Jurnal Matematika Integratif. p-ISSN:1412-6184, e-ISSN:2549-903
Vol. 20, No. 1 (2024), pp. 81–88. doi:10.24198/jmi.v20.n1.53999.81-88

# Diseksi-4 atas Fungsi Pembangkit Partisi Frobenius Diperumum dengan 4-Pewarnaan

Naelufa Syifna Wifaqotul Muna[1] dan Uha Isnaini[2]

**[1] Program Studi Magister Matematika, Departemen Matematika, Universitas Gadjah Mada,**
**[2] Departemen Matematika, Universitas Gadjah Mada,**
**Bulaksumur, Jl. Geografi, Kec. Mlati, Sleman, Daerah Istimewa Yogyakarta 55281**
**Email: naelufasyifna@mail.ugm.ac.id, isnainiuha@ugm.ac.id**

**Abstrak**
Suatu partisi dari bilangan bulat positif $n$ adalah barisan tak naik atas bilangan bulat positif sedemikian hingga jumlahnya adalah $n$. Frobenius memperkenalkan suatu simbol yang merepresentasikan partisi dalam bentuk matriks yang kemudian disebut simbol Frobenius. Tahun 1984, Andrews mengenalkan konsep partisi Frobenius diperumum atau F-partisi serta partisi Frobenius diperumum dengan $k$-pewarnaan. Banyaknya F-partisi dengan $k$-pewarnaan dari suatu bilangan bulat positif $n$ disebut sebagai fungsi partisi Frobenius diperumum dengan $k$-pewarnaan, dinotasikan dengan $c\phi_k(n)$. Baruah dan Salmah kemudian mengkaji F-partisi 4-pewarnaan dan memperoleh fungsi pembangkit $c\phi_4(4n+3)$ dan kongruensi-kongruensi terkait $c\phi_4(n)$. Dalam paper ini, ditemukan fungsi pembangkit $c\phi_4(4n)$ dan $c\phi_4(4n+1)$ yang melengkapi diseksi-4 dari $c\phi_4(n)$. Lebih lanjut, ditemukan pula kongruensi $c\phi_4(4n+1) \equiv 0 \pmod{16}$ yang mengakibatkan $c\phi_4(n) \equiv 0 \pmod{4}$, untuk setiap $n \not\equiv 0 \pmod{4}$.
**Kata kunci**: Partisi Frobenius diperumum, Fungsi pembangkit, Kongruensi.

**Abstract**
*A partition of positive integer $n$ is a non increasing sequence of positive integers where the sum is equal to $n$. Frobenius introduced a symbol that represents partitions in matrix which was later called the Frobenius symbol. In 1984, Andrews introduced the concept of generalized Frobenius partitions or F-partition and $k$-colored generalized Frobenius partitions. The number of $k$-colored F-partitions of a positive integer $n$ is called the $k$-colored F-partition function, denoted by $c\phi_k(n)$. Baruah and Salmah studied the 4-colored F-partition and obtained the generating functions of $c\phi_4(4n+3)$. In this paper, we find the generating functions of $c\phi_4(4n)$ and $c\phi_4(4n+1)$ which complete the 4-dissection of $c\phi_4(n)$. Furthermore, we also find $c\phi_4(4n+1) \equiv 0 \pmod{16}$ which results in $c\phi_4(n) \equiv 0 \pmod{4}$, for every $n \not\equiv 0 \pmod{4}$.*

**Keywords:** *Generalized Frobenius partition, Generating function, Congruence*

---

*2000 Mathematics Subject Classification*: 05A15
Received: 17-03-2024, accepted: 08-06-2024.

