

Kontrol Optimal Intervensi dalam Model Matematika SEIRS Penyebaran Penyakit Pneumonia pada Balita

HAMIDAH 'ALINA FIRDAUS¹, RANTI RIVANI AISYAH¹, NURSANTI ANGGRIANI²,
SISILIA SYLVIANI²

¹Mahasiswa Program Studi S-1 Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Padjadjaran

²Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Padjadjaran
Jl. Raya Bandung Sumedang KM 21 Jatinangor Sumedang 45363

Email: hamidah20001@mail.unpad.ac.id, ranti20004@mail.unpad.ac.id,
nursanti.anggriani@unpad.ac.id, sisilia.sylviani@unpad.ac.id

Abstrak

Penyakit pneumonia menjadi salah satu penyebab utama kasus kematian pada anak, khususnya anak usia rentang 1-5 tahun (balita). Pneumonia dikategorikan dalam penyakit serius dan menular dimana penularan pneumonia dapat melalui droplet saat penderita batuk atau bersin. Sehingga, dibutuhkan suatu model matematika yang dapat digunakan untuk mengetahui dinamika penyebaran penyakit pneumonia pada balita. Selain itu, diperlukan sebuah kontrol optimal vaksinasi dan pengobatan sebagai upaya dalam menekan penyebaran penyakit pneumonia, tujuannya adalah meminimumkan jumlah individu terinfeksi penyakit pneumonia sekaligus meminimumkan biaya vaksinasi dan pengobatan. Prinsip Maksimum Pontryagin digunakan dalam menentukan kontrol optimal dari masing-masing kontrol. Hasil menunjukkan bahwa jumlah individu yang terinfeksi menurun secara signifikan, dengan demikian penyebaran penyakit pneumonia dapat ditekan secara optimal.

Kata kunci: Pneumonia, Model SEIRS, Kontrol Optimal, Prinsip Maksimum Pontryagin.

Abstract

Pneumonia is one of the main causes of death in children, especially in children aged 1-5 years (toddlers). Pneumonia is categorized as a serious and infectious disease where pneumonia can be transmitted through droplets when a sufferer coughs or sneezes. Thus, a mathematical model is needed that can be used to determine the dynamics of the spread of pneumonia in toddlers. In addition, an optimal control of vaccination and treatment is needed as an effort to suppress the spread of pneumonia, with the goal is to minimize the number of individuals infected with pneumonia while minimizing the cost of vaccination and treatment. Pontryagin's Maximum Principle is used to determine the optimal control of each control. The results show that the number of infected individuals decreases significantly, thus the spread of pneumonia can be optimally suppressed.

Keywords: *Pneumonia, SEIRS Model, Optimal Control, Pontryagin's Maximum Principle*

1. PENDAHULUAN

Pneumonia merupakan infeksi akut yang menyerang jaringan paru-paru (alveoli) dan disebabkan oleh berbagai mikroorganisme antara lain virus, jamur, dan bakteri [1]. Badan Kesehatan Dunia (WHO) menyebutkan bahwa penyakit pneumonia menjadi penyebab kasus kematian terbesar pada anak-anak di seluruh dunia. Tercatat pada tahun 2019 terhitung 22% kasus kematian anak usia 1-5 tahun disebabkan oleh penyakit pneumonia dimana Asia Selatan dan Afrika Sub-Sahara menjadi penyumbang kasus kematian tertinggi [2]. Di Indonesia sendiri, pada tahun 2022 pneumonia menjadi faktor utama kematian anak usia rentang 1-5 tahun yaitu sebesar 12.5%. Sedangkan angka kematian akibat pneumonia pada kelompok bayi hampir tiga kali lipat lebih tinggi dibandingkan kelompok anak umur 1-5 tahun [1]. Pemerintah telah melakukan beberapa upaya dalam mengendalikan penyebaran penyakit pneumonia, di antaranya dengan melakukan penemuan kasus, pengobatan standar menggunakan antibiotik dan pemberian imunisasi berupa vaksin *Pneumococcal Conjugate Vaccine* (PCV) pada daerah terpilih sesuai kajian epidemiologi [1].

Pneumonia merupakan penyakit yang disebabkan oleh bakteri patogen *Streptococcus pneumoniae* [3]. Gejala yang ditimbulkan dari penyakit ini berupa napas cepat dan sesak, hal ini dikarenakan alveoli dipenuhi nanah dan cairan sehingga pernapasan terganggu dan asupan oksigen yang terhirup menjadi terbatas [4].

Pencegahan dan penanganan penyakit pneumonia pada balita dapat dilakukan dengan vaksinasi dan pengobatan. Pemberian vaksinasi merupakan cara yang paling efektif untuk mencegah penyebaran penyakit, hal ini menjadikan vaksinasi sebagai upaya yang *cost effective* (hemat biaya) [3]. Selain itu, vaksinasi dapat berfungsi sebagai pencegahan resistensi antibiotik. Penggunaan vaksin yang direkomendasikan pada balita yaitu PCV-7, PCV-10, dan PCV-13 [3]. Penanganan penyakit pneumonia dapat dilakukan dengan cara pemberian obat antibiotik pada individu yang terinfeksi pneumonia [2]. Pada bayi dan anak yang telah divaksinasi, pemberian antibiotik amoksisilin direkomendasikan kepada anak dengan pneumonia ringan sampai sedang (akibat infeksi bakteri *Streptococcus pneumoniae*) selama 7 sampai 10 hari. Anak yang memiliki alergi terhadap antibiotik amoksisilin, terdapat alternatif berupa antibiotik sefalosporin generasi kedua-ketiga dan levofloxacin oral [5].

