Jurnal Matematika Integratif. p-ISSN:1412-6184, e-ISSN:2549-903
Vol. 20, No. 1 (2024), pp. 47–62. doi:10.24198/jmi.v20.n1.53676.47-62

Bukti Alternatif Sifat Simetri Fungsi Partisi Crank Dyson-Andrews-Garvan

Agung Aldhi Prastya, Carolus Pasha Lazuardi Jituprasojo Hatmakelana, Uha Isnaini

Departemen Matematika, Universitas Gadjah Mada,
Bulaksumur, Jl. Geografi, Kec. Mlati, Sleman, Daerah Istimewa Yogyakarta 55281
Email: aldhiprastya@mail.ugm.ac.id

Abstrak
Partisi dari suatu bilangan bulat positif n adalah barisan tak naik atas bilangan bulat positif berhingga sehingga jumlahnya adalah n. Salah satu hal yang dikaji oleh beberapa peneliti dalam partisi bilangan bulat adalah fungsi partisi crank. Untuk setiap bilangan bulat positif n dan partisi x dari n, crank dari x didefinisikan sebagai penjumlah terbesar di x jika x tidak memuat penjumlah 1; sebagai selisih antara banyaknya penjumlah yang lebih dari banyaknya penjumlah 1 di x dan banyaknya penjumlah 1 di x. Dinotasikan fungsi partisi crank dengan $M(m, j, n)$ yang menyatakan banyaknya partisi dari n dengan crank kongruen m modulo j. Pada penelitian ini, dibahas terkait bukti sifat simetri fungsi partisi crank, yaitu $M(m, j, n) = M(-m, j, n)$. Bukti diberikan menggunakan interpretasi kombinatorial melalui konstruksi fungsi bijektif yang memetakan partisi dengan syarat tertentu ke partisi dengan syarat tertentu lainnya.

Kata kunci: Partisi bilangan bulat, Crank dari suatu partisi, Fungsi partisi crank Dyson-Andrews-Garvan, Fungsi bijektif.

Abstract
A partition of a positive integer n is a non-increasing sequence of finite positive integers whose sum is n. One area studied by several researchers in the partition of integers is the crank partition function. For every positive integer n and a partition x of n, the crank of x is defined as the largest summand in x when x does not include a summand of 1; or as the difference between the number of summands greater than the number of summands of 1 in x and the number of summands of 1 in x. The crank partition function is denoted by $M(m, j, n)$, which represents the number of partitions of n with a crank congruent to m modulo j. In this study, we discuss the proof of symmetric property of the crank partition function, namely, $M(m, j, n) = M(-m, j, n)$. A proof is provided using a combinatorial interpretation through the construction of a bijective function that maps partitions with certain conditions to partitions with other certain conditions.

Keywords: Integer partitions, Crank of a partition, The Dyson-Andrews-Garvan crank partition function, Bijective function.

2000 Mathematics Subject Classification: 20M20
Received: 28-02-2024, accepted: 31-05-2024.

1. Pendahuluan

Teori bilangan adalah salah satu cabang ilmu matematika yang terus berkembang. Terdapat banyak topik di dalam teori bilangan yang dapat dikaji lebih lanjut, salah satunya adalah teori partisi bilangan bulat. Partisi dari suatu bilangan bulat positif n merupakan barisan tak naik atas bilangan bulat positif berhingga sehingga jumlahnya adalah n [1] [2]. Secara formal, partisi dari suatu bilangan bulat positif n didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.1. *Diberikan $n, \lambda \in \mathbb{N}$. Bilangan λ disebut partisi dari n, ditulis $\lambda \vdash n$, jika*

$$\lambda = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n,$$

untuk suatu $k \in \mathbb{N}$ dengan $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$.

Pada pembahasan ini, dinotasikan $\mathbb{N}$ dan $\mathbb{N}_0$ berturut-turut sebagai himpunan semua bilangan bulat positif dan himpunan semua bilangan bulat tak negatif. Untuk mempermudah penulisan, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$ ditulis sebagai $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$. Sebagai ilustrasi, diberikan contoh berikut.

Contoh 1.2. *Semua partisi dari* 5 *adalah*

$$(5), (4,1), (3,2), (3,1,1), (2,2,1), (2,1,1,1), \text{ dan } (1,1,1,1,1).$$

Selanjutnya, untuk keperluan pembuktian hasil utama *paper*, terlebih dahulu diberikan definisi konjugat partisi dari suatu bilangan bulat positif sebagai berikut.

Definisi 1.3. *Diberikan $n \in \mathbb{N}$ dan $\lambda \vdash n$. Misalkan*

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k)$$

untuk suatu bilangan bulat positif k. Didefinisikan konjugat λ^* dari λ sebagai

$$\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \ldots, \lambda_{\lambda_1}^*),$$

dengan

$$\lambda_i^* = \#\{u : \lambda_u \geq i\}, \qquad \forall i \in \{1, 2, 3, \ldots, \lambda_1\}.$$

Untuk lebih jelasnya, diperhatikan contoh berikut.

Contoh 1.4. *Diberikan $n = 4$ dan $\lambda = (2,1,1) \vdash 4$. Diperoleh $\lambda_1 = 2$, $\lambda_1^* = \#\{u : \lambda_u \geq 1\} = 3$, dan $\lambda_2^* = \#\{u : \lambda_u \geq 2\} = 1$ sehingga $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*) = (3,1)$.*

Berikutnya, pada 1944, Dyson [3] menemukan beberapa hasil dalam teori partisi bilangan bulat. Beberapa di antaranya adalah menemukan istilah "crank" dari suatu partisi, dugaan bahwa "crank" ini bersifat simetri, dan dapat menjelaskan kongruensi partisi Ramanujan terhadap modulo $5, 7$, dan 11. Selanjutnya, pada 1988, Andrews dan Garvan [4] mendefinisikan "crank" yang ditemukan oleh Dyson sebagai berikut.

Definisi 1.5. *Diberikan $n \in \mathbb{N}$. Untuk sebarang $\lambda \vdash n$, dinotasikan:*

- *$l(\lambda)$: penjumlah terbesar pada λ;*
- *$\omega(\lambda)$: banyaknya penjumlah 1 pada λ; dan*
- *$\mu(\lambda)$: banyaknya penjumlah pada λ yang lebih dari $\omega(\lambda)$.*

Didefinisikan crank dari λ, ditulis $c(\lambda)$, sebagai berikut:

$$c(\lambda) = \begin{cases} l(\lambda), & \omega(\lambda) = 0; \\ \mu(\lambda) - \omega(\lambda), & \omega(\lambda) > 0. \end{cases}$$

Sebagai ilustrasi, diberikan contoh berikut.