## 1. Pendahuluan

Suatu partisi dari bilangan bulat positif $n$ adalah barisan tak naik atas bilangan bulat positif sedemikian hingga jumlahnya adalah $n$. Sebagai contoh, seluruh partisi dari 4 adalah $4, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1$. Frobenius memperkenalkan simbol Frobenius pertama kali pada tahun 1900 sebagai cara untuk mengkodekan partisi bilangan bulat. Partisi dapat direpresentasikan dalam simbol Frobenius secara tunggal dan dikenal sebagai partisi Frobenius. Representasi partisi bilangan bulat $n$ dalam Simbol Frobenius adalah matriks berukuran $2 \times r$ untuk suatu bilangan bulat positif $r$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_r \\ b_1 & b_2 & \dots & b_r \end{pmatrix}$$

dengan $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ dan $(b_1, b_2, \dots, b_r)$ merupakan barisan penjumlah non-negatif yang monoton turun. Dengan kata lain, $a_1 > a_2 > \dots > a_r \geq 0$, $b_1 > b_2 > \dots > b_r \geq 0$, dan

$$n = r + \sum_{i=1}^{r} a_i + \sum_{i=1}^{r} b_i.$$

Partisi bilangan bulat $n$ yang disimbolkan demikian disebut Partisi Frobenius dari $n$. Sebagai contoh, partisi Frobenius dari 4 adalah $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Tahun 1984, [1] mengenalkan konsep partisi Frobenius diperumum atau F-partisi.

**Definisi 1.1.** [1] *Partisi Frobenius dikatakan diperumum jika syarat barisan penjumlah pada simbol Frobenius $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ dan $(b_1, b_2, \dots, b_r)$ yang monoton turun diperlemah menjadi barisan penjumlah tak negatif yang tak naik. Dengan kata lain, $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_r \geq 0$ dan $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_r \geq 0$.*

Andrews [1] kemudian mengenalkan konsep partisi Frobenius diperumum dengan $k$-pewarnaan. Fungsi partisi Frobenius diperumum dengan k–pewarnaan dinotasikan dengan $c\phi_k(n)$ menyatakan banyaknya F-partisi atas $n$ dengan $k$ pewarnaan. Diberikan contoh sebagai berikut.

**Contoh 1.2.** *Dapat dihitung $c\phi_2(2) = 9$, yaitu*

$$\begin{pmatrix} 1_1 \\ 0_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1_2 \\ 0_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1_1 \\ 0_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1_2 \\ 0_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_1 \\ 1_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_1 \\ 1_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_2 \\ 1_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_2 \\ 1_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_2 & 0_1 \\ 0_2 & 0_1 \end{pmatrix}.$$

Adapun fungsi pembangkit F-partisi dengan $k$-pewarnaan diberikan pada [1] adalah sebagai berikut.

**Teorema 1.3.** [1] *Untuk $|q| < 1$,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_k(n) q^n = \frac{\sum_{m_1, m_2, m_3, \dots, m_{k-1} = \infty}^{\infty} q^{Q(m_1, m_2, \dots, m_{k-1})}}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^k}, \tag{1}$$

*dengan*

$$Q(m_1, m_2, \dots, m_{k-1}) = m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_{k-1}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq k-1} m_i m_j.$$

Konsep tersebut memantik banyak studi terkait partisi Frobenius diperumum dengan $k$-pewarnaan, seperti [6] yang membahas partisi Frobenius diperumum dan kaitannya dengan modular forms seperti pada partisi bilangan bulat, serta [3], [7], dan [8] yang membahas kongruensi partisi Frobenius diperumum dengan 4-pewarnaan. Pada [3], diberikan Fungsi pembangkit partisi Frobenius diperumum dengan 4-pewarnaan adalah sebagai berikut

**Teorema 1.4.** [3]

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(n) q^n = \frac{\varphi^3(q^2) + 12q\varphi(q^2)\psi^2(q^4)}{(q;q)_\infty^4}. \tag{2}$$

Kemudian, [3] menyajikan $c\phi_4(4n+3)$ sebagai berikut.

**Teorema 1.5.** [3]

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(4n+3)q^n = 256\frac{(q^2;q^2)_\infty^{22}}{(q;q)_\infty^{27}}\{32q\psi^4(q^2)+(q;q)_\infty^4(q;q^2)_\infty^4\}. \tag{3}$$

Baruah dan Salmah [3] juga menyajikan kongruensi-kongruensi berikut.

**Teorema 1.6.** [3] *Untuk setiap $n$ bilangan bulat tak negatif berlaku*

$$c\phi_4(4n+2) \equiv 0 \pmod{4}$$
$$c\phi_4(4n+3) \equiv 0 \pmod{4^4}.$$

Pada paper ini, ditemukan fungsi pembangkit untuk $c\phi_4(4n)$ dan $c\phi_4(4n+1)$. Dalam pembuktian fungsi pembangkit-fungsi pembangkit tersebut, ditemukan identitas baru sebagai berikut.

