

Pembuktian Rumus Taksiran Interval Rasio Varians Menggunakan Besaran Pivot

NAR HERRHYANTO, LUKMAN

Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Pendidikan Matematika
dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Pendidikan Indonesia
Jalan Dr. Setiabudhi 229 Bandung 40154 Jawa Barat Indonesia
Email: herrhyanton@gmail.com, lukman12@upi.edu

Abstrak

Penaksiran parameter dalam statistika diperlukan terhadap parameter populasi tidak diketahui. Salah satu metode untuk memperkirakan nilai parameter tersebut adalah penaksiran interval. Penelitian ini difokuskan pada penaksiran interval rasio varians, dengan tujuan penelitian untuk memaparkan langkah-langkah pembuktian rumus penaksiran interval rasio varians tersebut secara matematis dengan menggunakan besaran pivot. Besaran pivot terdiri dari statistik, parameter, dan konstanta yang distribusinya tidak bergantung pada parameter tersebut. Dalam penelitian ini, metode yang digunakan adalah penelitian kualitatif dengan teknik pengumpulan datanya menggunakan studi literatur. Hasil penelitian menunjukkan bahwa penggunaan besaran pivot membuktikan rumus taksiran interval rasio varians sesuai rumusnya yang sudah ada berupa batas bawah dan batas atas. Batas bawah ditentukan melalui perhitungan yang melibatkan ukuran dan varians sampel pertama dan kedua, dikalikan dengan distribusi F pada taraf signifikansi tertentu. Begitu pula untuk batas atas, dilakukan perhitungan yang serupa. Dengan demikian hasil pembuktian rumus ini memberikan pemahaman yang lebih baik dan mendalam bagaimana rumus taksiran interval rasio varians tersebut diperoleh.

Kata kunci: Taksiran interval, Rasio varians, Besaran pivot.

Abstract

Estimation of parameters in statistics is necessary when the population parameter is unknown. One method for estimating the value of this parameter is interval estimation. This study focuses on the interval estimation of the variance ratio, with the research objective being to explain the mathematical proof steps for the formula of this interval estimation of the variance ratio using a pivot quantity. A pivot quantity consists of statistics, parameters, and constants whose distribution does not depend on the parameter. In this study, the method used is qualitative research with data collection techniques using literature review. The results of the study show that the use of the pivot quantity proves the interval estimation formula for the variance ratio is consistent with the existing formula, consisting of lower and upper bounds. The lower bound is determined through calculations involving the size and variance of the first and second samples, multiplied by the F distribution at a certain level of significance. Similarly, for the upper bound, similar calculations are carried out. Therefore, the outcome of the proof of this formula offers a more comprehensive and profound understanding of the derivation process of the interval estimation formula for the variance ratio.

Keywords: *Interval estimation, Variance ratio, Pivot quantity.*

1. PENDAHULUAN

Apabila ada sebuah populasi, maka akan selalu ada parameternya. Parameter ini biasanya tidak diketahui. Untuk mengetahui nilai parameter ini dalam statistika bisa dilakukan dalam dua cara, yaitu penaksiran dan pengujian hipotesis. Dalam penelitian ini hanya akan dibahas penaksiran saja, khususnya penaksiran interval. Penaksiran dapat didefinisikan sebagai penentuan nilai atau nilai-nilai yang diperoleh dari data sampel dan bisa digunakan sebagai pengganti nilai dari parameter yang tidak diketahui [1]. Dari definisi tersebut akan diperoleh dua macam penaksiran, yaitu penaksiran titik dan penaksiran interval. Penaksiran titik adalah penentuan sebuah nilai yang diperoleh dari data sampel dan bisa digunakan sebagai pengganti nilai dari parameter yang tidak diketahui. Sedangkan penaksiran interval adalah penentuan nilai-nilai yang membentuk sebuah interval atau selang yang diperoleh dari data sampel dan bisa digunakan sebagai pengganti nilai dari parameter yang tidak diketahui.

Dalam penaksiran, baik titik maupun interval selalu dikaitkan dengan parameter yang akan dibahasnya. Parameter itu bisa satu mean, satu varians, satu proporsi, dua mean, dua proporsi, maupun dua varians; sehingga akan diperoleh penaksiran interval satu mean, penaksiran interval satu varians, penaksiran interval satu proporsi, penaksiran interval selisih dua mean, penaksiran interval selisih dua proporsi, dan penaksiran interval rasio dua varians. Dari beberapa literatur yang ada tidak ditemukan pembahasan berkaitan dengan pembuktian rumus penaksiran interval dari parameter tersebut tetapi langsung penerapan dari rumus yang ada, karena itu dalam artikel ini akan dipaparkan bagaimana langkah-langkah untuk membuktikan rumus dari penaksiran interval rasio dua varians dengan menggunakan besaran pivot.

Misalkan diketahui ada dua buah populasi normal, yaitu populasi 1 dan populasi 2. Pada populasi 1 berdistribusi normal dengan mean μ_1 (diketahui) dan varians σ_1^2 (tidak diketahui). Sedangkan populasi 2 berdistribusi normal dengan mean μ_2 (diketahui) dan varians σ_2^2 (tidak diketahui). Dalam hal ini ditentukan rumus dari taksiran interval rasio varians, yaitu $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$. Untuk itu diambil sampel acak dari populasi 1 berukuran n_1 dan diperoleh varians s_1^2 , dan dari populasi 2 diambil sampel acak berukuran n_2 dan diperoleh varians s_2^2 . Sehingga penelitian ini bertujuan untuk menentukan rumus taksiran interval dari rasio

varians $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ dengan menggunakan besaran pivot dan mengambil derajat keyakinan sebesar $(1 - \alpha)$.