Contoh 1.6. *Diberikan $\lambda = (3,2,1,1,1) \vdash 8$. Diperoleh $l(\lambda) = 3, \omega(\lambda) = 3$, dan $\mu(\lambda) = 0$. Karena $\omega(\lambda) > 0$, diperoleh $c(\lambda) = \mu(\lambda) - \omega(\lambda) = 0 - 3 = -3$.*

Berikutnya, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dinotasikan $M(m,n)$ sebagai banyaknya partisi dari n dengan crank m. Sebagai contoh, $M(-3,3) = 1$, yaitu $(1,1,1) \vdash 3$. Lebih lanjut, fungsi $M(m,n)$ disebut sebagai fungsi partisi crank Dyson-Andrews-Garvan.

Selanjutnya, didefinisikan notasi $M(m,j,n)$ sebagai berikut.

Definisi 1.7. *Diberikan $n, j \in \mathbb{N}$. Untuk setiap $m \in \mathbb{N}_0$ dengan $m = 0,1,2,\ldots,j-1$, banyaknya $\lambda \vdash n$ dengan $c(\lambda) \equiv m \pmod j$ dinotasikan dengan $M(m,j,n)$.*

Sebagai ilustrasi, diberikan contoh berikut.

Contoh 1.8. *Diberikan $n = 4$ dan $j = 5$. Dapat dicek bahwa*

$$M(0,5,4) = M(1,5,4) = M(2,5,4) = M(3,5,4) = M(4,5,4) = 1.$$

Termotivasi dari hasil penelitian Dyson, pada 1988, Garvan [5] berhasil membuktikan dugaan-dugaan yang diperoleh oleh Dyson. Salah satunya adalah terkait mengapa crank dapat menjelaskan kongruensi partisi Ramanujan terhadap modulo $5, 7$, dan 11. Selain itu, Garvan juga berhasil membuktikan sifat simetri fungsi partisi crank Dyson-Andrews-Garvan, yaitu $M(m,j,n) = M(-m,j,n)$, yang merupakan bahasan inti *paper* ini, menggunakan sudut pandang fungsi pembangkit partisi. Buktinya diberikan sebagai berikut.

Diberikan bilangan bulat positif n. Untuk setiap partisi π dari n, didefinisikan $\#(\pi)$ dan $\sigma(\pi)$ berturut-turut sebagai banyaknya penjumlah pada π dan jumlahan semua penjumlah pada π dengan $\#(\emptyset) = \sigma(\emptyset) = 0$ untuk partisi kosong $\emptyset$ dari 0 [4]. Selanjutnya, misalkan

$$\begin{aligned} V = \{(\pi_1,\pi_2,\pi_3) : \pi_1 &\text{ partisi dengan penjumlah berbeda,} \\ &\pi_2,\pi_3 \text{ sebarang partisi}\}. \end{aligned}$$

Semua anggota dari V disebut vektor partisi.

Selanjutnya, untuk setiap $\pi \in V$, didefinisikan jumlahan semua penjumlah, s_V, bobot, ω_V, dan *crank*, c_V, sebagai

$$\begin{aligned} s_V(\pi) &= \sigma(\pi_1) + \sigma(\pi_2) + \sigma(\pi_3), \\ \omega_V(\pi) &= (-1)^{\#(\pi_1)}, \\ c_V(\pi) &= \#(\pi_2) - \#(\pi_3). \end{aligned}$$

Lebih lanjut, π disebut vektor partisi dari n jika $s_V(\pi) = n$. Sebagai contoh, jika

$$\pi = (5+4+3, 3+2+1+1, 4+2),$$

maka $s_V(\pi) = 25, \omega_V(\pi) = -1$, and $c_V(\pi) = 2$. Jadi, π merupakan vektor partisi dari 25.

Selanjutnya, didefinisikan $N_V(m,n)$ sebagai banyaknya vektor partisi dari n berdasarkan bobot ω_V dengan crank m dan

$$R = \{v \in V : s_V(v) = n, c_V(v) = m\}.$$

Diperoleh

$$N_V(m,n) = \sum_{v \in R} \omega_V(v).$$

Berikutnya, misalkan $N_V(m,j,n)$ menotasikan banyaknya vektor partisi dari n berdasarkan bobot ω_V dengan crank kongruen m modulo j dan

$$\begin{aligned} S &= \{v \in V : s_V(v) = n, c_V(v) \equiv m \pmod j\} \\ &= \{v \in V : s_V(v) = n, c_V(v) = jk + m, k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Diperoleh

$$N_V(m,j,n) = \sum_{v \in S} \omega_V(v) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} N_V(jk+m,n).$$

Fungsi pembangkit untuk $N_V(m,n)$ adalah

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \geq 0} N_V(m,n) z^m q^n = \prod_{n \geq 1} \frac{(1-q^n)}{(1-zq^n)(1-z^{-1}q^n)}, \qquad z \neq 0, |q| < 1, |z| < \frac{1}{|q|}.$$

Beberapa notasi untuk deret-q adalah sebagai berikut.

$$(a;q)_n = (a)_n = \prod_{j=0}^{n-1}(1-aq^j)$$

dan

$$(a;q)_\infty = (a)_\infty = \prod_{j\geq 0}(1-aq^j).$$

Akan dibuktikan bahwa $N_V(m,n) = N_V(-m,n)$. Untuk setiap bilangan bulat m, didefinisikan

$$A_m(n) = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in V : s_V(v) = n, c_V(v) = m\}$$

dan

$$B_m(n) = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in V : s_V(v) = n, c_V(v) = -m\}.$$

Dengan meninjau transformasi yang menukar tempat v_2 dan v_3, diperoleh

$$N_V(m,n) = \sum_{v\in A_m(n)} \omega_V(v) = \sum_{v\in B_m(n)} \omega_V(n) = N_V(-m,n).$$

Akibatnya, terbukti bahwa $N_V(m,n) = N_V(-m,n)$.
Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $N_V(m,j,n) = N_V(-m,j,n)$. Berdasarkan definisi $N_V(m,j,n)$, diperoleh

$$\begin{aligned} N_V(m,j,n) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} N_V(jk+m,n) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} N_V(-(jk+m),n) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} N_V(jk-m,n) \\ &= N_V(-m,j,n) \end{aligned}$$

sehingga terbukti $N_V(m,j,n) = N_V(-m,j,n)$.
Berikutnya, akan dibuktikan bahwa $M(m,n) = N_V(m,n)$. Pada 1984, Andrews [1] telah membuktikan bahwa untuk setiap bilangan real a, q, dan t dengan $q, t \in (-1,1)$, berlaku

$$\frac{(at;q)_\infty}{(t)_\infty} = \sum_{k\geq 0} \frac{(a)_k t^k}{(q)_k}. \tag{1}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\geq 0} N_V(m,n) z^m q^n &= \prod_{n\geq 1} \frac{(1-q^n)}{(1-zq^n)(1-z^{-1}q^n)} \\ &= \frac{(1-q)}{(zq)_\infty} \cdot \frac{(q^2;q)_\infty}{(z^{-1}q)_\infty} \\ &= \frac{(1-q)}{(zq)_\infty} \sum_{j\geq 0} \frac{(zq)_j (z^{-1}q)^j}{(q)_j} \qquad \text{(dari Persamaan (1))} \\ &= \frac{(1-q)}{(zq)_\infty} + \sum_{j\geq 1} \frac{z^{-j}q^j}{(q^2;q)_{j-1}(zq^{j+1})_\infty}. \end{aligned}$$