**Lemma 1.7.** *Berlaku*

$$\varphi^4(q)+\varphi^4(-q) = 4\varphi^4(q^2) - 2(q^2;q^4)_\infty^4(q^2;q^2)_\infty^4. \tag{4}$$

Selanjutnya, fungsi pembangkit untuk $c\phi_4(4n)$ dan $c\phi_4(4n+1)$ diberikan pada dua teorema berikut.

**Teorema 1.8.** *Berlaku*

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(4n)q^n = {}& 4096q^2\frac{\psi^9(q)\psi^6(q^2)}{(q;q)_\infty^{16}} + 192q\left(1+\frac{3\psi^2(q)}{(q;q)_\infty^2}\right)\frac{\psi^2(q^2)\psi^7(q)}{(q;q)_\infty^{10}} \\ &+ \frac{\varphi^2(q)\psi(q)}{(q;q)_\infty^4} + 4608q^2\psi^6(q^2)\psi^6(q)(q^2;q^2)_\infty^6.\end{aligned} \tag{5}$$

**Teorema 1.9.** *Berlaku*

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(4n+1)q^n = {}&128\varphi^4(q)\frac{(q;q)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty^2(q;q^2)_\infty^{16}(q;q)_\infty^8}\left\{\varphi^4(q)-(q;q^2)_\infty^4(q;q)_\infty^4\right\} \\ &+ 16\frac{(q;q)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty^2(q;q^2)_\infty^8}.\end{aligned} \tag{6}$$

Akibat langsung yang ditimbulkan adalah sebagai berikut.

**Akibat 1.10.** *Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$ berlaku*

$$c\phi_4(4n+1) \equiv 0 \pmod{4^2}. \tag{7}$$

Paper ini juga melengkapi pembuktian Baruah dan Salmah [3] dengan menyajikan bentuk fungsi pembangkit $c\phi_4(4n+2)$ sebagai berikut.

**Teorema 1.11.**

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(4n+2)q^n \\ &\quad = 4\frac{\left(q^2;q^2\right)_\infty^{10}\psi^2\left(q^2\right)}{(q;q)_\infty^{13}}\left\{4096q^2\frac{\psi^8\left(q^2\right)}{(q;q)_\infty^8} + 320q\frac{\psi^4\left(q^2\right)}{\left(q^2;q^2\right)_\infty^4} + 5\left(q;q^2\right)_\infty^8\right\} \\ &\qquad + 48\frac{\left(q^2;q^2\right)_\infty^{18}\varphi^2\left(q\right)}{(q;q)_\infty^{21}}\left\{4\frac{\varphi^4\left(q\right)}{(q;q)_\infty^4} - 3\left(q;q^2\right)_\infty^4\right\}.\end{aligned} \tag{8}$$

Dengan demikian, berdasarkan Teorema 1.6, Teorema 1.8, dan Akibat 1.10, dapat diperoleh akibat sebagai berikut

**Akibat 1.12.** *Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$ dan $n \not\equiv 0 \pmod 4$ berlaku*

$$c\phi_4(n) \equiv 0 \pmod 4. \tag{9}$$

Pada bab selanjutnya, diberikan hasil terdahulu yang diperlukan untuk hasil. Hasil dan pembahasan paper ini berisi pembuktian lemma, teorema, dan akibat baru yang diperoleh, yaitu Lemma 1.7, Teorema 1.8, Teorema 1.9, Akibat 1.10, Teorema 8, dan Akibat 1.12. Pada bab terakhir, diberikan simpulan untuk paper ini.

## 2. Hasil Terdahulu

Terdapat beberapa hasil terdahulu yang digunakan dalam pembahasan paper ini. Sebagai permulaan, diberikan definisi dari fungsi theta Ramanujan sebagai berikut.