Besaran pivot adalah besaran yang digunakan untuk menentukan taksiran interval dari sebuah parameter dengan mengambil derajat keyakinan sebesar $(1 - \alpha)$. Besaran pivot ini terdiri atas statistik, parameter, dan konstanta sedemikian rupa sehingga distribusi dari besaran pivot ini tidak bergantung pada parameternya. Menurut [2], *pivotal quantity* atau **besaran pivot** merupakan kuantitas yang distribusinya tidak bergantung atau tidak memuat parameter. Misalkan diberikan suatu variabel random $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, dan θ adalah parameter populasi, maka suatu statistik $T(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$ dikatakan *Pivotal quantity* untuk parameter θ , jika distribusi dari $T(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$ tidak memuat atau tidak bergantung pada parameter θ . Kemudian [3] menjelaskan pengertian besaran pivot sbb.

A pivotal quantity is a random variable that is a function of both the random data and the unknown parameters and whose probability distribution does not depend on any of the unknown parameters. The parameters here may include nuisance parameters.

Penentuan besaran pivot ini harus dilakukan berulang-ulang atau dicoba-coba agar diperoleh hasil yang cocok dan sesuai dengan distribusinya tersebut. Penggunaan metode besaran pivot dalam penelitian sudah dilakukan oleh [4] untuk mengestimasi parameter interval dari data waktu hidup tersensor tipe II yang berdistribusi Rayleigh. Selanjutnya, penerapan besaran pivot ini juga dilakukan untuk menaksir parameter yang tidak diketahui dari distribusi Weibull di bawah skema sensor progresif Tipe-II. [5]

2. METODE PENELITIAN

2.1. Penaksiran Parameter. Statistika merupakan sebuah prosedur yang digunakan untuk menganalisis suatu masalah yang meliputi pengumpulan data, penyajian data, pengolahan data, penganalisisan data, penarikan kesimpulan berdasarkan analisis yang sudah dilakukan. Statistika ini bisa dikelompokkan kedalam dua bagian, yaitu statistika deskriptif dan statistika inferensial. Dalam statistika inferensial difokuskan kepada penarikan kesimpulan terhadap parameter berdasarkan data yang diperoleh dari sampel acak, sehingga kesimpulan tersebut bisa berlaku untuk populasinya.

Penarikan kesimpulan terhadap suatu parameter bisa dilakukan dengan dua cara, yaitu melalui penaksiran dan pengujian hipotesis. Dalam penelitian ini hanya akan difokuskan pada penaksiran parameter saja. Penaksiran parameter bisa diperoleh satu nilai statistik dan lebih dari satu nilai statistik, dimana statistik ini sering disebut penaksir. Dalam hal penaksiran parameter yang diperoleh satu nilai ini sering disebut sebagai penaksiran titik, sedangkan penaksiran parameter yang diperoleh lebih dari satu nilai yang membentuk sebuah interval atau selang disebut sebagai penaksiran interval. Dalam penentuan penaksiran interval selalu digunakan sebuah ukuran yang disebut derajat keyakinan yang besarnya $1 - \alpha$. Derajat keyakinan ini nilainya harus sebesar-besarnya dan dinyatakan dengan persentase, biasanya yang sering digunakan 90%, 95%, atau 99%. Apabila akan ditaksir sebuah parameter dengan mengambil derajat keyakinan sebesar 95%, maka artinya nilai parameter tersebut akan terletak dalam sebuah interval dengan tingkat keyakinan sebesar 95%, dimana sebuah interval itu terdiri dari batas bawah dan batas atas yang nilainya diperoleh berdasarkan data sampel.

2.2. Distribusi F . Distribusi F diperoleh berdasarkan dua peubah acak yang saling bebas U dan V dan masing-masing berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat kebebasannya berturut-turut n_1 dan n_2 . Transformasi yang digunakannya berbentuk $F = \frac{U/n_1}{V/n_2}$ dan penentuan distribusi dari F ini digunakan teknik transformasi peubah acak.

Misalkan U dan V adalah dua peubah acak kontinu yang saling bebas dan berdistribusi chi-kuadrat masing-masing dengan derajat kebebasannya n_1 dan n_2 .

Jika peubah acak $F = \frac{U/n_1}{V/n_2}$, maka akan ditentukan fungsi densitas peluang (fdp) dari F .

Fdp dari U adalah:

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{1}{2^{n_1/2} \cdot \Gamma(n_1/2)} u^{(n_1/2)-1} \cdot e^{-u/2} & ; 0 < u < \infty \\ &= 0 & ; u \text{ lainnya} \end{aligned}$$

Fdp dari V adalah:

$$\begin{aligned} f(v) &= \frac{1}{2^{n_1/2} \cdot \Gamma(n_1/2)} v^{(n_1/2)-1} \cdot e^{-v/2} & ; 0 < v < \infty \\ &= 0 & ; v \text{ lainnya} \end{aligned}$$

Karena U dan V saling bebas, maka fdp gabungannya adalah:

$$\begin{aligned} h(u, v) &= f(u) \cdot g(v) \\ &= \frac{1}{2^{(n_1+n_2)/2} \cdot \Gamma(n_1/2) \cdot \Gamma(n_2/2)} u^{(n_1/2)-1} \cdot v^{(n_2/2)-1} \cdot e^{-(u+v)/2} & ; 0 < u < \infty \\ & & 0 < v < \infty \\ &= 0 & ; u, v \text{ lainnya} \end{aligned}$$

Karena transformasi peubah acak yang diketahui berbentuk $F = \frac{U/n_1}{V/n_2}$, maka dimisalkan transformasi peubah acak keduanya adalah $Z = V$.