Tinjau bahwa untuk setiap $j > 0$, bentuk ke-j dalam jumlahan pada ruas kanan persamaan terakhir sama dengan

$$\frac{z^{-j} q^{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{j \text{ kali}}}}{(1-q^2)(1-q^3)\cdots(1-q^j)(1-zq^{j+1})(1-zq^{j+2})\cdots}.$$

Bentuk polinomial hasil penjabaran ekspresi ini membangun partisi dengan $\omega(v) = j$, dan pangkat dari z sama dengan $\mu(v) - \omega(v) = c(v)$ untuk $v \vdash n$. Harus ditunjukkan bahwa

$$\frac{1-q}{(zq)_\infty} = \frac{1-q}{(1-zq)(1-zq^2)(1-zq^3)\cdots}$$

merupakan fungsi pembangkit untuk partisi tanpa penjumlah 1. Perhatikan bahwa

$$\prod_{n\geq 1} \frac{1}{1-zq^n} = \frac{1}{(1-zq)(1-zq^2)(1-zq^3)(1-zq^4)\cdots}$$

membangun semua partisi dengan pangkat dari z menghitung banyaknya penjumlah. Namun, karena konjugasi merupakan sebuah bijeksi pada partisi dari n, fungsi tersebut juga membangun semua partisi dengan pangkat dari z menghitung penjumlah terbesar. Di lain pihak, fungsi

$$\prod_{n\geq 1} \frac{q}{1-zq^n} = \frac{q}{(1-zq)(1-zq^2)(1-zq^3)(1-zq^4)\cdots}$$

membangun partisi dengan penjumlah 1 muncul setidaknya satu kali dan dengan pangkat dari z menghitung penjumlah terbesar. Akibatnya,

$$\frac{1-q}{(zq)_\infty} = \frac{1-q}{(1-zq)(1-zq^2)(1-zq^3)\cdots}$$

menghitung banyaknya partisi tanpa penjumlah 1 dan dengan pangkat dari z menjadi penjumlah terbesar pada partisi $l(\lambda) = c(\lambda)$. Jadi, koefisien $z^m q^n$ pada penjabaran

$$\frac{(1-q)}{(zq)_\infty} + \sum_{j\geq 1} \frac{z^{-j}q^j}{(q^2;q)_{j-1}(zq^{j+1})_\infty}$$

menyatakan banyaknya partisi dari n dengan $c(\lambda) = m$. Dengan kata lain,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\geq 0} N_V(m,n) z^m q^n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\geq 0} M(m,n) z^m q^n,$$

yang setara dengan $N_V(m,n) = M(m,n)$, sesuai yang diinginkan.
Terakhir, akan dibuktikan bahwa $M(m,j,n) = M(-m,j,n)$. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned}
M(m,j,n) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} M(jk+m,n) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} N_V(jk+m,n) \\
&= N_V(m,j,n) \\
&= N_V(-m,j,n) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} N_V(jk-m,n) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} M(jk-m,n) \\
&= M(-m,j,n).
\end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $M(m,j,n) = M(-m,j,n)$.

Perhatikan bahwa ide dan alur pembuktian yang dilakukan oleh Garvan [5] di atas menggunakan konsep fungsi pembangkit partisi. Melihat diperlukannya beberapa lemma untuk pembuktian dan panjangnya bukti, menarik perhatian kami untuk mencari bukti alternatif yang lebih efisien secara alat dan hanya dengan menggunakan konsep standar. Salah satunya adalah dengan memanfaatkan konjugasi partisi yang merupakan bijeksi.

Berangkat dari hasil penelitian Dyson, beberapa kelompok peneliti mengkaji lebih lanjut terkait crank dari partisi bilangan bulat [6] [7] [8] [9] [10] [11] [12] [13]. Dalam pembahasan ini, digunakan metode pembuktian bijeksi untuk membuktikan sifat simetri fungsi partisi crank

Dyson-Andrews-Garvan yang memetakan partisi bersyarat tertentu ke partisi bersyarat tertentu lainnya [14] [15] [16]. Bukti dibagi ke dalam tiga kasus yang didasarkan pada Definisi 1.5.

2. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur buku ataupun penelitian sebelumnya tentang partisi bilangan bulat. Referensi utama yang digunakan yaitu *paper* yang disusun oleh G. E. Andrews dan F. G. Garvan dengan judul "*Dyson's crank of a partition*". Dari *paper* tersebut, penulis melengkapi bukti serta memberikan alternatif bukti terhadap isi *paper*.

Langkah pertama yang dilakukan adalah mempelajari konsep dasar yang diperlukan, yaitu fungsi bijektif. Selanjutnya, dipelajari terkait kombinatorik, khususnya interpretasi kombinatorial, yaitu metode pembuktian yang memanfaatkan konstruksi fungsi bijektif dari suatu himpunan dengan kriteria tertentu ke himpunan dengan kriteria tertentu lainnya. Berikutnya, dipelajari terkait partisi bilangan bulat yang meliputi definisi, fungsi partisi, identitas fungsi partisi, dan pembuktian bijektif identitas fungsi partisi. Langkah selanjutnya adalah melengkapi bukti dalam bahasan *paper* yang masih rumpang dengan sudut pandang fungsi pembangkit. Langkah terakhir adalah memberikan bukti alternatif terkait bahasan inti *paper* dengan sudut pandang kombinatorial.

3. Hasil dan Pembahasan

Sebelum dibahas teorema yang menjadi inti dari *paper* ini, terlebih dahulu diberikan lemma sebagai berikut.

Lemma 3.1. *Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan sebarang $m \in \mathbb{N}_0$, berlaku $M(m,n) = M(-m,n)$.*

Proof. Diberikan sebarang $n \in \mathbb{N}$. Diambil sebarang $\lambda \vdash n$. Jika $n = 1$, maka crank yang mungkin dari $\lambda = (1)$ hanyalah -1 atau 1 sehingga $M(1,1) = M(-1,1) = 1$.

Selanjutnya, ditinjau $n > 1$. Dibentuk dua himpunan

$$A_n = \{\lambda \vdash n : \omega(\lambda) = 0\} \qquad \text{dan} \qquad B_n = \{\lambda \vdash n : \omega(\lambda) > 0, \mu(\lambda) = 0\}.$$

Akan ditunjukkan bahwa $|A_n| = |B_n|$. Misalkan

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k) \quad \text{dan} \quad \gamma = (\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\lambda_1}),$$

untuk suatu bilangan bulat positif k dengan $\lambda_i > 1$ untuk setiap $i \in \{1, 2, 3, \ldots, k\}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \gamma &= (\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\lambda_1}) \\ &= (\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k, \lambda_1) \\ &= (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k) \\ &\vdash n. \end{aligned}$$

Lebih lanjut,

$$\omega(\lambda) = 0, \omega(\gamma) = \lambda_1 > 0, \text{ dan } \mu(\gamma) = 0.$$

Akibatnya, $\lambda \in A_n, \gamma \in B_n$, dan

$$c(\lambda) = l(\lambda) = \lambda_1 = -(-\lambda_1) = -(0 - \lambda_1) = -(\mu(\gamma) - \omega(\gamma)) = -c(\gamma).$$

Selanjutnya, dibentuk pengaitan $f : A_n \to B_n$ dengan $f(\lambda) = \gamma$. Akan dibuktikan bahwa f merupakan fungsi bijektif.