Untuk mengetahui pola penyebaran penyakit pneumonia pada balita dibutuhkan suatu model matematika. Model ini dapat membantu dalam prediksi penyebaran penyakit pneumonia di masa depan. Telah banyak penelitian yang dilakukan untuk memodelkan penyakit pneumonia ini. Di tahun 2021 Imran, *et al* [6] membangun model matematika SEIPR pneumonia pada balita dengan faktor imunisasi dan pengobatan. Penelitian yang dilakukan oleh Side, *et al* [7] pada tahun 2021 telah mengkaji model matematika SEIR pneumonia pada balita dengan pengaruh vaksinasi di Kota Makassar.

Darmawan & Tasman [8] di tahun 2022 telah mengembangkan model matematika SVEIR pneumonia dengan adanya intervensi. Di tahun 2022, Beta [9] membentuk model SEIPRS pneumonia sebagai modifikasi dari model Imran. Selain itu, pada tahun yang sama terdapat pengembangan model Side menjadi model SEIRS pneumonia yang dibentuk oleh Zhafran [10].

Berdasarkan penelitian-penelitian yang telah dilakukan sebelumnya, telah banyak model matematika yang dibentuk untuk menunjukkan dinamika penyebaran penyakit pneumonia baik dengan intervensi maupun tidak. Namun, sampai saat ini belum ada penelitian yang mengkaji model matematika penyakit pneumonia pada balita dengan adanya kontrol optimal pada intervensi. Sehingga penelitian ini memiliki fokus utama sebagai berikut

- (1) Membentuk model matematika dinamika penyebaran pneumonia pada balita.
- (2) Membentuk kontrol optimal intervensi berupa vaksinasi dan pengobatan. Tujuan dari kontrol ini adalah untuk menekan biaya intervensi tanpa mengurangi efektivitas intervensi sebagai pencegahan dan penanganan penyakit pneumonia (*cost effective*).
- (3) Menunjukkan pengaruh kontrol intervensi pada model matematika penyebaran pneumonia pada balita melalui simulasi numerik.

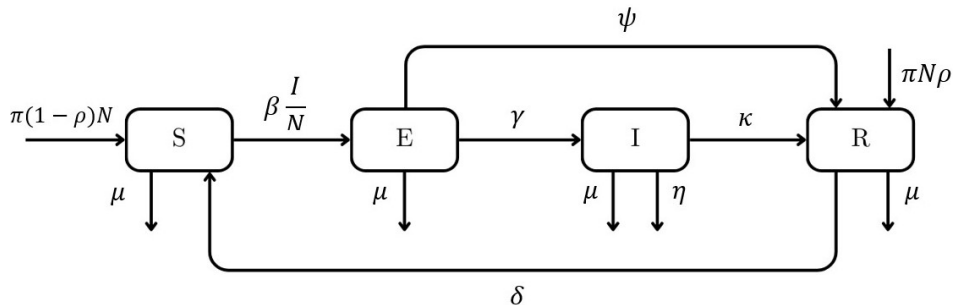
Pada penelitian ini, akan dibentuk model matematika penyebaran pneumonia pada balita yang dibangun sebagai pengembangan dari model matematika pneumonia milik Side (2021) [7]. Sehingga struktur penulisan artikel ini dimulai dengan pembentukan model yang dilanjutkan dengan analisis model berupa pencarian titik ekuilibrium, bilangan reproduksi dasar serta analisis kestabilan titik ekuilibrium menggunakan metode kriteria Routh-Hurwitz. Selanjutnya dicari kontrol optimal dari intervensi yang digunakan pada model. Terakhir melakukan simulasi numerik dari model yang telah dibentuk dan menarik kesimpulan dari hasil yang didapatkan dari penelitian ini.

2. MODEL MATEMATIKA

Model matematika SEIRS (*Susceptible-Exposed-Infected-Recovered-Susceptible*) merupakan pengembangan dari model SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*) yang diperkenalkan oleh Kermack dan Mckendrick pada tahun 1927 [7]. Model matematika penyakit pneumonia dibentuk dari beberapa subpopulasi yang saling berinteraksi di antaranya kelompok *Susceptible* (S) yang merupakan individu rentan penyakit pneumonia, kelompok individu laten yang terpapar penyakit pneumonia disebut *Exposed* (E), kelompok *Infected* (I) adalah individu yang terinfeksi penyakit pneumonia, dan kelompok *Recovered* (R) merupakan individu yang sembuh dari penyakit pneumonia. Pada penelitian ini, terdapat beberapa asumsi yang digunakan dalam memodelkan penyakit pneumonia yaitu:

1. Populasi sifatnya tertutup, penambahan dan pengurangan populasi hanya disebabkan oleh kelahiran dan kematian.
2. Vaksinasi dilakukan terhadap individu yang baru lahir, dan masuk ke dalam kelompok sembuh *Recovered* karena telah memiliki kekebalan dari penyakit.
3. Individu lahir yang tidak diberikan vaksinasi akan rentan penyakit pneumonia.
4. Individu laten yang telah mengalami vaksinasi dapat sembuh/tidak terinfeksi penyakit karena dipengaruhi oleh faktor vaksinasi [9]. Ataupun menjadi individu yang terinfeksi penyakit karena adanya kolonisasi bakteri.
5. Individu laten tidak menularkan penyakit pneumonia.
6. Transmisi penyakit terjadi karena adanya kontak antara individu yang terinfeksi dengan individu rentan.
7. Individu terinfeksi dapat mengalami kematian karena infeksi penyakit atau dapat sembuh hanya jika dilakukan perawatan medis (pengobatan).
8. Individu yang sembuh dapat menjadi rentan kembali karena kekebalan tubuh terhadap penyakit menurun.