Jadi transformasi peubah acaknya adalah $F = \frac{U/n_1}{V/n_2}$ dan $Z = V$.

Hubungan antara nilai u dari U dan nilai v dari V dengan nilai f dari F dan nilai z dari Z diberikan dengan:

$$f = \frac{u/n_1}{v/n_2} \text{ dan } z = v$$

Invers: $u = (n_1/n_2) \cdot f \cdot z$ dan $v = z$

Jacobiannya:

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial f} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial f} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (n_1/n_2)z & (n_1/n_2)f \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (n_1/n_2)z \\ |J| &= (n_1/n_2)z \end{aligned}$$

Fdp gabungan dari F dan Z adalah:

$$\begin{aligned} k(f, z) &= h((n_1/n_2)fz, z) \cdot |J| \\ &= \frac{1}{2^{(n_1+n_2)/2} \cdot \Gamma(n_1/2) \cdot \Gamma(n_2/2)} \left(\frac{n_1}{n_2} fz \right)^{(n_1/2)-1} \cdot z^{(n_2/2)-1} \cdot e^{(-z/2)[(n_1f/n_2)+1]} \cdot \frac{n_1}{n_2} z \\ & & ; 0 < f < \infty, 0 < z < \infty \\ &= 0 & ; fz \text{ lainnya} \end{aligned}$$

Fdp marginal dari F adalah:

$$\begin{aligned} k_1(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} k(f, z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{(n_1+n_2)/2} \cdot \Gamma(n_1/2) \cdot \Gamma(n_2/2)} \left(\frac{n_1}{n_2} fz \right)^{(n_1/2)-1} \cdot z^{(n_2/2)-1} \cdot e^{(-z/2)[(n_1f/n_2)+1]} \cdot \frac{n_1}{n_2} z dz \\ &= \frac{f^{(n_1/2)-1}}{2^{(n_1+n_2)/2} \cdot \Gamma(n_1/2) \cdot \Gamma(n_2/2)} \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{(n_1/2)} \int_0^{\infty} z^{[(n_1+n_2)/2]-1} \cdot e^{(-z/2)[(n_1f/n_2)+1]} dz \end{aligned}$$

Misalkan: $(z/2)[n_1 f/n_2] + 1 = p$

$$z = \frac{2p}{(n_1 f/n_2) + 1}$$

$$dz = \frac{2}{(n_1 f/n_2) + 1} dp$$

Batas-batas: Untuk $z = 0$, maka $p = 0$

Untuk $z = \infty$, maka $p = \infty$

$$\begin{aligned} k_1(f) &= \frac{f^{(n_1/2)-1} \cdot (n_1/n_2)^{n_1/2}}{2^{(n_1+n_2)/2} \cdot \Gamma(n_1/2) \cdot \Gamma(n_2/2)} \int_0^\infty \left(\frac{2}{(n_1 f/n_2) + 1} \right)^{[(n_1+n_2)/2]-1} \cdot e^{-p} \frac{2}{(n_1 f/n_2) + 1} dp \\ &= \frac{f^{(n_1/2)-1} \cdot (n_1/n_2)^{n_1/2} \cdot 2^{(n_1+n_2)/2}}{2^{(n_1+n_2)/2} \cdot \Gamma(n_1/2) \cdot \Gamma(n_2/2) \cdot [(n_1 f/n_2) + 1]^{(n_1+n_2)/2}} \int_0^\infty p^{[(n_1+n_2)/2]-1} \cdot e^{-p} dp \\ &= \frac{f^{(n_1/2)-1} \cdot (n_1/n_2)^{n_1/2}}{\Gamma(n_1/2) \cdot \Gamma(n_2/2) \cdot [(n_1 f/n_2) + 1]^{(n_1+n_2)/2}} \Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Jadi: } k_1(f) &= \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right) \cdot \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{n_1/2}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \cdot \frac{f^{(n_1/2)-1}}{\left(1 + \frac{n_1 f}{n_2}\right)^{(n_1+n_2)/2}} && ; 0 < f < \infty \\ &= 0 && ; f \text{ lainnya} \end{aligned}$$

Bentuk fungsi densitas peluang (fdp) dari distribusi F bisa dilihat dalam [6] dan [7] sbb.

$$\begin{aligned} g_1(w) &= \frac{\Gamma\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right) \cdot \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{r_1/2}}{\Gamma\left(\frac{r_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{r_2}{2}\right)} \cdot \frac{w^{(r_1/2)-1}}{\left(1 + \frac{r_1 w}{r_2}\right)^{(r_1+r_2)/2}} && ; 0 < w < \infty \\ &= 0 && ; w \text{ lainnya} \end{aligned}$$

Fungsi densitas peluang (fdp) dari F ini bisa dilihat pada Definisi 2.1.