Bukti f merupakan fungsi. Pertama, akan ditunjukkan bahwa $\mathrm{Dom}(f) = A_n$. Jelas bahwa $\mathrm{Dom}(f) \subseteq A_n$. Diambil sebarang $x \in A_n$. Misalkan $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k)$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$ dengan $x_i > 1$ untuk setiap $i \in \{1, 2, 3, \ldots, k\}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f(x) &= f((x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k)) \\ &= (x_2, x_3, \ldots, x_k, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{x_1}) \\ &=: y \\ &\in B_n, \end{aligned}$$

sebab $\omega(y) = x_1 > 0$ dan $\mu(y) = 0$. Akibatnya, $A_n \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ sehingga terbukti bahwa $\mathrm{Dom}(f) = A_n$.

Berikutnya, akan dibuktikan bahwa f *well-defined*. Diambil sebarang $x, y \in A_n$ dengan $x = y$. Misalkan $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k)$ dan $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_l)$, untuk suatu bilangan bulat positif k dan l dengan $x_i > 1$ dan $y_j > 1$ untuk setiap i dan j dengan $1 \le i \le k$ dan $1 \le j \le l$. Akan ditunjukkan bahwa $f(x) = f(y)$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f(x) &= f((x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k)) \\ &= (x_2, x_3, \ldots, x_k, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{x_1}) \\ &= (x_2, x_3, \ldots, x_k, x_1) \\ &= (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) \\ &= (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_l) \\ &= (y_2, y_3, \ldots, y_l, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{y_1}) \\ &= f((y_1, y_2, y_3, \ldots, y_l)) \\ &= f(y). \end{aligned}$$

Terbukti bahwa f *well-defined*.

Dengan demikian, karena $\mathrm{Dom}(f) = A_n$ dan f *well-defined*, terbukti bahwa f merupakan fungsi.

Bukti f injektif Diambil sebarang $x, y \in A_n$ dengan $f(x) = f(y)$. Misalkan

$$x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) \text{ dan } y = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_l),$$

untuk suatu bilangan bulat positif k dan l, dengan $x_i > 1$ dan $y_j > 1$ untuk setiap i dan j dengan $1 \le i \le k$ dan $1 \le j \le l$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\implies f((x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k)) = f((y_1, y_2, y_3, \ldots, y_l)) \\ &\implies (x_2, x_3, \ldots, x_k, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{x_1}) = (y_2, y_3, \ldots, y_l, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{y_1}) \\ &\implies (x_2, x_3, \ldots, x_k, x_1) = (y_2, y_3, \ldots, y_l, y_1) \\ &\implies (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_l) \\ &\implies x = y. \end{aligned}$$

Terbukti bahwa f injektif.

Bukti f surjektif. Diambil sebarang $y \in B_n$. Misalkan

$$y = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\omega(y)})$$

untuk suatu bilangan bulat positif k dengan $x_i > 1$ dan $x_i \le \omega(y)$ untuk setiap i dengan $1 \le i \le k$. Dibentuk

$$x = (\omega(y), x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k).$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} x &= (\omega(y), x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) \\ &= (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\omega(y)}, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) \\ &= (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\omega(y)}) \\ &\vdash n. \end{aligned}$$

Selanjutnya, karena $x_i > 1$ untuk setiap i dengan $1 \leq i \leq k$, didapat $\omega(y) > 1$ sehingga $\omega(x) = 0$. Akibatnya, $x \in A_n$. Berikutnya, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f(x) &= f((\omega(y), x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k)) \\ &= (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\omega(y)}) \\ &= y. \end{aligned}$$

Jadi, untuk setiap $y \in B_n$ dengan $y = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\omega(y)})$ untuk suatu bilangan bulat positif k dengan $x_i > 1$ dan $x_i \leq \omega(y)$ untuk setiap i dengan $1 \leq i \leq k$, terdapat $x \in A_n$ dengan $x = (\omega(y), x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k)$ sehingga $f(x) = y$. Terbukti bahwa f surjektif.
Jadi, terbukti bahwa f merupakan fungsi bijektif.
Dengan demikian, $|A_n| = |B_n|$. Dengan kata lain, untuk setiap $\lambda \in A_n$, berlaku

$$M(l(\lambda), n) = M(-\omega(\lambda'), n),$$

untuk suatu $\lambda' \vdash n$ dengan $f(\lambda) = \lambda'$ Akibatnya,

$$M(l(\lambda), n) = M(-\omega(\lambda'), n) = M(-l(\lambda), n).$$

Dengan argumen serupa, diperoleh

$$M(-\omega(\lambda), n) = M(l(\lambda'), n) = M(\omega(\lambda), n).$$

Terbukti bahwa $M(m, n) = M(-m, n)$ untuk setiap bilangan bulat positif m dengan $m = c(\lambda)$ untuk $\omega(\lambda) = 0$; $\omega(\lambda) > 0$ dan $\mu(\lambda) = 0$.

Berikutnya, akan ditunjukkan bahwa $M(m, n) = M(-m, n)$ untuk setiap bilangan bulat tak negatif m dengan $m = c(\lambda)$ untuk $\omega(\lambda) > 0$ dan $\mu(\lambda) > 0$, yaitu

$$M(\mu(\lambda) - \omega(\lambda), n) = M(-(\mu(\lambda) - \omega(\lambda)), n).$$

Jika $\omega(\lambda) = \mu(\lambda)$, maka

$$M(\mu(\lambda) - \omega(\lambda), n) = M(0, n) = M(-0, n) = M(-(\mu(\lambda) - \omega(\lambda)), n).$$

Selanjutnya, ditinjau untuk $\omega(\lambda) > \mu(\lambda)$ dan $\omega(\lambda) < \mu(\lambda)$. Dibentuk dua himpunan

$$C_n = \{\lambda \vdash n : \omega(\lambda) < \mu(\lambda)\} \qquad \text{dan} \qquad D_n = \{\lambda \vdash n : \omega(\lambda) > \mu(\lambda)\}.$$