Pada penelitian ini digunakan model matematika SEIRS untuk menginterpretasikan penyebaran penyakit. Diagram skematik proses perpindahan individu antar subpopulasi ditunjukkan oleh Gambar 1



GAMBAR 1. Diagram skematik SEIRS penyakit pneumonia

Keterangan dari setiap variabel dan parameter yang digunakan disajikan oleh Tabel 1

TABEL 1. Deskripsi variabel dan parameter

Variabel	Keterangan
S	Jumlah individu rentan
E	Jumlah individu laten
I	Jumlah individu terinfeksi
R	Jumlah individu sembuh
N	Jumlah populasi
Parameter	Keterangan
π	Laju kelahiran alami
μ	Laju kematian alami
ρ	proporsi banyaknya individu yang divaksinasi
β	Laju infeksi
ψ	Laju kesembuhan individu laten
γ	Laju perpindahan individu laten menjadi individu terinfeksi
η	Laju kematian karena penyakit pnemonia
κ	Laju kesembuhan dari individu terinfeksi karena pengobatan
δ	Laju individu sembuh menjadi rentan karena kehilangan kekebalan tubuh

Dari diagram skematik model matematika SEIRS penyakit pneumonia dapat direpresentasikan menjadi sistem persamaan diferensial yang ditunjukkan oleh Persamaan (1)

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \pi(1 - \rho)N + \delta R - \left(\beta \frac{I}{N}\right)S - \mu S \\
 \frac{dE}{dt} &= \left(\beta \frac{I}{N}\right)S - \psi E - \gamma E - \mu E \\
 \frac{dI}{dt} &= \gamma E - \kappa I - \eta I - \mu I \\
 \frac{dR}{dt} &= \pi \rho N + \psi E + \kappa I - \delta R - \mu R
 \end{aligned} \tag{1}$$

Diketahui jumlah populasi $N = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$ dan untuk memudahkan analisis model matematika, proporsi tiap subpopulasi dapat dinyatakan dengan variabel baru sebagai berikut $s = \frac{S}{N}, e = \frac{E}{N}, i = \frac{I}{N}, r = \frac{R}{N}$, sehingga diperoleh persamaan diferensial

$$\begin{aligned}
 \frac{ds}{dt} &= \pi(1 - \rho) + \delta r - \beta is - \mu s \\
 \frac{de}{dt} &= \beta is - \psi e - \gamma e - \mu e \\
 \frac{di}{dt} &= \gamma e - \kappa i - \eta i - \mu i \\
 \frac{dr}{dt} &= \pi \rho + \psi e + \kappa i - \delta r - \mu r.
 \end{aligned} \tag{2}$$

3. ANALISIS MODEL

3.1. Titik Ekuilibrium. Titik ekuilibrium dari Persamaan (2) didapat pada saat tiap subpopulasi tidak mengalami perubahan terhadap waktu, dengan kata lain titik ekuilibrium merupakan solusi dari persamaan $\left(\frac{ds}{dt}, \frac{de}{dt}, \frac{di}{dt}, \frac{dr}{dt}\right) = (0, 0, 0, 0)$.

3.1.1. Titik ekuilibrium bebas penyakit (E_0). Titik ekuilibrium ini diperoleh dengan mengasumsikan bahwa $i = 0$ yang artinya tidak ada individu yang dapat menularkan penyakit. Titik ekuilibrium bebas penyakit ini ditunjukkan oleh Persamaan (3)

$$E_0 = (s, e, i, r) = \left(\frac{\pi(\delta + \mu - \mu\rho)}{\mu(\delta + \mu)}, 0, 0, \frac{\pi\rho}{\delta + \mu}\right). \tag{3}$$

3.1.2. *Titik ekuilibrium endemik (E_1)*. Untuk menentukan titik ekuilibrium endemik diasumsikan $s^*, e^*, i^*, r^* > 0$, sehingga diperoleh Titik ekuilibrium (E_1) yang ditunjukkan oleh Persamaan (4)

$$E_1 = \left(s^* = \frac{(\gamma + \mu + \psi)(\eta + \kappa + \mu)}{\beta\gamma}, e^* = \frac{\beta i^* s^*}{\gamma + \mu + \psi}, i^* = \frac{\gamma e^*}{\eta + \kappa + \mu}, r^* = \frac{\psi e^* + \kappa i^* + \pi\rho}{\delta + \mu} \right). \quad (4)$$

Sebagai penyederhanaan, dimisalkan

$$a = \gamma + \mu + \psi, \quad b = \eta + \kappa + \mu, \quad c = \delta + \mu \quad (5)$$

sehingga kedua titik ekuilibrium pada Persamaan (3) dan (4) menjadi

$$E_0 = (s, e, i, r) = \left(\frac{\pi(c - \mu\rho)}{\mu c}, 0, 0, \frac{\pi\rho}{c} \right) \quad (6)$$

$$E_1 = (s^*, e^*, i^*, r^*) = \left(\frac{ab}{\beta\gamma}, \frac{\beta i^* s^*}{a}, \frac{\gamma e^*}{b}, \frac{\psi e^* + \kappa i^* + \pi\rho}{c} \right). \quad (7)$$

3.2. **Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)**. Bilangan reproduksi dasar yang dinotasikan R_0 merupakan nilai ekspektasi banyaknya infeksi yang terjadi tiap satuan waktu [11]. Infeksi ini dihasilkan oleh satu individu terinfeksi selama periode penularannya pada populasi rentan.