Definisi 2.1. FUNGSI DENSITAS PELUANG F [8] dan [6]

Peubah acak X dikatakan berdistribusi F , jika dan hanya jika fungsi densitas peluangnya berbentuk:

$$\begin{aligned} \text{Jadi: } k_1(f) &= \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right) \cdot \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{n_1/2}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \cdot \frac{f^{(n_1/2)-1}}{\left(1 + \frac{n_1 f}{n_2}\right)^{(n_1+n_2)/2}} && ; 0 < f < \infty \\ &= 0 && ; f \text{ lainnya} \end{aligned}$$

Dalil 2.2. PARAMETER DISTRIBUSI F [8]

Mean dan varians dari distribusi F adalah:

$$\begin{aligned} (1) \quad E(F) &= \frac{n_2}{n_2-2} \\ (2) \quad Var(F) &= \frac{2 \cdot n_2^2 (n_2+n_1-2)}{n_1 \cdot (n_2-2)^2 (n_2-4)} \end{aligned}$$

Bukti:

Berdasarkan definisi nilai ekspektasi kontinu, maka:

$$\begin{aligned} \mu_k &= E(F^k) = \int_{-\infty}^{\infty} k_1(f) df \\ &= \int_0^\infty f^k \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right) \cdot \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{n_1/2}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \cdot \frac{f^{(n_1/2)-1}}{\left(1 + \frac{n_1 f}{n_2}\right)^{(n_1+n_2)/2}} df \end{aligned}$$

Misalkan: $\frac{n_1 f}{n_2} = y$

$$df = \frac{n_1}{n_2} dy$$

Batas-Batas: Untuk $t = 0$, maka $y = 0$

Untuk $t = \infty$, maka $y = \infty$

$$\begin{aligned}\mu_k &= \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{\left(\frac{n_2}{n_1}y\right)^{k+(n_1/2)-1}}{(1+y)^{(n_1+n_2)/2}} \frac{n_2}{n_1} dy \\ &= \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^k \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{y^{k+(n_1/2)-1}}{(1+y)^{(n_1/2)+k+(n_2/2)-k}} dy\end{aligned}$$

Penyelesaian integral di atas dilakukan dengan menggunakan fungsi gamma, yaitu:

$$\int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{1+y} dy = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p)}{\Gamma(p+1-p)}$$

Dalam hal ini:

- $p - 1 = k + (n_1/2) - 1$
 $p = (n_1/2) + k$
- $1 = (n_1/2) + k + (n_2/2) - k$
 $= p + (n_2/2) - k$
 $1 - p = n_1 \cdot 2 - k$

$$\mu_k = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^k \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(k + \frac{n_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n_2}{2} - k\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}$$

$$\mu_k = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^k \frac{\Gamma\left(k + \frac{n_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n_2}{2} - k\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \quad ; \quad k < \frac{n_2}{2}$$

Untuk $k = 1$

$$\mu_1' = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^1 \frac{\Gamma\left(1 + \frac{n_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n_2}{2} - 1\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}$$

$$\mu_1' = \left(\frac{n_2}{n_1}\right) \frac{n_1/2}{\frac{n_2}{2} - 1} = \frac{n_2}{n_2 - 2}$$

Untuk $k = 2$

$$\mu_2' = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{\Gamma\left(2 + \frac{n_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n_2}{2} - 2\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}$$

$$\mu_2' = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{\left(\frac{n_1}{2} + 1\right) \cdot \left(\frac{n_2}{2}\right)}{\left(\frac{n_1}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{n_2}{2} - 2\right)}$$

$$\mu_2' = \frac{n_2^2(n_1 + 2)}{n_1(n_2 - 2)(n_2 - 4)}$$

Jadi: $\mu_2 = \mu_2' - \left(\mu_1'\right)^2$

$$= \frac{n_2^2(n_1 + 2)}{n_1(n_2 - 2)(n_2 - 4)} - \frac{n_2^2}{(n_2 - 2)^2}$$

$$\mu_2 = \frac{2n_2^2(n_2 + n_1 - 2)}{n_1(n_2 - 2)^2(n_2 - 4)}$$

Jadi terbukti bahwa:

$$\mu'_1 = E(F) = \frac{n_2}{n_2 - 2}$$

$$\mu_2 = Var(F) = \frac{2n_2^2(n_2 + n_1 - 2)}{n_1(n_2 - 2)^2(n_2 - 4)}$$

2.3. Prosedur Penaksiran Interval. Menurut [1], penentuan rumus taksiran interval satu atau lebih dari satu parameter dari sebuah distribusi secara umum dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut :

- (1) Tentukan penaksir titik untuk parameternya. Dalam hal ini, tentu saja dicari penaksir tak bias untuk parameter tersebut.
- (2) Tentukan distribusi dari penaksir tak bias bagi parameter tersebut.
- (3) Tentukan besaran pivot, yaitu besaran (berupa peubah acak) yang berisi penaksir, yang ditaksir, dan konstanta lainnya sedemikian rupa sehingga distribusi dari besaran pivotnya tidak bergantung pada parameter tersebut.
- (4) Tentukan distribusi dari besaran pivot. Dalam hal ini, kita mungkin perlu mencari hubungan antara distribusi dari besaran pivot dengan distribusi lain.
- (5) Kemudian besaran pivot itu disubstitusikan kedalam bentuk umum penaksiran interval dengan derajat keyakinan sebesar $(1-\alpha)$, yaitu:

$$P(a < \text{besaran pivot} < b) = 1-\alpha$$

- (6) Selanjutnya kita melakukan perubahan terhadap bentuk pada bagian 5 sedemikian rupa sehingga akan menghasilkan bentuk sebagai berikut:

$$P(c < \text{parameter} < d) = 1-\alpha$$

dengan c dan d adalah dua buah statistik.