Akan ditunjukkan bahwa $|C_n| = |D_n|$. Misalkan

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{\omega(\lambda)}, \lambda_{\omega(\lambda)+1}, \ldots, \lambda_{\omega(\lambda)+k}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\omega(\lambda)}),$$

untuk suatu bilangan bulat positif k, dengan $\lambda_i > 1$ untuk setiap i dengan $1 \leq i \leq \omega(\lambda)+k$, dan $\lambda_i > \omega(\lambda)$ untuk suatu i dengan $\omega(\lambda)+1 \leq i \leq \omega(\lambda)+k$, didapat $\mu(\lambda) = \omega(\lambda)+j > \omega(\lambda)$, untuk suatu j dengan $1 \leq j \leq k$ sehingga $\lambda \in C_n$. Lebih lanjut, $\mu(\lambda) = \lambda^*_{\omega(\lambda)+1}$ dan $\omega(\lambda) = \lambda^*_1 - \lambda^*_2$.
Berikutnya, dibentuk partisi

$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_{\omega(\lambda)}, v_{\omega(\lambda)+1}, \ldots, v_{\lambda_2-1}, v_{\lambda_2}, \ldots, v_{\lambda_2+\mu(\lambda)-1})$$

dari suatu bilangan bulat positif dengan

$$v_i = \begin{cases} \lambda_2^* + \lambda_1 - (\lambda_2 - 1), & i = 1; \\ 1 + \lambda_i^*, & 2 \leq i \leq \omega(\lambda); \\ \lambda_{i+1}^*, & \omega(\lambda) + 1 \leq i \leq \lambda_2 - 1; \\ 1, & \lambda_2 \leq i \leq \lambda_2 + \mu(\lambda) - 1. \end{cases}$$

Perhatikan bahwa $\lambda_i^* = 1$ untuk setiap i dengan $\lambda_2 + 1 \leq i \leq \lambda_1$. Akibatnya,

$$\begin{aligned} v &= v_1 + v_2 + \cdots + v_{\omega(\lambda)} + v_{\omega(\lambda)+1} + \cdots + v_{\lambda_2 - 1} + v_{\lambda_2} + \cdots + v_{\lambda_2 + \mu(\lambda) - 1} \\ &= \lambda_2^* + \lambda_1 - (\lambda_2 - 1) + 1 + \lambda_2^* + \cdots + 1 + \lambda_{\omega(\lambda)}^* + \lambda_{(\omega(\lambda)+1)+1}^* + \cdots + \lambda_{(\lambda_2 - 1)+1}^* \\ &\quad + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\mu(\lambda)} \\ &= \lambda_2^* + \lambda_1 - \lambda_2 + 1 + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\omega(\lambda)-1} + \lambda_2^* + \cdots + \lambda_{\omega(\lambda)}^* + \lambda_{\omega(\lambda)+2}^* + \cdots + \lambda_{\lambda_2}^* + \mu(\lambda) \\ &= \omega(\lambda) + \lambda_2^* + \lambda_1 - \lambda_2 - 1 + 1 + \sum_{i=2}^{\omega(\lambda)} \lambda_i^* + \sum_{i=\omega(\lambda)+2}^{\lambda_2} \lambda_i^* + \mu(\lambda) \\ &= \underbrace{\omega(\lambda) + \lambda_2^*}_{\lambda_1^*} + \underbrace{\lambda_1 - (\lambda_2 + 1) + 1}_{\sum_{i=\lambda_2+1}^{\lambda_1} \lambda_i^*} + \sum_{i=2}^{\omega(\lambda)} \lambda_i^* + \sum_{i=\omega(\lambda)+2}^{\lambda_2} \lambda_i^* + \underbrace{\mu(\lambda)}_{\lambda_{\omega(\lambda)+1}^*} \\ &= \sum_{i=1}^{\lambda_1} \lambda_i^* \\ &= \lambda^*. \end{aligned}$$

Karena konjugasi merupakan bijeksi, diperoleh $v \vdash n$.
Selanjutnya, perhatikan bahwa untuk setiap i dengan $\omega(\lambda) + 1 \leq i \leq \lambda_2 - 1$, diperoleh

$$2 = \lambda_{\lambda_2}^* \leq v_i \leq \lambda_{\omega(\lambda)+2}^* \leq \mu(\lambda).$$

Berikutnya, karena $\lambda_1 - \lambda_2 + 1 \geq 1$ dan $\lambda_2^* \geq \lambda_{\omega(\lambda)+1}^* = \mu(\lambda)$, diperoleh

$$v_1 = \lambda_2^* + \lambda_1 - (\lambda_2 - 1) \geq 1 + \mu(\lambda) > \mu(\lambda).$$

Terakhir, untuk setiap i dengan $2 \leq i \leq \omega(\lambda)$, didapat

$$v_i = 1 + \lambda_i^* \geq 1 + \lambda_{\omega(\lambda)}^* \geq 1 + \mu(\lambda) > \mu(\lambda).$$

Akibatnya, $\omega(v) = \mu(\lambda)$ dan $\mu(v) = \omega(\lambda)$ sehingga

$$\mu(v) = \omega(\lambda) < \mu(\lambda) = \omega(v).$$

Karena $v \vdash n$ dan $\mu(v) < \omega(v)$, diperoleh $v \in D_n$. Lebih lanjut,

$$c(v) = \mu(v) - \omega(v) = \omega(\lambda) - \mu(\lambda) = -(\mu(\lambda) - \omega(\lambda)) = -c(\lambda).$$

Selanjutnya, dibentuk pengaitan $g : C_n \to D_n$ dengan $g(\lambda) = v$. Akan dibuktikan bahwa g merupakan fungsi bijektif.

Bukti g merupakan fungsi. Pertama, akan ditunjukkan bahwa $\mathrm{Dom}(g) = C_n$. Perhatikan bahwa $\mathrm{Dom}(g) \subseteq C_n$. Diambil sebarang $x \in C_n$. Misalkan

$$x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{\omega(x)}, x_{\omega(x)+1}, \ldots, x_{\omega(x)+k}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\omega(x)}),$$

untuk suatu bilangan bulat positif k, dengan $x_i > 1$ untuk setiap i dengan $1 \leq i \leq \omega(x) + k$, dan $x_i > \omega(x)$ untuk suatu i dengan $\omega(x) + 1 \leq i \leq \omega(x) + k$. Selanjutnya, perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
g(x) &= g((x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{\omega(x)}, x_{\omega(x)+1}, \ldots, x_{\omega(x)+k}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\omega(x)})) \\
&= x_2^* + x_1 - (x_2 - 1) + 1 + x_2^* + \cdots + 1 + x^*_{\omega(x)} + x^*_{(\omega(x)+1)+1} + \cdots + x^*_{(x_2-1)+1} \\
&\quad + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\mu(x)} \\
&= x_2^* + x_1 - x_2 + 1 + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\omega(x)-1} + x_2^* + \cdots x^*_{\omega(x)} + x^*_{\omega(x)+2} + \cdots + x^*_{x_2} + \mu(x) \\
&= \omega(x) + x_2^* + x_1 - x_2 + 1 - 1 + \sum_{i=2}^{\omega(x)} x_i^* + \sum_{i=\omega(x)+2}^{x_2} x_i^* + \mu(x) \\
&= \underbrace{\omega(x) + x_2^*}_{x_1^*} + \underbrace{x_1 - ((x_2 + 1) + 1}_{\sum_{i=x_2+1}^{x_1} x_i^*} + \sum_{i=2}^{\omega(x)} x_i^* + \sum_{i=\omega(x)+2}^{x_2} x_i^* + \underbrace{\mu(x)}_{x^*_{\omega(x)+1}} \\
&= \sum_{i=1}^{x_1} x_i^* \\
&= x^* \\
&=: y \\
&\in D_n,
\end{aligned}
$$

sebab $\omega(y) > \mu(y)$. Akibatnya, $C_n \subseteq \mathrm{Dom}(g)$. Terbukti bahwa $\mathrm{Dom}(g) = C_n$.