Dalam menentukan bilangan reproduksi dasar digunakan metode *Next-Generation Matrix* [12]. Berdasarkan Persamaan (2), didapatkan kelas populasi terinfeksi sebagai berikut

$$\frac{de}{dt} = \beta is - \psi e - \gamma e - \mu e, \quad \frac{di}{dt} = \gamma e - \kappa i - \eta i - \mu i \quad (8)$$

dari Persamaan (8) diperoleh matriks F dan V sebagai berikut

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \beta s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} \gamma + \mu + \psi & 0 \\ \gamma & \eta + \kappa + \mu \end{bmatrix} \quad (9)$$

substitusi titik ekuilibrium bebas penyakit pneumonia yang ditunjukkan oleh Persamaan (3) pada Persamaan (9), sehingga diperoleh

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta\pi(\delta + \mu - \mu\rho)}{\mu(\delta + \mu)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} \gamma + \mu + \psi & 0 \\ -\gamma & \eta + \kappa + \mu \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Next-Generation Matrix yang dinotasikan K didapat dari hasil FV^{-1} dari Persamaan (10) di atas, sehingga didapatkan *Next-Generation Matrix* sebagai berikut

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\pi\beta\gamma(\delta + \mu - \mu\rho)}{\mu(\gamma + \mu + \psi)(\eta + \kappa + \mu)(\delta + \mu)} & \frac{\pi\beta(\delta + \mu - \mu\rho)}{\mu(\delta + \mu)(\eta + \kappa + \mu)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

bilangan reproduksi dasar R_0 merupakan radius spektral atau nilai eigen paling maksimum dari matriks K pada Persamaan (11) dan dengan menggunakan pemisalan pada Persamaan (5), didapatkan bilangan reproduksi dasar

$$R_0 = \frac{\pi\beta\gamma(c - \mu\rho)}{\mu abc}. \quad (12)$$

Persamaan (12) merupakan nilai ambang batas epidemik sebagai tolak ukur tingkat penyebaran penyakit pneumonia pada populasi balita. Van den Driessche & Watmough [13] menyatakan terdapat dua kondisi memungkinkan yang ditunjukkan oleh bilangan reproduksi.

Definisi 3.1. Jika $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal. Sedangkan, jika $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik lokal dimana hal ini menunjukkan terjadinya penyebaran penyakit pneumonia.

3.3. Analisis Kestabilan Model. Umumnya, titik ekuilibrium memiliki dua titik tetap yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit (non-endemik) dan titik ekuilibrium endemik. Hale [14] menyebutkan jika semua nilai eigen dari koefisien matrix A pada sistem linear $\dot{x} = Ax$ merupakan bagian real negatif, maka titik ekuilibrium x^* stabil asimtotik.

Untuk menganalisis model dapat dilakukan dengan melakukan linearisasi sistem pada Persamaan (2) menggunakan matriks Jacobian [14] sehingga didapatkan matriks sebagai berikut

$$J = \begin{bmatrix} -(\beta i + \mu) & 0 & -\beta s & \delta \\ \beta i & -(\gamma + \mu + \psi) & \beta s & 0 \\ 0 & \gamma & -(\eta + \kappa + \mu) & 0 \\ 0 & \psi & \kappa & -(\delta + \mu) \end{bmatrix} \quad (13)$$

dengan penyederhanaan oleh Persamaan (5) didapat

$$J = \begin{bmatrix} -(\beta i + \mu) & 0 & -\beta s & \delta \\ \beta i & -a & \beta s & 0 \\ 0 & \gamma & -b & 0 \\ 0 & \psi & \kappa & -c \end{bmatrix}. \quad (14)$$

3.3.1. Analisis Kestabilan E_0 . Selanjutnya dilakukan analisis kestabilan model di titik ekuilibrium bebas penyakit dengan mensubstitusikan E_0 dari Persamaan (6) ke Matriks J (Persamaan (14)), sehingga didapat

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\frac{\pi\beta(a-\mu\rho)}{\mu a} & \delta \\ 0 & -a & \frac{\pi\beta(a-\mu\rho)}{\mu a} & 0 \\ 0 & \gamma & -b & 0 \\ 0 & \psi & \kappa & -c \end{bmatrix}, \quad (15)$$

dari persamaan di atas diperoleh persamaan karakteristik matriks Jacobian dengan menentukan $\det(\lambda I - J(E_0)) = 0$ sehingga didapatkan persamaan

$$(\lambda + \mu)(\lambda + c)(A_0\lambda^2 + A_1\lambda + A_2) = 0, \quad (16)$$

pada Persamaan (16) didapatkan dua nilai eigen negatif yaitu

$$\lambda_1 = -\mu < 0, \text{ dan}$$

$$\lambda_2 = -c = -(\delta + \mu) < 0, \text{ karena semua parameter bernilai positif}$$

sedangkan dua nilai eigen lainnya ditentukan oleh persamaan $(A_0\lambda^2 + A_1\lambda + A_2) = 0$, dengan $A_0 = 1 > 0$

$$A_1 = a + b > 0$$

$$A_2 = \frac{\mu abc(1 - \frac{\pi\beta\gamma(c-\mu\rho)}{\mu abc})}{\mu c} = \frac{\mu abc(1 - R_0)}{\mu c} > 0, \text{ jika } R_0 < 1. \quad (17)$$

Dari Persamaan (17), menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz* [15] dapat diketahui bahwa λ_3 dan λ_4 merupakan bagian real bernilai negatif dengan syarat $R_0 < 1$. Karena $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dan λ_4 merupakan bagian real bernilai negatif jika $R_0 < 1$, sesuai dengan Definisi 3.1 dapat disimpulkan bahwa jika R_0 memenuhi syarat dimana $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium E_0 stabil asimtotik.