**Definisi 2.1.** *(Fungsi Theta Ramanujan) Bentuk umum fungsi theta Ramanujan $f(a,b)$ didefinisikan sebagai*

$$f(a,b) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{n(n+1)/2} b^{n(n-1)/2},$$

*dengan $|ab| < 1$. Tiga kasus khusus didefinisikan pada notasi Ramanujan, yaitu*

$$\varphi(q) := f(q;q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2},$$

$$\psi(q) := f(q;q^3) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)/2}.$$

Adapun bentuk perkalian dari sumasi $\varphi(q)$ dan $\psi(q)$ sering digunakan dalam teori partisi telah dibuktikan pada [4] adalah sebagai berikut.

**Teorema 2.2.** *Berlaku*

$$\varphi(q) = (-q;q^2)_\infty^2 (q^2;q^2)_\infty, \tag{10}$$

$$\psi(q) = \frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty}, \tag{11}$$

Baruah dan Salmah [3] membuktikan fungsi pembangkit untuk $c\phi_4(2n)$ dan $c\phi_4(2n+1)$ sebagai berikut.

**Teorema 2.3.** [3] *Berlaku*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n+1)q^n = 16\frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q^4;q^4)_\infty^2 (q;q^2)_\infty^{16}} \tag{12}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n)q^n = \frac{(q^2;q^2)_\infty^9}{(q;q^2)_\infty^{20}(q^4;q^4)_\infty^{10}} + 48q\frac{(q^4;q^4)_\infty^6}{(q^2;q^2)_\infty^7 (q;q^2)_\infty^{12}}. \tag{13}$$

Dalam pembuktiannya, Baruah dan Salmah [3] memerlukan identitas terkait fungsi theta Ramanujan sebagai berikut.

**Teorema 2.4.**

$$\varphi^2(q) - \varphi^2(-q) = 8q\psi^2(q^4) \tag{14}$$

$$\varphi^2(q) + \varphi^2(-q) = 2\varphi^2(q^2) \tag{15}$$

Akibat langsung yang diperoleh dari Persamaan (14) dan (15), dengan substitusi Persamaan (10) dan (11), secara berurutan adalah sebagai berikut.

**Teorema 2.5.**

$$(-q;q^2)_\infty^4 - (q;q^2)_\infty^4 = 8q\frac{\psi^2(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^2}, \tag{16}$$

$$(-q;q^2)_\infty^4 + (q;q^2)_\infty^4 = 2\frac{\varphi^2(q^2)}{(q^2;q^2)_\infty^2}, \tag{17}$$

## 3. Hasil dan Pembahasan

Untuk pembuktian Teorema 1.8, diperhatikan kembali Persamaan (13) sebagai berikut

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n)q^n = \frac{(q^2;q^2)_\infty^9}{(q;q^2)_\infty^{20}(q^4;q^4)_\infty^{10}} + 48q\frac{(q^4;q^4)_\infty^6}{(q^2;q^2)_\infty^7(q;q^2)_\infty^{12}}.$$

Dengan mengganti $q$ menjadi $-q$ diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n)(-1)^n q^n = \frac{(q^2;q^2)_\infty^9}{(-q;q^2)_\infty^{20}(q^4;q^4)_\infty^{10}} - 48q\frac{(q^4;q^4)_\infty^6}{(q^2;q^2)_\infty^7(-q;q^2)_\infty^{12}}. \tag{18}$$

Jumlahkan Persamaan (13) dengan Persamaan (18), didapat

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n)q^n + \sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n)(-1)^n q^n \\
&= \frac{\left(q^2;q^2\right)_\infty^9}{\left(q^4;q^4\right)_\infty^{10}} \left\{ \frac{1}{(q;q^2)_\infty^{20}} + \frac{1}{(-q;q^2)_\infty^{20}} \right\} \\
&\quad + 48q\frac{\left(q^4;q^4\right)_\infty^6}{\left(q^2;q^2\right)_\infty^7} \left\{ \frac{1}{(q;q^2)_\infty^{12}} - \frac{1}{(-q;q^2)_\infty^{12}} \right\} \\
&= \frac{\left(q^2;q^2\right)_\infty^9}{\left(q^4;q^4\right)_\infty^{10}\left(q^2;q^4\right)_\infty^{20}} \left\{ \left(-q;q^2\right)_\infty^{20} + \left(q;q^2\right)_\infty^{20} \right\} \\
&\quad + 48q\frac{\left(q^4;q^4\right)_\infty^6}{\left(q^2;q^2\right)_\infty^7\left(q^2;q^4\right)_\infty^{12}} \left\{ \left(-q;q^2\right)_\infty^{12} - \left(q;q^2\right)_\infty^{12} \right\} \\
&= \frac{\left(q^4;q^4\right)_\infty^{10}}{\left(q^2;q^2\right)_\infty^{11}} \left\{ A^5 + B^5 \right\} + 48q\frac{\left(q^4;q^4\right)_\infty^{18}}{\left(q^2;q^2\right)_\infty^{19}} \left\{ A^3 - B^3 \right\}
\end{aligned} \tag{19}$$