Berikutnya, akan dibuktikan bahwa g *well-defined*. Diambil sebarang $x, y \in C_n$ dengan $x = y$. Misalkan

$$x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{\omega(x)}, x_{\omega(x)+1}, \ldots, x_{\omega(x)+k}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\omega(x)})$$

dan

$$y = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{\omega(y)}, y_{\omega(y)+1}, \ldots, y_{\omega(y)+l}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\omega(y)})$$

untuk suatu bilangan bulat positif k dan l, dengan $x_i > 1$ dan $y_i > 1$ untuk setiap i dan setiap j dengan $1 \leq i \leq \omega(x) + k$ dan $1 \leq j \leq \omega(y) + l$; $x_i > \omega(x)$ dan $y_j > \omega(y)$ untuk setiap i dan setiap j dengan $\omega(x) + 1 \leq i \leq \omega(x) + k$ dan $\omega(y) + 1 \leq j \leq \omega(y) + l$.

Akan ditunjukkan bahwa $g(x) = g(y)$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
g(x) &= g((x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{\omega(x)}, x_{\omega(x)+1}, \ldots, x_{\omega(x)+k}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\omega(x)})) \\
&= x_2^* + x_1 - (x_2 - 1) + 1 + x_2^* + \cdots + 1 + x_{\omega(x)}^* + x_{(\omega(x)+1)+1}^* + \cdots + x_{(x_2-1)+1}^* \\
&\quad + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\mu(x)} \\
&= x_2^* + x_1 - x_2 + 1 + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\omega(x)-1} + x_2^* + \cdots x_{\omega(x)}^* + x_{\omega(x)+2}^* + \cdots + x_{x_2}^* + \mu(x) \\
&= \omega(x) + x_2^* + x_1 - x_2 + 1 - 1 + \sum_{i=2}^{\omega(x)} x_i^* + \sum_{i=\omega(x)+2}^{x_2} x_i^* + \mu(x) \\
&= \underbrace{\omega(x) + x_2^*}_{x_1^*} + \underbrace{x_1 - (x_2 + 1) + 1}_{\sum_{i=\omega(x)+2}^{x_1} x_i^*} + \sum_{i=2}^{\omega(x)} x_i^* + \sum_{i=\omega(x)+2}^{x_2} x_i^* + \underbrace{\mu(x)}_{x_{\omega(x)+1}^*} \\
&= \sum_{i=1}^{x_1} x_i^* \\
&= x^* \\
&= x \\
&= y \\
&= y^* \\
&= \sum_{i=1}^{y_1} y_i^* \\
&= \underbrace{\omega(y) + y_2^*}_{y_1^*} + \underbrace{y_1 - (y_2 + 1) + 1}_{\sum_{i=\omega(y)+2}^{y_1} y_i^*} + \sum_{i=2}^{\omega(y)} y_i^* + \sum_{i=\omega(y)+2}^{y_2} y_i^* + \underbrace{\mu(y)}_{y_{\omega(y)+1}^*} \\
&= \omega(y) + y_2^* + y_1 - (y_2 - 1) - 1 + \sum_{i=2}^{\omega(y)} y_i^* + \sum_{i=\omega(y)+2}^{y_2} y_i^* + \mu(y) \\
&= y_2^* + y_1 - y_2 + 1 + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\omega(y)-1} + y_2^* + \cdots y_{\omega(y)}^* + y_{\omega(y)+2}^* + \cdots + y_{y_2}^* + \mu(y) \\
&= y_2^* + y_1 - y_2 + 1 + 1 + y_2^* + \cdots + 1 + y_{\omega(y)}^* + y_{(\omega(y)+1)+1}^* + \cdots + y_{(y_2-1)+1}^* \\
&\quad + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\mu(y)} \\
&= g((y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{\omega(y)}, y_{\omega(y)+1}, \ldots, y_{\omega(y)+l}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\omega(y)})) \\
&= g(y).
\end{aligned}$$

Terbukti g *well-defined*.
Dengan demikian, karena $\mathrm{Dom}(g) = C_n$ dan g *well-defined*, terbukti bahwa g merupakan fungsi.

Bukti g injektif. Diambil sebarang $x, y \in C_n$ dengan $g(x) = g(y)$. Misalkan

$$x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{\omega(x)}, x_{\omega(x)+1}, \ldots, x_{\omega(x)+k}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\omega(x)})$$

dan

$$y = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{\omega(y)}, y_{\omega(y)+1}, \ldots, y_{\omega(y)+l}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\omega(y)})$$

untuk suatu bilangan bulat positif k dan l, dengan $x_i > 1$ dan $y_i > 1$ untuk setiap i dan setiap j dengan $1 \leq i \leq \omega(x) + k$ dan $1 \leq j \leq \omega(y) + l$; $x_i > \omega(x)$ dan $y_j > \omega(y)$ untuk setiap i dan setiap j dengan $\omega(x) + 1 \leq i \leq \omega(x) + k$ dan $\omega(y) + 1 \leq j \leq \omega(y) + l$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
& g(x) = g(y) \\
& \Longrightarrow g((x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{\omega(x)}, x_{\omega(x)+1}, \ldots, x_{\omega(x)+k}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\omega(x)})) \\
& \quad = g((y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{\omega(y)}, y_{\omega(y)+1}, \ldots, y_{\omega(y)+l}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\omega(y)})) \\
& \Longrightarrow x_2^* + x_1 - (x_2 - 1) + 1 + x_2^* + \cdots + 1 + x_{\omega(x)}^* + x_{\omega(x)+2}^* + \cdots + x_{(x_2-1)+1}^* \\
& \quad + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\mu(x)} \\
& \quad = y_2^* + y_1 - (y_2 - 1) + 1 + y_2^* + \cdots + 1 + y_{\omega(y)}^* + y_{\omega(y)+2}^* + \cdots + y_{(y_2-1)+1}^* \\
& \quad + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\mu(y)} \\
& \Longrightarrow x_2^* + x_1 - x_2 + 1 + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\omega(x)-1} + x_2^* + \cdots x_{\omega(x)}^* + x_{\omega(x)+2}^* + \cdots + x_{x_2}^* + \mu(x) \\
& \quad = y_2^* + y_1 - y_2 + 1 + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\omega(y)-1} + y_2^* + \cdots y_{\omega(y)}^* + y_{\omega(y)+2}^* + \cdots + y_{y_2}^* + \mu(y) \\
& \Longrightarrow \omega(x) + x_2^* + x_1 - x_2 + 1 - 1 + \sum_{i=2}^{\omega(x)} x_i^* + \sum_{i=\omega(x)+2}^{x_2} x_i^* + \mu(x) \\
& \quad = \omega(y) + y_2^* + y_1 - y_2 + 1 - 1 + \sum_{i=2}^{\omega(y)} y_i^* + \sum_{i=\omega(y)+2}^{y_2} y_i^* + \mu(y) \\
& \Longrightarrow \underbrace{\omega(x) + x_2^*}_{x_1^*} + \underbrace{x_1 - (x_2 + 1) + 1}_{\sum_{i=\omega(x)+2}^{x_1} x_i^*} + \sum_{i=2}^{\omega(x)} x_i^* + \sum_{i=\omega(x)+2}^{x_2} x_i^* + \underbrace{\mu(x)}_{x_{\omega(x)+1}^*} \\
& \quad = \underbrace{\omega(y) + y_2^*}_{y_1^*} + \underbrace{y_1 - (y_2 + 1) + 1}_{\sum_{i=\omega(y)+2}^{y_1} y_i^*} + \sum_{i=2}^{\omega(y)} y_i^* + \sum_{i=\omega(y)+2}^{y_2} y_i^* + \underbrace{\mu(y)}_{y_{\omega(y)+1}^*} \\
& \Longrightarrow \sum_{i=1}^{x_1} x_i^* = \sum_{i=1}^{y_1} y_i^* \\
& \Longrightarrow x^* = y^* \\
& \Longrightarrow x = y.
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa g injektif.