3.3.2. Analisis Kestabilan E_1 . Analisis kestabilan model dilakukan di titik ekuilibrium endemik dengan mensubstitusikan $s^* = \frac{ab}{\beta\gamma}$ dari Persamaan (7) dengan $i^* > 0$ ke Matriks J (Persamaan (14)), sehingga didapat

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -(\beta i^* + \mu) & 0 & -\frac{ab}{\gamma} & \delta \\ \beta i^* & -a & \frac{ab}{\gamma} & 0 \\ 0 & \gamma & -b & 0 \\ 0 & \psi & \kappa & -c \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Diperoleh persamaan karakteristik matriks Jacobian pada Persamaan (18) dengan menentukan $\det(\lambda I - J(E_1)) = 0$ maka didapat persamaan

$$(A_0\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4) = 0 \quad (19)$$

dengan

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 > 0 \\ A_1 &= \beta i^* + a + \delta + \gamma + 3\mu + \psi > 0 \\ A_2 &= (\beta i^* + \mu)(a + b + c) + c(a + b) > 0 \\ A_3 &= \beta i^*(\mu^2 + (\delta + \gamma + \psi)\mu + (a + c)b + \delta\gamma) + \mu c(a + b) > 0 \\ A_4 &= \beta i^*(\mu^3 + \mu^2(\delta + \eta + \gamma + \kappa + \psi) + \mu(\delta(\eta + \gamma + \kappa) + (\eta + \kappa)(\gamma + \psi) + \delta\gamma\eta)) > 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Dari Persamaan (20), dengan menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz* [15] dapat diketahui $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dan λ_4 merupakan bagian real bernilai negatif. Karena bagian real bernilai negatif maka bahwa titik ekuilibrium E_1 stabil asimtotik lokal [14]. Berdasarkan Definisi 3.1 jika $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik lokal.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Model Matematika SEIRS dengan Kontrol. Dari model matematika SEIRS penyakit pneumonia balita yang ditunjukkan oleh Persamaan (2) dapat direkonstruksi kembali dengan penambahan kontrol berupa variabel kontrol u pada proporsi banyaknya individu yang divaksinasi yaitu parameter ρ . Dilakukan juga penambahan variabel kontrol pengobatan berupa variabel kontrol v pada parameter pengobatan κ . Sehingga didapat sistem persamaan diferensial baru yang dinyatakan oleh

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \pi(1 - \rho u) + \delta r - \beta is - \mu s \\ \frac{de}{dt} &= \beta is - \psi e - \gamma e - \mu e \\ \frac{di}{dt} &= \gamma e - \kappa vi - \eta i - \mu i \\ \frac{dr}{dt} &= \pi \rho u + \psi e + \kappa vi - \delta r - \mu r \end{aligned} \quad (21)$$

rentang nilai dari kedua kontrol yang diberikan adalah sebesar $0 \leq u, v \leq 1$.

4.2. Kontrol Optimal. Tujuan utama dari masalah kontrol optimal adalah menentukan nilai dari variabel kontrol (u dan v) yang memenuhi beberapa kendala (yaitu sistem pada Persamaan (21)) dan pada saat yang sama dapat memaksimumkan/meminimumkan fungsi tujuan J [16].

Fungsi tujuan dibentuk sebagai fungsi yang meminimumkan jumlah individu terinfeksi (I), biaya vaksinasi dan biaya pengobatan selain itu kontrol u dan v dilakukan dari waktu t_0 hingga waktu t_f . Fungsi tujuan diberikan oleh persamaan berikut

$$J(u, v) = \int_{t_0}^{t_f} AI + Bu^2 + Cv^2 dt \quad (22)$$

dimana pada fungsi tujuan diatas digunakan parameter $A, B, C > 0$ yang secara berurutan merupakan bobot dari jumlah individu terinfeksi, bobot biaya vaksinasi dan bobot biaya pengobatan.

Untuk menyelesaikan permasalahan kontrol optimal ini digunakan Prinsip Maximum Pontryagin dengan merumuskan fungsi Hamiltonian dan memenuhi syarat perlu (persamaan adjoint, keadaan transversal, dan kondisi optimal dari kontrol) juga memenuhi syarat cukup dari masalah kontrol optimal [17].