dengan $A = \left(-q;q^2\right)_\infty^4$ dan $B = \left(q;q^2\right)_\infty^4$.

Diperhatikan bahwa

$$AB = ((-q;q^2)_\infty(q;q^2)_\infty)^4 = (q^2,q^4)_\infty^4 \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
A^5 + B^5 &= (A+B)(A^4 - A^3B + A^2B^2 - AB^3 + B^4) \\
&= (A+B)((A-B)(A^3-B^3) + A^2B^2)
\end{aligned} \tag{21}$$

dan

$$A^3 - B^3 = (A-B)^3 + 3AB(A-B). \tag{22}$$

Substitusi Persamaan (20), (16), dan (17) pada Persamaan (21) dan (22), diperoleh

$$A^5 + B^5 = 2\frac{\varphi^2(q^2)}{(q^2;q^2)_\infty^2}\left(8^4q^4\frac{\psi^8(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^4} + 192q^2(q^2;q^4)_\infty^4\frac{\psi^4(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^4} + (q^2;q^4)_\infty^8\right) \tag{23}$$

dan

$$A^3 - B^3 = 512q^3 \frac{\psi^6(q^4)}{(q^2;q^2)^3_\infty} + 24q \frac{\psi^6(q^4)(q^2;q^4)^4_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}. \tag{24}$$

Substitusi Persamaan (23) dan (24) pada Persamaan (19) dengan memperhatikan pangkat berparitas genap, diperoleh

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(4n)q^{2n} =& \frac{(q^4;q^4)^{10}_\infty}{(q^2;q^2)^{11}_\infty} \frac{\varphi^2(q^2)}{(q^2;q^2)^2_\infty} \left( 8^4 q^4 \frac{\psi^8(q^4)}{(q^2;q^2)^4_\infty} + 192q^2 (q^2;q^4)^4_\infty \frac{\psi^4(q^4)}{(q^2;q^2)^4_\infty} + (q^2;q^4)^8_\infty \right) \\ &+ 24q \frac{(q^4;q^4)^{18}_\infty}{(q^2;q^2)^{19}_\infty} \cdot \left( 512q^3 \frac{\psi^6(q^4)}{(q^2;q^2)^3_\infty} + 24q \frac{\psi^6(q^4)(q^2;q^4)^4_\infty}{(q^2;q^2)_\infty} \right).\end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(4n)q^n =& 4096q^2 \frac{\psi^9(q)\psi^6(q^2)}{(q;q)^{16}_\infty} + 192q \left(1 + \frac{3\psi^2(q)}{(q;q)^2_\infty}\right) \frac{\psi^2(q^2)\psi^7(q)}{(q;q)^{10}_\infty} \\ &+ \frac{\varphi^2(q)\psi(q)}{(q;q)^4_\infty} + 4608q^2 \psi^6(q^2)\psi^6(q)(q^2;q^2)^6_\infty\end{aligned}$$

yang merupakan Persamaan (1.8)

Sebelum membuktikan Teorema 1.9, dengan substitusi Persamaan (17), diperoleh identitas berikut

$$\begin{aligned}\varphi^4(q) + \varphi^4(-q) &= (\varphi^2(q) + \varphi^2(-q))^2 - 2(\varphi(q)\varphi(-q))^2 \qquad (25) \\ &= 4\frac{\varphi^4(q^2)}{(q^2;q^2)^4_\infty} - 2(q^2;q^4)^4_\infty (q^2;q^2)^4_\infty \qquad (26)\end{aligned}$$

yang membuktikan Lemma 1.7. Akibatnya,

$$(-q;q^2)^8_\infty + (q;q^2)^8_\infty = \frac{4\varphi^4(q^2)}{(q^2;q^2)^4_\infty} - 2(q^2;q^4)^4_\infty. \tag{27}$$