Bukti g surjektif. Diambil sebarang $y \in D_n$. Misalkan

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_{\omega(y)}, y_{\omega(y)+1}, \ldots, y_{\omega(y)+k}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\omega(y)})$$

untuk suatu bilangan bulat positif k dengan $y_i > 1$ untuk setiap i dengan $1 \le i \le \omega(y) + k$, dan $y_i > \omega(y)$ untuk suatu i dengan $1 \le i \le \omega(y) - 1$. Diperoleh $\mu(y) = \omega(y) - 1 < \omega(y)$. Selanjutnya, dibentuk partisi

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_{\omega(y)}, x_{\omega(y+1)}, \ldots, x_{\omega(y)+\mu(y)})$$

dari suatu bilangan bulat positif dengan

$$x_i = \begin{cases} y_2^* + y_1 - \omega(y), & i = 1 \\ 1 + y_i^*, & 2 \le i \le \omega(y) \\ 1, & \omega(y) + 1 \le i \le \omega(y) + \mu(y). \end{cases}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \ldots, x_{\omega(y)}, x_{\omega(y+1)}, \ldots, x_{\omega(y)+\mu(y)}) \\ &= y_2^* + y_1 - \omega(y) + 1 + y_2^* + \cdots + 1 + y_{\omega(y)}^* + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\mu(y)} \\ &= y_2^* + y_1 - \omega(y) + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\omega(y)-1} + \sum_{i=2}^{\omega(y)} y_i^* + \mu(y) \\ &= y_2^* + y_1 - \omega(y) + \omega(y) - 1 + \sum_{i=2}^{\omega(y)} y_i^* + \mu(y) \\ &= \omega(y) + y_2^* + y_1 - (\omega(y) + 2) + 1 + \sum_{i=2}^{\omega(y)} y_i^* + \mu(y) \\ &= \underbrace{\omega(y) + y_2^*}_{y_1^*} + \underbrace{y_1 - (\omega(y) + 2) + 1}_{\sum_{i=\omega(y)+2}^{y_1}} y_i^* + \sum_{i=2}^{\omega(y)} y_i^* + \underbrace{\mu(y)}_{y_{\omega(y)+1}^*} \\ &= \sum_{i=1}^{y_1} y_i^* \\ &= y^*. \end{aligned}$$

Karena konjugasi merupakan bijeksi, diperoleh $x \vdash n$. Lebih lanjut,

$$\omega(x) = \mu(y) < \omega(y) = \mu(x).$$

Akibatnya, $x \in C_n$. Jadi, untuk sebarang $y \in D_n$, terdapat $x \in C_n$ sehingga $g(x) = y$. Terbukti bahwa g surjektif.

Dengan demikian, terbukti bahwa g merupakan fungsi bijektif.

Jadi, untuk setiap $x \in C_n$, berlaku

$$M(\mu(x) - \omega(x), n) = M(-(\mu(x) - \omega(x)), n).$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $M(m, n) = M(-m, n)$ untuk setiap bilangan bulat tak negatif m dengan $m = c(x)$ untuk $\omega(x) > 0$ dan $\mu(x) > 0$. $\square$

Contoh 3.2. *Diberikan* $n = 6$. *Semua partisi dari* 6 *beserta crank yang berkorespondensi diberikan pada tabel berikut.*

TABEL 1. Semua partisi dari 6 beserta crank yang berkorespondensi

Simbol (λ_i)	*Partisi dari* 6	$\omega(\lambda_i)$	$\mu(\lambda_i)$	$c(\lambda_i)$
λ_1	(6)	0	0	6
λ_2	$(5,1)$	1	1	0
λ_3	$(4,2)$	0	0	4
λ_4	$(4,1,1)$	2	1	-1
λ_5	$(3,3)$	0	0	3
λ_6	$(3,2,1)$	1	2	1
λ_7	$(3,1,1,1)$	3	0	-3
λ_8	$(2,2,2)$	0	0	2
λ_9	$(2,2,1,1)$	2	0	-2
λ_{10}	$(2,1,1,1,1)$	4	0	-4
λ_{11}	$(1,1,1,1,1,1)$	6	0	-6

Diperoleh

$$A_6 = \{\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5, \lambda_8\} \quad \text{dan} \quad B_6 = \{\lambda_7, \lambda_9, \lambda_{10}, \lambda_{11}\}.$$

Di lain pihak, dapat dibentuk pemetaan $f : A_6 \to B_6$ *dengan*

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\mapsto \lambda_{11}, \\ \lambda_3 &\mapsto \lambda_{10}, \\ \lambda_5 &\mapsto \lambda_7, \\ \lambda_8 &\mapsto \lambda_9. \end{aligned}$$

Jadi, $|A_6| = 4 = |B_6|$.
Selanjutnya, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} c(\lambda_1) &= 6 = -(-6) = -c(\lambda_{11}), \\ c(\lambda_3) &= 6 = -(-6) = -c(\lambda_{10}), \\ c(\lambda_5) &= 6 = -(-6) = -c(\lambda_7), \\ c(\lambda_8) &= 6 = -(-6) = -c(\lambda_9). \end{aligned}$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} M(l(\lambda_1), 6) &= M(6,6) = 1 = M(-6,6) = M(-\omega(\lambda_{11}), 6) = M(-l(\lambda_1), 6), \\ M(l(\lambda_3), 6) &= M(4,6) = 1 = M(-4,6) = M(-\omega(\lambda_{10}), 6) = M(-l(\lambda_3), 6), \\ M(l(\lambda_5), 6) &= M(3,6) = 1 = M(-3,6) = M(-\omega(\lambda_7), 6) = M(-l(\lambda_5), 6), \\ M(l(\lambda_8), 6) &= M(2,6) = 1 = M(-2,6) = M(-\omega(\lambda_9), 6) = M(-l(\lambda_8), 6). \end{aligned}$$