Dari fungsi tujuan pada Persamaan (22), dapat dibentuk fungsi Hamiltonian berupa penjumlahan antara integrand fungsi tujuan dan hasil kali adjoint (λ) dengan tiap persamaan diferensial kompartemen yang ditunjukkan oleh persamaan berikut

$$H = (AI + Bu^2 + Cv^2) + \lambda_1(\pi(1 - \rho u) + \delta r - \beta is - \mu s) + \lambda_2(\beta is - \psi e - \gamma e - \mu e) + \lambda_3(\gamma e - \kappa ui - \eta i - \mu i) + \lambda_4(\pi \rho u + \psi e + \kappa ui - \delta r - \mu r) \quad (23)$$

dari Persamaan (23) dapat ditentukan persamaan diferensial adjoint ($\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= (\beta i - \mu)\lambda_1 - \beta i\lambda_2 \\ \dot{\lambda}_2 &= (\gamma + \mu + \psi)\lambda_2 - \gamma\lambda_3 - \psi\lambda_4 \\ \dot{\lambda}_3 &= (\eta + \kappa v + \mu)\lambda_3 + \beta s(\lambda_1 - \lambda_2) - \kappa v\lambda_4 - A \\ \dot{\lambda}_4 &= (\delta + \mu)\lambda_4 - \delta\lambda_1 \end{aligned} \quad (24)$$

didapat keadaan transversal dengan

$$\lambda_1(tf) = \lambda_2(tf) = \lambda_3(tf) = \lambda_4(tf) = 0 \quad (25)$$

dan terakhir diperoleh kondisi optimal sebagai berikut

- kontrol optimal untuk u

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2Bu - \pi\rho(\lambda_1 - \lambda_4), \quad (26)$$

dari Persamaan (26) didapat $u^* = \frac{\pi\rho(\lambda_1 - \lambda_4)}{2B}$. Karena variabel $u \in [0, 1]$ maka diperoleh

$$u^* = \min\left\{\max\left\{0, \frac{\pi\rho(\lambda_1 - \lambda_4)}{2B}\right\}, 1\right\}. \quad (27)$$

- kontrol optimal untuk v

$$\frac{\partial H}{\partial v} = 2Cv - \kappa I(\lambda_3 - \lambda_4), \quad (28)$$

dari Persamaan (28) didapat $v^* = \frac{\kappa(\lambda_3 - \lambda_4)I}{2C}$. Karena variabel $v \in [0, 1]$ maka diperoleh

$$v^* = \min\left\{\max\left\{0, \frac{\kappa(\lambda_3 - \lambda_4)I}{2C}\right\}, 1\right\}. \quad (29)$$

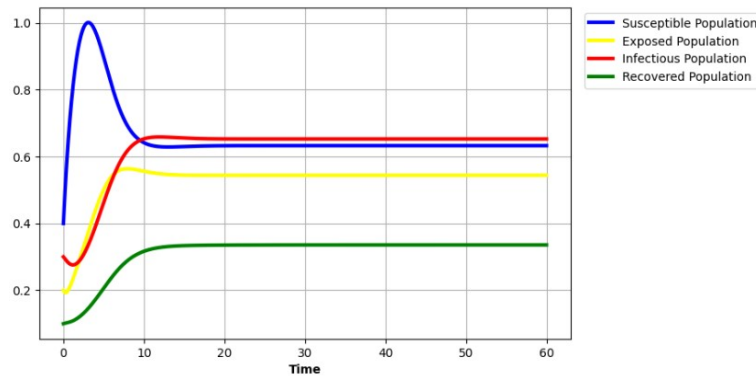
Selanjutnya diperoleh bahwa $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = 2B > 0$ dan $\frac{\partial^2 H}{\partial v^2} = 2C > 0$. Hal ini menunjukkan bahwa u^* dan v^* meminimumkan J , sehingga syarat cukup dari masalah kontrol optimal sudah terpenuhi.

4.3. Simulasi Numerik. Simulasi numerik dilakukan untuk mengetahui dinamika penyebaran penyakit pneumonia tanpa dan dengan pemberian kontrolnya. Simulasi dilakukan dengan nilai parameter yang disajikan pada Tabel 2. Diasumsikan nilai dari tiap bobot jumlah individu terinfeksi, biaya vaksinasi dan pengobatan sebesar $A = B = C = 1$. Simulasi dilakukan selama 60 hari artinya $t_0 = 0$ dan $t_f = 60$.

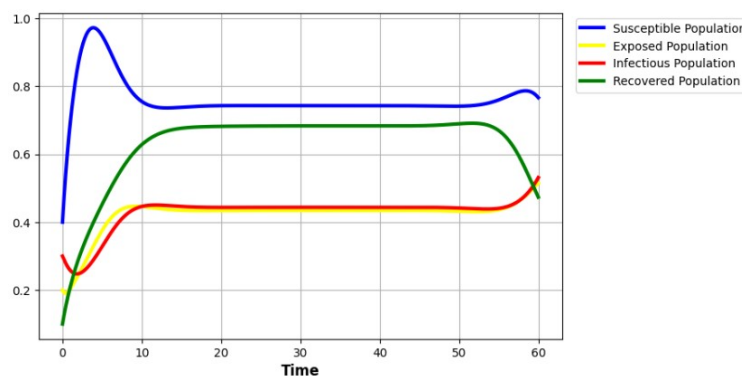
TABEL 2. Nilai parameter

Parameter	Nilai	Sumber
π	0.78	[9]
μ	0.3	[9]
ρ	0.6	[Asumsi]
β	1.449	[7]
ψ	0.2	[9]
γ	0.6	[Asumsi]
η	0.2	[10]
κ	0.4	[Asumsi]
δ	0.0241	[8]

Dengan asumsi nilai awal tiap variabel $s = \frac{S}{N} = 0.4$, $e = \frac{E}{N} = 0.2$, $i = \frac{I}{N} = 0.3$ dan $r = \frac{R}{N} = 0.1$ dilakukan simulasi numerik dilakukan dengan bantuan aplikasi Python. Hasil simulasi berupa grafik dinamika subpopulasi SEIR sebagai berikut

