3)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{2^{(n-2)}}{(1+2?^{(n-1)})b} \\ \frac{2}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{2}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{2^2}{(1+2?^{(n-1)})b} & \cdots & \frac{2^{(n-3)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{2^{(n-2)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{-1}{(1+2?^{(n-1)})b} \\ \frac{2^2}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{2^2}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{2^3}{(1+2?^{(n-1)})b} & \cdots & \frac{2^{(n-2)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{-1}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{-2}{(1+2?^{(n-1)})b} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{2^{(n-3)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{2^{(n-3)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{2^{(n-2)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \cdots & \frac{-2^{(n-6)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{-2^{(n-5)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{-2^{(n-4)}}{(1+2?^{(n-1)})b} \\ \frac{2^{(n-2)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{2^{(n-2)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{-1}{(1+2?^{(n-1)})b} & \cdots & \frac{-2^{(n-5)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{-2^{(n-4)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{-2^{(n-3)}}{(1+2?^{(n-1)})b} \\ \frac{2^{(n-1)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{-1}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{-2}{(1+2?^{(n-1)})b} & \cdots & \frac{-2^{(n-4)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{-2^{(n-3)}}{(1+2?^{(n-1)})b} & \frac{-2^{(n-2)}}{(1+2?^{(n-1)})b} \end{bmatrix}$$

Daftar Pustaka

[1] Anton, H., & Rorres, C. (2013). *Elementary Linear Algebra* (11th ed.).

[2] Aryani, fitri and andari, L. (2015). *Invers Drazin Dari Matriks Sirkulan - PDF.pdf. 1*(1), 13–18.

[3] Azizah, A., Thresye, T., & Huda, N. (2018). Invers Dari Matriks Sirkulan Simetris Atas Skew Field. *Jurnal Matematika Murni Dan Terapan Epsilon, 12*(1), 31–42. https://doi.org/10.20527/epsilon.v12i1.203

[4] Cui, X.-Y., & Jiang, N. (2020). Determinants of the RSFPLR Circulant Matrices with the Jacobsthal Numbers. *DEStech Transactions on Computer Science and Engineering, 1*(cmso), 241–244.

[5] Fahlevi, M. R. (2021). *Determinan Matriks Sirkulan dengan Metode Kondensasi Dogson. 18*, 211–220.

[6] Ilhamsyah, Helmi, & Fran, F. (2017). Determinan dan Invers Matriks Blok 2 x 2. *Buletin Ilmiah Math. Stat. Dan Terapannya, 06*(3), 193–202.

[7] Jiang, X., & Hong, K. (2014). Exact determinants of some special circulant matrices involving four kinds of famous numbers. *Abstract and Applied Analysis*, 1–12.

[8] Lu, T. T., & Shiou, S. H. (2002). Inverses of 2 × 2 block matrices. *Computers and Mathematics with Applications, 43*(1–2), 119–129.

[9] Mamula, D., & Achmad, N. (2021). *Matriks Circulant Kompleks Bentuk Khusus 3 × 3 Berpangkat Bilangan Bulat. 17*(2), 109–118.

[10] Purnama sari, W., Noliza Bakar, N., & Yanita, Y. (2020). Menghitung Determinan Matriks Blok Menggunakan Ekspansi Laplace Dan Komplemen Schur. *Jurnal Matematika UNAND*, *9*(2), 138.
[11] Rahma, A. N., Anggelina, M., Rahmawati, & Zukrianto. (2019). *Invers Matriks Blok 2x2 Dalam Aplikasi Matriks FLDcircr Bentuk Khusus*. 334–344.
[12] Rahmawati, Fitri, N., & Rahma, A. N. (2020). Invers Matriks RSFPLRcircfr (0,b,...,b). *Jurnal Sains Matematika Dan Statistika*, *6*(1), 113–121.
[13] Rainarli, E., Si, M., Dewi, K. E., Si, M., & Informatika, J. T. (2011). *Aljabar Linear dan Matriks*.
[14] Redivo-Zaglia, M. (2004). Pseudo-Schur Complements and Their Properties. *Applied Numerical Mathematics*, *50*(3–4), 511–519.
[15] Yulian, A., Sitio, S. L. M., Kusuma, S. D. Y., & Rosyani, P. (2019). *Aljabar Linier dan Matriks*.