Jadi, $M(l(\lambda), 6) = M(-l(\lambda), 6)$ *untuk setiap* $\lambda \in A_6$. *Lebih lanjut,* $M(-\omega(\lambda), 6) = M(\omega(\lambda), 6)$ *untuk setiap* $\lambda \in B_6$.
Berikutnya, perhatikan bahwa

$$C_6 = \{\lambda_6\} \quad \text{dan} \quad D_6 = \{\lambda_4\}.$$

Akibatnya, $\lambda_6 \mapsto \lambda_4$. *Lebih lanjut,* $\lambda_2 \mapsto \lambda_2$. *Berikutnya, diperoleh*

$$c(\lambda_6) = 1 = -(-1) = -c(\lambda_4)$$

dan

$$c(\lambda_2) = 0 = -(-0) = -c(\lambda_2),$$

sehingga

$$M(\mu(\lambda_6)-\omega(\lambda_6),6) = M(1,6) = 1 = M(-1,6) = M(\mu(\lambda_4)-\omega(\lambda_4),6) = M(-(\mu(\lambda_6)-\omega(\lambda_6)),6)$$

dan

$$M(\mu(\lambda_2) - \omega(\lambda_2),6) = M(0,6) = 1 = M(-0,6) = M(-(\mu(\lambda_2) - \omega(\lambda_2)),6).$$

Lebih lanjut, $M(\mu(x) - \omega(x),6) = M(-(\mu(x) - \omega(x)),6)$ *untuk setiap* $x \in C_6 \cup D_6$.

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa $M(m,6) = M(-m,6)$ *untuk setiap bilangan bulat positif* m *dengan* $m = c(\lambda)$ *untuk* $\omega(\lambda) = 0$*;* $\omega(\lambda) > 0$ *dan* $\mu(\lambda) = 0$*;* $\mu(\lambda) > 0$ *dan* $\omega(\lambda) > 0$*, untuk setiap* $\lambda \vdash 6$.

Menggunakan Lemma 3.1 yang sudah dibuktikan di atas, akan dibuktikan teorema inti dari *paper* sebagai berikut.

Teorema 3.3. *Untuk setiap* $n, j \in \mathbb{N}$ *dan sebarang* $m \in \mathbb{N}_0$ *dengan* $m = 0, 1, 2 \ldots, j-1$, *berlaku* $M(m,j,n) = M(-m,j,n)$.

Bukti. Diambil sebarang $n, j \in \mathbb{N}$ dan sebarang $m \in \mathbb{N}_0$ dengan $m \leq j-1$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} M(m,j,n) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} M(jk+m,n) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} M(-(jk+m),n) \qquad \text{(Berdasarkan Lemma 3.1)} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} M(j(-k)-m,n) \\ &= M(-m,j,n). \end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $M(m,j,n) = M(-m,j,n)$. □

4. Simpulan

Dalam ilmu matematika, ada banyak cara yang dapat digunakan untuk membuktikan suatu teorema, lemma, atau sifat tertentu. Khususnya, dalam teori partisi bilangan bulat, beberapa cara yang dapat digunakan untuk membuktikan suatu identitas partisi adalah menggunakan fungsi pembangkit atau melalui pemetaan bijektif yang memetakan partisi dengan syarat tertentu ke partisi dengan syarat tertentu lainnya. Dalam pembahasan ini, digunakan metode bijeksi untuk membuktikan sifat simetri fungsi partisi crank, yaitu $M(m,j,n) = M(-m,j,n)$, untuk setiap bilangan bulat positif n, yang menyatakan banyaknya partisi dari n dengan crank kongruen m modulo j, sama dengan banyaknya partisi dari n dengan crank kongruen $-m$ modulo j. Bukti didasarkan pada definisi crank yang meninjau banyaknya penjumlah 1 yang termuat di suatu partisi tersebut.

Daftar Pustaka

[1] G. E. Andrews, *The Theory of Partitions.* Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1984.
[2] G. E. Andrews and K. Eriksson, *Integer Partitions.* Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.
[3] F. J. Dyson, "Some guesses in the theory of partitions," Cambridge: *Eureka*, vol. 8, no. 10, pp. 10-15, 1944.
[4] G. E. Andrews and F. G. Garvan, "Dyson's crank of a partition," *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 18, no. 2, pp. 167-171, 1988.
[5] F. G. Garvan, "New combinatorial interpretations of Ramanujan's partition congruences mod 5, 7 and 11," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 305, no. 1, pp. 47-77, 1988.
[6] F. G. Garvan, "The crank of partitions mod 8, 9 and 10," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 322, no. 1, pp. 79-94, 1990.
[7] A. Berkovich and F. G. Garvan, "Some observations on Dyson's new symmetries of partitions," *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, vol. 100, no. 1, pp. 61-93, 2002.

[8] I. Konan, "A Bijective Proof of a Generalization of the Non-Negative Crank-Odd Mex Identity," *The Electronic Journal of Combinatorics*, vol. 30, no. 1, 2023, Art. no. 41.
[9] B. Hopkins, J. A. Sellers, and D. Stanton, "Dyson's crank and the mex of integer partitions," *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, vol. 185, 2022, Art. no. 105523.
[10] B. Hopkins, J. A. Sellers, and A. J. Yee, "Combinatorial perspectives on the crank and mex partition statistics," *Electronic Journal of Combinatorics*, vol. 29, no. 2, 2022, Art. no. 11.
[11] K. Mahlburg, "Partition congruences and the Andrews-Garvan-Dyson crank," in *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2005, vol. 102, no. 43, pp. 15373-15376.
[12] B. L. Lin, L. Peng, and P. C. Toh, "Weighted generalized crank moments for k-colored partitions and Andrews-Beck type congruences," *Discrete Mathematics*, vol. 344, no. 8, 2021, Art. no. 112450.
[13] K. Bringmann, and J. Dousse, "On Dyson's crank conjecture and the uniform asymptotic behavior of certain inverse theta functions," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 368, no. 5, pp. 3141-3155, 2016.
[14] I. Pak, "Partition bijections, a survey," *The Ramanujan Journal*, vol. 12, no. 1, pp. 5-75, 2006.
[15] A. A. Prastya and U. Isnaini, "Interpretasi Kombinatorial Kongruensi Fungsi Partisi Biner Modulo 2," *Journal of Mathematics UNP*, vol. 8, no. 1, pp. 85-91, 2023.
[16] J. B. Remmel, "Bijective proofs of some classical partition identities," *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, vol. 33, no. 3, pp. 273-286, 1982.