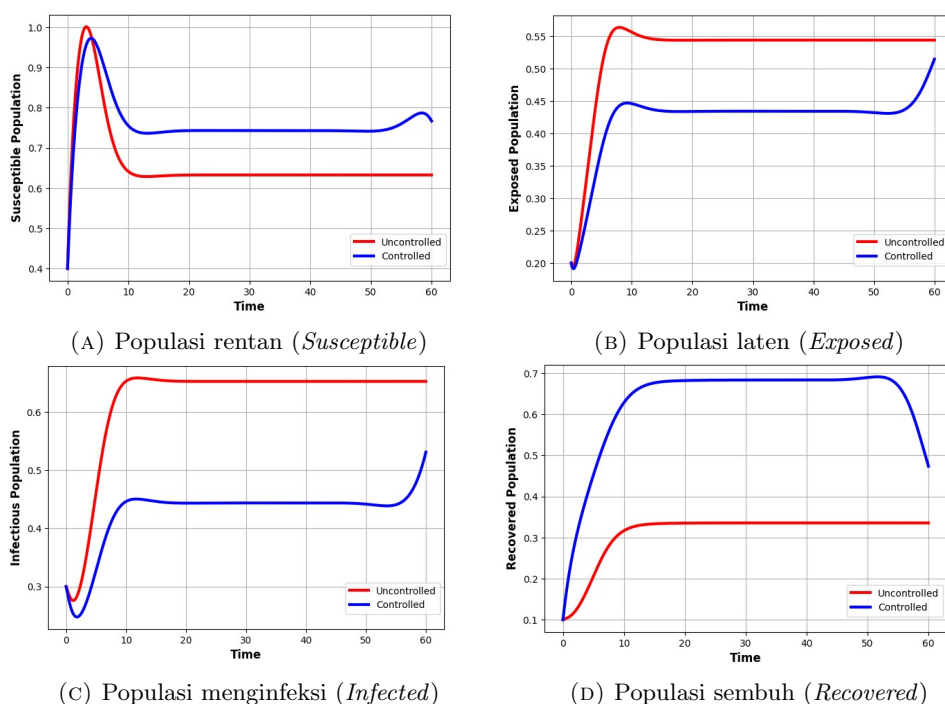


GAMBAR 2. Grafik SEIR tanpa kontrol intervensi



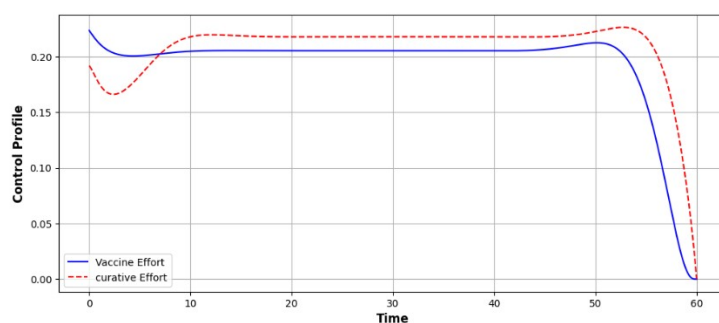
GAMBAR 3. Grafik SEIR dengan kontrol vaksinasi dan pengobatan

Gambar 2 merupakan hasil simulasi model SEIRS penyakit pneumonia tanpa kontrol pada intervensi sedangkan Gambar 3 menunjukkan simulasi model SEIRS penyakit pneumonia dengan adanya pemberian kontrol pada intervensi. Untuk mempermudah dalam mengamati perbandingan dua kondisi untuk tiap subpopulasi SEIR ditunjukkan grafik pada Gambar 4.



GAMBAR 4. Grafik perbandingan tiap subpopulasi tanpa dan dengan kontrol

Gambar 4(A) menunjukkan peningkatan jumlah individu rentan setelah diberikannya kontrol. Pada keadaan stabil terlihat peningkatan sebesar 17% karena adanya pengaruh kontrol intervensi. Hasil yang berbeda ditunjukkan oleh Gambar 4(B) dengan jumlah individu laten mengalami penurunan setelah adanya pengaruh dari kontrol intervensi. Penurunan jumlah individu laten dari model tanpa kontrol ke model yang diberikan kontrol sebesar 20%. Sama halnya dengan populasi laten, jumlah individu terinfeksi menurun karena adanya pengaruh kontrol intervensi yang ditunjukkan oleh Gambar 4(C). Penurunan jumlah individu terinfeksi terjadi sangat signifikan, yaitu mencapai 32% dari jumlah individu terinfeksi pada model tanpa kontrol intervensi. Hal ini memenuhi Persamaan (22) dimana tujuan dari kontrol optimal yang dilakukan adalah untuk meminimumkan jumlah individu terinfeksi. Di sisi lain, peningkatan secara signifikan terjadi pada jumlah individu sembuh yang ditunjukkan oleh Gambar 4(D). Peningkatan jumlah individu sembuh ini terjadi sebesar 106%.



GAMBAR 5. Grafik kontrol vaksinasi u dan kontrol pengobatan v

Grafik kontrol intervensi ditunjukkan oleh Gambar 5. Grafik ini menunjukkan selama rentang hari ke-10 hingga hari ke-50, kontrol u memberikan nilai kontrol sebesar 0.205 dan kontrol v sebesar 0.166. Setelah hari ke-50 kedua nilai kontrol berangsur-angsur turun.

5. SIMPULAN

Penyakit pneumonia menjadi salah satu penyebab banyaknya kasus kematian pada anak usia rentang 1-5 tahun (balita) yang terjadi di dunia termasuk Indonesia. Pencegahan dan penanganan penyakit pneumonia ini dapat dilakukan dengan memberikan vaksin pada individu rentan penyakit pneumonia dan pengobatan berupa pemberian antibiotik pada individu yang terinfeksi penyakit pneumonia.