Penelitian ini membahas tentang penentuan rumus taksiran interval dari rasio varians $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ dengan menggunakan besaran pivot dan mengambil derajat keyakinan sebesar $(1-\alpha)$, dan ini merupakan pembahasan materi secara teoritis dalam statistika sehingga metode penelitiannya adalah metode studi literatur atau studi kepustakaan. Dalam studi literatur peneliti mencari bahan penelitiannya berdasarkan sumber data sekunder yang akan mendukung penelitiannya [9]. Dalam penelitian ini, peneliti menggunakan sumber data sekundernya berupa buku referensi dan jurnal hasil penelitian.

Pengumpulan data yang digunakan dalam penelitian ini berupa langkah-langkah penentuan taksiran interval secara umum termasuk didalamnya besaran pivot, teknik transformasi peubah acak, fungsi densitas peluang (fdp) distribusi F .

Analisis data yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode besaran pivot, karena dalam besaran pivot ini diantaranya ada parameter rasio varians, yang akan dicari taksiran intervalnya.

Manfaat dari hasil penelitian ini adalah menambah wawasan dan pengayaan yang lebih mendalam dalam bidang statistika secara teoritis atau dikenal statistika matematik (statistika inferensial teoritis), terutama dalam penggunaan besaran pivot untuk menentukan taksiran interval dari rasio varians $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Langkah pertama yang dilakukan adalah menentukan penaksir titik yang tak bias bagi rasio varians $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$.

$$E\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\right) = E\left(\frac{\frac{n_1 \cdot S_1^2}{\sigma_1^2} \cdot \frac{\sigma_1^2}{n_1}}{\frac{n_2 \cdot S_2^2}{\sigma_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

Misalkan: $U = \frac{n_1 \cdot S_1^2}{\sigma_1^2}$ dan $V = \frac{n_2 \cdot S_2^2}{\sigma_2^2}$

$$\begin{aligned} \text{Maka: } E\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\right) &= E\left(\frac{\frac{U}{n_1} \sigma_1^2}{\frac{V}{n_2} \sigma_2^2}\right) \\ &= \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} E\left(\frac{\frac{U}{n_1}}{\frac{V}{n_2}}\right) \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian yang sudah dijelaskan pada Bagian 2.2, bahwa $F = \frac{U/n_1}{V/n_2}$ mengikuti distribusi F dengan derajat kebebasan pembilang = n_1 dan derajat kebebasan penyebut = n_2 . Kemudian dari Dalil 2.2 diperoleh bahwa $E(F) = \frac{n_2}{n_2-2}$ sehingga akan diperoleh:

$$\begin{aligned} E\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\right) &= \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \cdot \frac{n_2}{n_2-2} \\ E\left(\frac{n_2-2}{n_2} \frac{S_1^2}{S_2^2}\right) &= \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \end{aligned}$$

Ternyata $\frac{n_2-2}{n_2} \cdot \left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\right)$ merupakan penaksir tak bias bagi $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$.

Langkah kedua adalah akan ditentukan besaran pivot.

$$\begin{aligned} \text{Misalkan: } W &= \frac{n_2-2}{n_2} \cdot \left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\right) \\ &= \frac{n_1 \cdot S_1^2}{n_2 \cdot S_2^2} \cdot \frac{1}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} \cdot \frac{1}{\frac{n_1-1}{n_2-1}} \cdot \frac{n_2-2}{n_2-2} \\ &= \frac{n_1 \cdot S_1^2}{\sigma_1^2} \cdot \frac{1}{n_1-1} \frac{1}{\frac{n_2 \cdot S_2^2}{\sigma_2^2}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n_2-1}} \cdot (n_2-2) \cdot \frac{1}{n_2-2} \\ &= \frac{\frac{n_1 \cdot S_1^2}{\sigma_1^2} \cdot \frac{1}{n_1-1}}{\frac{n_2 \cdot S_2^2}{\sigma_2^2} \cdot \frac{1}{n_2-1}} \cdot (n_2-2) \cdot \frac{1}{n_2-2} \\ &= \frac{\frac{n_1 \cdot S_1^2}{\sigma_1^2} \cdot \frac{1}{n_1-1}}{\frac{n_2 \cdot S_2^2}{\sigma_2^2} \cdot \frac{1}{n_2-1}} \\ W &= \frac{U/(n_1-1)}{V/(n_2-1)} \end{aligned}$$

Dimana: $U = \frac{n_1 \cdot S_1^2}{\sigma_1^2}$ dan $V = \frac{n_2 \cdot S_2^2}{\sigma_2^2}$

Langkah ketiga adalah menentukan distribusi dari besaran pivot W , yaitu $W = \frac{U/(n_1-1)}{V/(n_2-1)}$.

Pada Bagian 2.2 sudah diperoleh bahwa $F = \frac{U/n_1}{V/n_2}$ berdistribusi F dengan derajat kebebasan pembilang = n_1 dan derajat kebebasan penyebut = n_2 , maka akan ditentukan fungsi densitas peluang dari $W = \frac{U/n_1-1}{V/n_2-1}$.