Diperhatikan kembali Persamaan (12) sebagai berikut

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n+1)q^n = 16 \frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q^4;q^4)^2_\infty (q;q^2)^{16}_\infty}.$$

Dengan mengganti $q$ menjadi $-q$ diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n+1)(-1)q^n = 16 \frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q^4;q^4)^2_\infty (-q;q^2)^{16}_\infty}. \tag{28}$$

Dengan menjumlahkan Persamaan (12) dengan Persamaan (28), serta substitusi Persamaan (27), diperoleh

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n+1)q^n + \sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n+1)(-1)^n q^n \\ &= 16\frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q^4;q^4)^2_\infty} \left\{ \frac{1}{(q;q^2)^{16}_\infty} + \frac{1}{(-q;q^2)^{16}_\infty} \right\} \\ &= 16\frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q^4;q^4)^2_\infty (q^2;q^4)^{16}_\infty} \left\{ (-q;q^2)^{16}_\infty + (q;q^2)^{16}_\infty \right\} \\ &= 16\frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q^4;q^4)^2_\infty (q^2;q^4)^{16}_\infty} \left\{ ((-q;q^2)^8_\infty + (q;q^2)^8_\infty)^2 - 2(-q;q^2)^8_\infty (q;q^2)^8_\infty \right\} \\ &= 16\frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q^4;q^4)^2_\infty (q^2;q^4)^{16}_\infty} \left\{ 16\frac{\varphi^8(q^2)}{(q^2;q^2)^8_\infty} - 16\frac{\varphi^4(q^2)(q^2;q^4)^4_\infty}{(q^2;q^2)^4_\infty} + 2(q^2;q^4)^8_\infty \right\}.\end{aligned}$$

Dengan memperhatikan pangkat berparitas genap, diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(4n+1)q^{2n}$$
$$= 8\frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q^4;q^4)_\infty^2(q^2;q^4)_\infty^{16}}\left\{16\frac{\varphi^8(q^2)}{(q^2;q^2)_\infty^8} - 16\frac{\varphi^4(q^2)(q^2;q^4)_\infty^4}{(q^2;q^2)_\infty^4} + 2(q^2;q^4)_\infty^8\right\},$$

sehingga

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(4n+1)q^n = 128\varphi^4(q)\frac{(q;q)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty^2(q;q^2)_\infty^{16}(q;q)_\infty^8}\left\{\varphi^4(q) - (q;q^2)_\infty^4(q;q)_\infty^4\right\}$$
$$+ 16\frac{(q;q)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty^2(q;q^2)_\infty^8},$$

yang membuktikan Teorema 1.9, mengakibatkan, Teorema 1.10 dan Teorema 1.12 juga terbukti.

Selanjutnya, ditinjau kembali pembuktian kongruensi $c\phi_4(4n+2)$ pada [3], diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n)q^n - \sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n)(-1)^n q^n$$
$$= 8q\frac{\left(q^4;q^4\right)_\infty^{10}\psi^2\left(q^4\right)}{\left(q^2;q^2\right)_\infty^{13}}\left\{4096q^4\frac{\psi^8\left(q^4\right)}{\left(q^2;q^2\right)_\infty^8} + 320q^2\frac{\psi^4\left(q^4\right)}{\left(q^4;q^4\right)_\infty^4} + 5\left(q^2;q^4\right)_\infty^8\right\}$$
$$+ 96q\frac{\left(q^4;q^4\right)_\infty^{18}\varphi^2\left(q^2\right)}{\left(q^2;q^2\right)_\infty^{21}}\left\{4\frac{\varphi^4\left(q^2\right)}{\left(q^2;q^2\right)_\infty^4} - 3\left(q^2;q^4\right)_\infty^4\right\}.$$

Dengan memperhatikan bentuk $q^{2n+1}$ untuk bilangan bulat tak negatif $n$, didapat