Untuk mengetahui dinamika penyebaran penyakit pneumonia pada balita dibentuk model matematika SEIRS penyakit pneumonia dengan intervensi berupa vaksinasi dan pengobatan. Hasil analisis model SEIRS menunjukkan bahwa model akan stabil di dua titik yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik.

Dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin didapatkan kontrol optimal dari vaksinasi dan pengobatan dimana kedua kontrol ini akan mengoptimalkan fungsi tujuan berupa meminimumkan jumlah individu terinfeksi dan biaya dari vaksinasi dan pengobatan. Hasil simulasi numerik yang dilakukan, menunjukkan bahwa jumlah individu terinfeksi menurun secara signifikan setelah diberikannya kontrol intervensi pada model matematika SEIRS penyakit pneumonia. Hal ini menunjukkan bahwa intervensi berupa kontrol vaksinasi dan pengobatan memberikan pengaruh dalam menekan penyebaran penyakit pneumonia.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Kementerian Kesehatan RI., 2023, *Profil Kesehatan Indonesia 2022*, Kementerian Kesehatan RI, Jakarta.
- [2] WHO., 2022, *Pneumonia in Children*, World Health Organization, [https : //www.who.int/news – room/fact – sheets/detail/pneumonia](https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/pneumonia).
- [3] Saputri, F.S.D., Wathoni, N., 2020, Analisis Efektifitas Biaya Penggunaan Vaksin Pneumonia di Berbagai Negara, *Farmaka*, Volume 18, No 1, Januari 2020.
- [4] Sari, M., Cahyati, W., 2019, Tren Pneumonia Balita di Kota Semarang Tahun 2012-2018, *HIGEIA (Journal of Public Health Research and Development)*, Volume 3, No 3, Juli 2019, pp 407-416.
- [5] Suci, L.N., 2020, Pendekatan Diagnosis dan Tata Laksana Pneumonia pada Anak, *Jurnal Kedokteran Nanggroe Medika*, Volume 3, No 1, Maret 2020, pp 30-38
- [6] Imran, R.S., *et al.*, 2021, Model Matematika SEIPR Penyebaran Penyakit Pneumonia pada Balita dengan Faktor Imunisasi dan Pengobatan, *Jurnal Matematika Statistika & Komputasi*, Volume 17, No 2, Januari 2021, pp 202-218.
- [7] Side, S., Sanusi, W., Bohari, N.A., 2021, Pemodelan Matematika SEIR Penyebaran Penyakit Pneumonia pada Balita dengan Pengaruh Vaksinasi di Kota Makassar, (*Journal of Mathematics, Computations, and Statistics*, Volume 4, No 1, April 2021, pp 1-12.
- [8] Darmawan, N.C., Tasman, H., 2022, Model Matematika Penyebaran Penyakit Pneumonia dengan Intervensi, *Jurnal Matematika Integratif*, Volume 18, No 1, April 2022, pp 63-72.
- [9] Beta, M.A., Mokoginta, K., Naddiyah, A. 2022, Model Matematika SEIPRS Penyebaran Penyakit Pneumonia dengan Pengaruh Vaksinasi dan Pengobatan, *Research in the Mathematical and Natural Science*, Volume 1, No 1, April 2022, pp 27-38.
- [10] Zhafran, A.M., Arnellis., 2022, Model Matematika SEIRS Penyebaran Penyakit Pneumonia pada Balita dengan Pengaruh Vaksinasi, *Journal of Mathematics UNP*, Volume 7, No 3, September 2022, pp 121-127.
- [11] Resmawan., 2019, Efektifitas Vaksinasi dan Pengasapan pada Model Epidemik Transmisi Penyakit Malaria, *Jambura Journal of Mathematics*, Volume 1, No 1, Januari 2019, pp 25-35.
- [12] Diekmann, O., Heesterbeek, J.A.P., Roberts, M.G., 2010, The Construction Of Next-Generation Matrices For Compartmental Epidemic Models, *Journal of The Royal Society*, Volume 7, No 47, Juni 2010, pp 873-885.
- [13] van de Driessche, P., Watmough, J., 2002, Reproduction Numbers And Sub-Threshold Endemic Equilibria For Compartmental Models Of Disease Transmission, *Mathematical Biosciences*, Volume 180, No 12, Desember 2002, pp 29-48.
- [14] Hale, J.K., Koçak, H., 1991, *Near Equilibria*, in: *Dynamics and Bifurcation*, Vol 3. Springer, New Work.
- [15] Gantmacher, F.R., 2000, *The Theory of Matrices*, Vol 2. American Mathematical Society.
- [16] Naidu, D.S., 2002, *Optimal Control Systems*, CRC Press, New Work.
- [17] Lenhart, S., Workman, J.T., 2007, *Optimal Control Applied to Biological Models*, Chapman & Hall/CRC Press, New Work.
- [18] Tanjung, R.W., Muhafzan., Zulakmal., 2021, Model Penyebaran Penyakit Tuberkulosis dengan Kontrol Vaksinasi, *Jurnal Matematika UNAND*, Volume 10, No 3, Juli 2021, pp 280-287.
- [19] Jannah, M., Karim, M.A., Yuni, Y., 2021, Analisis Kestabilan Model SEIR Untuk Penyebaran COVID-19 Dengan Parameter Vaksinasi, (*BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, Volume 15, No 3, September 2021, pp 535-542.