Misalkan U dan V adalah dua peubah acak kontinu yang saling bebas dan berdistribusi chi-kuadrat masing-masing dengan derajat kebebasannya n_1 dan n_2 .

Jika peubah acak $W = \frac{\frac{U}{n_1-1}}{\frac{V}{n_2-1}}$, maka akan ditentukan fdp dari W .

Fdp dari U adalah:

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{1}{2^{(n_1-1)/2} \cdot \Gamma\left[\frac{n_1-1}{2}\right]} \cdot u^{\left[\frac{n_1-1}{2}\right]-1} \cdot e^{-u/2} && ; 0 < u < \infty \\ &= 0 && ; u \text{ lainnya} \end{aligned}$$

Fkp dari V adalah:

$$\begin{aligned} f(v) &= \frac{1}{2^{(n_2-1)/2} \cdot \Gamma\left[\frac{n_2-1}{2}\right]} \cdot v^{\left[\frac{n_2-1}{2}\right]-1} \cdot e^{-v/2} & ; 0 < v < \infty \\ &= 0 & ; v \text{ lainnya} \end{aligned}$$

Karena U dan V saling bebas, maka fdp gabungannya adalah:

$$\begin{aligned} h(u, v) &= f(u) \cdot g(v) \\ &= \frac{1}{2ce^{[(n_1-1)+(n_2-1)]/2} \cdot \Gamma\left[\frac{n_1-1}{2}\right] \cdot \Gamma\left[\frac{n_2-1}{2}\right]} u^{\left[\frac{n_1-1}{2}\right]-1} \cdot v^{\left[\frac{n_2-1}{2}\right]-1} \cdot e^{-\frac{u+v}{2}} & ; 0 < u < \infty \\ & & 0 < v < \infty \\ &= 0 & ; u, v \text{ lainnya} \end{aligned}$$

Karena transformasi peubah acak yang diketahui berbentuk $W = \frac{\frac{U}{V}}{\frac{n_2-1}{n_2-1}}$, maka dimisalkan transformasi peubah acak keduanya adalah $Z = V$.

Jadi transformasi peubah acaknya adalah $W = \frac{\frac{U}{V}}{\frac{n_2-1}{n_2-1}}$ dan $Z = V$.

Hubungan antara nilai u dari U dan nilai v dari V dengan nilai w dari W dan nilai z dari Z diberikan dengan:

$$w = \frac{u/(n_1-1)}{v/(n_2-1)} \text{ dan } z = v.$$

Invers: $u = [(n_1-1)/(n_2-1)] \cdot w \cdot z$ dan $v = z$

Jacobiannya:

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial w} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial w} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left[\frac{n_1-1}{n_2-1}\right] z & \left[\frac{n_1-1}{n_2-1}\right] w \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \left[\frac{n_1-1}{n_2-1}\right] z \\ |J| &= \left[\frac{n_1-1}{n_2-1}\right] z \end{aligned}$$

Fdp gabungan dari W dan Z adalah:

$$\begin{aligned} k(w, z) &= h((n_1-1)/(n_2-1)wz, z) \cdot |J| \\ &= \frac{1}{2^{[(n_1-1)+(n_2-1)]/2} \cdot \Gamma(n_1/2) \cdot \Gamma(n_2/2)} \left(\frac{n_1-1}{n_2-1}fz\right)^{[(n_1-1)/2]-1} \cdot z^{[(n_2-1)/2]-1} \\ &\quad \times e^{(-z/2)\left[\frac{(n_1-1)f}{n_2-1}\right]+1} \cdot \frac{n_1-1}{n_2-1}z & ; 0 < f < \infty, 0 < z < \infty \\ &= 0 & ; fz \text{ lainnya} \end{aligned}$$

Fdp marginal dari F adalah:

$$\begin{aligned} k_1(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} k(f, z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{[(n_1-1)+(n_2-1)]/2} \cdot \Gamma(n_1-1/2) \cdot \Gamma(n_2-1/2)} \left(\frac{n_1-1}{n_2-1}fz\right)^{[(n_1-1)/2]-1} \cdot z^{[(n_2-1)/2]-1} \\ &\quad \times e^{(-z/2)\left[\frac{(n_1-1)f}{n_2-1}\right]+1} \cdot \frac{n_1-1}{n_2-1} dz \\ &= \frac{f^{[(n_1-1)/2]-1}}{2^{\frac{[(n_1-1)+(n_2-1)]}{2}} \cdot \Gamma\left[\frac{n_1-1}{2}\right] \cdot \Gamma\left[\frac{n_2-1}{2}\right]} \left(\frac{n_1-1}{n_2-1}\right)^{(n_1-1)/2} \int_0^{\infty} z^{[(n_1-1)+(n_2-1)/2]-1} \\ &\quad \times e^{(-z/2)[(n_1-1)f/(n_2-1)]+1} dz \end{aligned}$$