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(4n+2)q^{2n+1}$$
$$= 4q\frac{\left(q^4;q^4\right)_\infty^{10}\psi^2\left(q^4\right)}{\left(q^2;q^2\right)_\infty^{13}}\left\{4096q^4\frac{\psi^8\left(q^4\right)}{\left(q^2;q^2\right)_\infty^8} + 320q^2\frac{\psi^4\left(q^4\right)}{\left(q^4;q^4\right)_\infty^4} + 5\left(q^2;q^4\right)_\infty^8\right\}$$
$$+ 48q\frac{\left(q^4;q^4\right)_\infty^{18}\varphi^2\left(q^2\right)}{\left(q^2;q^2\right)_\infty^{21}}\left\{4\frac{\varphi^4\left(q^2\right)}{\left(q^2;q^2\right)_\infty^4} - 3\left(q^2;q^4\right)_\infty^4\right\},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(4n+2)q^{2n}$$
$$= 4\frac{\left(q^4;q^4\right)_\infty^{10}\psi^2\left(q^4\right)}{\left(q^2;q^2\right)_\infty^{13}}\left\{4096q^4\frac{\psi^8\left(q^4\right)}{\left(q^2;q^2\right)_\infty^8} + 320q^2\frac{\psi^4\left(q^4\right)}{\left(q^4;q^4\right)_\infty^4} + 5\left(q^2;q^4\right)_\infty^8\right\}$$
$$+ 48\frac{\left(q^4;q^4\right)_\infty^{18}\varphi^2\left(q^2\right)}{\left(q^2;q^2\right)_\infty^{21}}\left\{4\frac{\varphi^4\left(q^2\right)}{\left(q^2;q^2\right)_\infty^4} - 3\left(q^2;q^4\right)_\infty^4\right\}.$$

Dengan mengganti $q^2$ menjadi $q$ diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(4n+2)q^n$$
$$= 4\frac{\left(q^2;q^2\right)_\infty^{10}\psi^2\left(q^2\right)}{(q;q)_\infty^{13}}\left\{4096q^2\frac{\psi^8\left(q^2\right)}{(q;q)_\infty^8} + 320q\frac{\psi^4\left(q^2\right)}{\left(q^2;q^2\right)_\infty^4} + 5\left(q;q^2\right)_\infty^8\right\}$$
$$+ 48\frac{\left(q^2;q^2\right)_\infty^{18}\varphi^2(q)}{(q;q)_\infty^{21}}\left\{4\frac{\varphi^4(q)}{(q;q)_\infty^4} - 3\left(q;q^2\right)_\infty^4\right\}.$$

Dengan demikian, Persamaan (8) terbukti.

## 4. Simpulan

Penelitian ini memperoleh fungsi pembangkit untuk $c\phi_4(4n)$ dan $c\phi_4(4n+1)$, melengkapi fungsi pembangkit untuk $c\phi_4(4n+2)$. Dengan demikian, diperoleh diseksi-4 untuk fungsi pembangkit $c\phi_4(n)$. Selain itu, diperoleh kongruensi baru yang diakibatkan langsung dari fungsi pembangkit yang diperoleh.

## Daftar Pustaka

[1] Andrews, G.E., 1984. Generalized Frobenius partitions (Vol. 301). American Mathematical Soc..
[2] Andrews, G. E. dan Eriksson, K. 2004. Integer Partitions. Cambridge university press.
[3] Baruah, N.D. dan Sarmah, B.K., 2011. Congruences for generalized Frobenius partitions with 4 colors. Discrete mathematics, 311(17), pp.1892-1902.
[4] Berndt, B.C., 2006, Number Theory in the spirit of Ramanujan, American Mathematical Soc., Vol. 34.
[5] Berndt, B.C., 2012. Ramanujan's notebooks: Part III. Springer Science and Business Media.
[6] Chan, H.H., Wang, L. and Yang, Y., 2019. Modular forms and $k$-colored generalized Frobenius partitions. Transactions of the American Mathematical Society, 371(3), pp.2159-2205.
[7] Hirschhorn, M.D. and Sellers, J.A., 2016. Infinitely many congruences modulo 5 for 4-colored Frobenius partitions. The Ramanujan Journal, 40, pp.193-200.
[8] Zhang, W. dan Wang, C., 2017. An unexpected Ramanujan-type congruence modulo 7 for 4-colored generalized Frobenius partitions. The Ramanujan Journal, 44, pp.125-131.