Misalkan: $(z/2)[(n_1-1)f/(n_2-1)] + 1 = p$

$$z = \frac{2p}{\left[\frac{(n_1-1)f}{n_2-1}\right]+1}$$

$$dz = \frac{2 \, dp}{\left[\frac{(n_1-1)f}{n_2-1} \right] + 1}$$

Batas-Batas: Untuk $z = 0$, maka $p = 0$

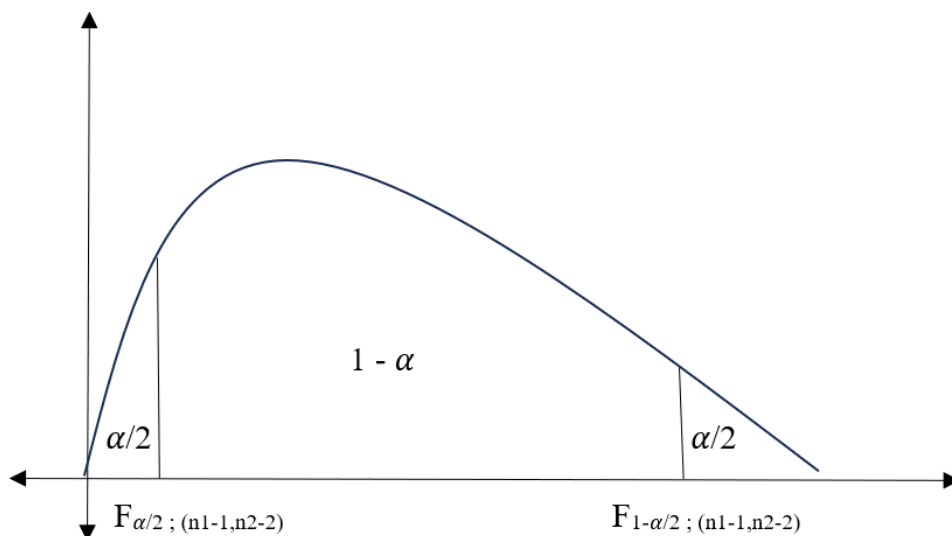
Untuk $z = \infty$, maka $p = \infty$

$$\begin{aligned} k_1(f) &= \frac{f^{[(n_1-1)/2]-1} \cdot \left[\frac{n_1-1}{n_2-1} \right]^{(n_1-1)/2}}{2^{\frac{[(n_1-1)+(n_2-1)]}{2}} \cdot \Gamma \left[\frac{n_1-1}{2} \right] \cdot \Gamma \left[\frac{n_2-1}{2} \right]} \int_0^\infty \left(\frac{2p}{\left[\frac{(n_1-1)f}{n_2-1} \right] + 1} \right)^{\{[(n_1-1)+(n_2-1)]/2\}-1} \\ &\quad \times e^{-p} \frac{2}{\left[\frac{(n_1-1)f}{n_2-1} \right] + 1} dp \\ &= \frac{f^{\left[\frac{n_1-1}{2} \right]-1} \cdot \left[\frac{n_1-1}{n_2-1} \right]^{(n_1-1)/2} \cdot 2^{[(n_1-1)+(n_2-1)]/2}}{2^{\frac{[(n_1-1)+(n_2-1)]}{2}} \cdot \Gamma \left[\frac{n_1-1}{2} \right] \cdot \Gamma \left[\frac{n_2-1}{2} \right] \cdot \left(\left[\frac{(n_1-1)f}{n_2-1} \right] + 1 \right)^{[(n_1-1)+(n_2-1)]/2}} \\ &\quad \int_0^\infty p^{[(n_1-1)+(n_2-1)/2]-1} \times e^{-p} dp \\ &= \frac{f^{\left[\frac{n_1-1}{2} \right]-1} \cdot [(n_1-1)/(n_2-1)]^{(n_1-1)/2}}{\Gamma \left[\frac{n_1-1}{2} \right] \cdot \Gamma \left[\frac{n_2-1}{2} \right] \cdot \left(\left[\frac{(n_1-1)f}{n_2-1} \right] + 1 \right)^{[(n_1-1)+(n_2-1)]/2}} \Gamma \left(\frac{(n_1-1) + (n_2-1)}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Jadi: } k_1(f) &= \frac{\Gamma \left(\frac{(n_1-1)+(n_2-1)}{2} \right) \cdot \left(\frac{n_1-1}{n_2-1} \right)^{(n_1-1)/2}}{\Gamma \left[\frac{n_1-1}{2} \right] \cdot \Gamma \left[\frac{n_2-1}{2} \right]} \cdot \frac{f^{[(n_1-1)/2]-1}}{\left(1 + \frac{(n_1-1)f}{n_2-1} \right)^{[(n_1-1)+(n_2-1)]/2}} \quad ; 0 < f < \infty \\ &= 0 \quad ; f \text{ lainnya} \end{aligned}$$

Ternyata fdp marginal di atas merupakan fdp dari distribusi F dengan derajat kebebasan pembilang = n_1-1 dan derajat kebebasan penyebut = n_2-1 .

Langkah berikutnya adalah mensubstitusikan besaran pivot kedalam bentuk umum taksiran interval.



GAMBAR 1. Grafik distribusi F taksiran interval rasio varians dengan derajat keyakinan = $1 - \alpha$

Dari Gambar 1 diperoleh : S

$$\begin{aligned}
 P\left(F_{\frac{\alpha}{2};(n_1-1,n_2-1)} < W < F_{1-(\frac{\alpha}{2});(n_1-1,n_2-1)}\right) &= 1 - \alpha \\
 P\left(F_{\frac{\alpha}{2};(n_1-1,n_2-1)} < \frac{U/(n_1-1)}{V/(n_2-1)} < F_{1-(\frac{\alpha}{2});(n_1-1,n_2-1)}\right) &= 1 - \alpha \\
 P\left(F_{\frac{\alpha}{2};(n_1-1,n_2-1)} < \frac{\frac{n_1 \cdot S_1^2}{\sigma_1^2}/(n_1-1)}{\frac{n_2 \cdot S_2^2}{\sigma_2^2}/(n_2-1)} < F_{1-(\frac{\alpha}{2});(n_1-1,n_2-1)}\right) &= 1 - \alpha \\
 P\left(\frac{n_2 \cdot S_2^2}{n_1 \cdot S_1^2} \cdot \frac{n_1-1}{n_2-1} \cdot F_{\frac{\alpha}{2};(n_1-1,n_2-1)} < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < \frac{n_2 \cdot S_2^2}{n_1 \cdot S_1^2} \cdot \frac{n_1-1}{n_2-1} \cdot F_{1-(\frac{\alpha}{2});(n_1-1,n_2-1)}\right) &= 1 - \alpha \\
 P\left(\frac{n_1 \cdot S_1^2}{n_2 \cdot S_2^2} \cdot \frac{n_2-1}{n_1-1} \cdot \frac{1}{F_{1-(\frac{\alpha}{2});(n_1-1,n_2-1)}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{n_1 \cdot S_1^2}{n_2 \cdot S_2^2} \cdot \frac{n_2-1}{n_1-1} \cdot \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2};(n_1-1,n_2-1)}}\right) &= 1 - \alpha
 \end{aligned}$$

Sehingga taksiran interval untuk $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ ditentukan dengan rumus sbb :

$$\frac{n_1 \cdot S_1^2}{n_2 \cdot S_2^2} \cdot \frac{n_2-1}{n_1-1} \cdot \frac{1}{F_{1-(\frac{\alpha}{2});(n_1-1,n_2-1)}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{n_1 \cdot S_1^2}{n_2 \cdot S_2^2} \cdot \frac{n_2-1}{n_1-1} \cdot \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2};(n_1-1,n_2-1)}}$$

4. SIMPULAN

Setelah dilakukan langkah-langkah dalam penentuan taksiran interval untuk rasio varians $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$, penaksir titik yang tak bias bagi rasio varians $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ adalah $\frac{n_2-2}{n_2} \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2}$. Besaran pivot yang digunakan adalah $W = \frac{U/(n_1-1)}{V/(n_2-1)}$, dimana : $U = \frac{n_1 \cdot S_1^2}{\sigma_1^2}$ dan $V = \frac{n_2 \cdot S_2^2}{\sigma_2^2}$. Distribusi dari besaran pivot itu dengan menggunakan teknik transformasi peubah acak adalah distribusi F dengan derajat kebebasan pembilang = n_1-1 dan derajat kebebasan penyebut = n_2-1 . Setelah besaran pivot disubstitusikan kedalam bentuk umum taksiran interval dan dilakukan uraian lebih lanjut, maka diperoleh taksiran interval untuk rasio varians $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ berbentuk :

$$\frac{n_1 \cdot S_1^2}{n_2 \cdot S_2^2} \cdot \frac{n_2-1}{n_1-1} \cdot \frac{1}{F_{1-(\frac{\alpha}{2});(n_1-1,n_2-1)}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{n_1 \cdot S_1^2}{n_2 \cdot S_2^2} \cdot \frac{n_2-1}{n_1-1} \cdot \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2};(n_1-1,n_2-1)}}$$

Implikasi teoritis dari artikel ini adalah penggunaan besaran pivot yang berkaitan dengan penentuan taksiran interval dari parameter.

Rekomendasi untuk penelitian lanjutan adalah menentukan taksiran interval dari parameter yang berdistribusi tertentu lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Herrhyanto, N., 2013, *Statistika Inferensial Secara Teoretis*, Penerbit Yrama Widya, Bandung.
- [2] Ardyanto, F., 2018, *Estimasi Interval Parameter Komponen Parametrik dan Spline dalam Model Regresi Semiparametrik Campuran Spline dan Kernel* (Aplikasi : Tingkat Pengangguran Terbuka di Indonesia), Tesis di Program Pascasarjana Departemen Statistika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya, tidak diterbitkan.
- [3] Hossain, Md. F., 2022, *The Generalized Pivotal Quantity Method*, Conference : Nevada chapter of the American Statistical Association 2022 Fall Symposium At Las Vegas, Nevada, USA.
- [4] Widiarihi, T. dan Mardiyati, W., 2008, Inferensi Data Uji Hidup Tersensor Tipe II Berdistribusi Rayleigh dengan Metode MLE, *Media Statistika*, 1(2) : 69-74.
- [5] Seo, Jung-In, Young Eun Jeon, and Suk-Bok Kang. New Approach for a Weibull Distribution under the Progressive Type-II Censoring Scheme. *Mathematics* 8, no. 10 (October 5, 2020): 1713.
- [6] Hogg, R.V. & Craig, A.T., 1995, *Introduction to Mathematical Statistics*, Fifth Edition, Prentice-Hall, Inc. A Simon & Schuster Company. Englewood Cliffs New Jersey.
- [7] Dudewicz, E.J. & Mishra, S.N., 1988, *Modern Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons, Inc., Canada.
- [8] Herrhyanto, N. & Gantini, T., 2009, *Pengantar Statistika Matematis*, Penerbit Yrama Widya, Bandung.
- [9] Nazir, 1985, *Metode Penelitian*, Penerbit Ghalia Indonesia, Jakarta.

