

Analisis Kemunculan Solusi Periodik dari Model Matematika Penyebaran Demam Berdarah Dengue dengan Laju Infeksi Tidak Standar

NUR SYAM RAHMAN¹, HAKAN AHMAD FATAHILLAH¹, DIPO ALDILA^{1,2}

¹Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Indonesia, Depok 16424, Indonesia

²Innovative Mathematics and Predictive Analytics for Complex System and Technology
Laboratory (IMPACT Lab), Universitas Indonesia, Depok 16424, Indonesia
Email: aldiladipo@sci.ui.ac.id

Abstrak

Demam berdarah dengue (DBD) merupakan penyakit menular yang ditularkan oleh nyamuk betina *Aedes aegypti*. Penyakit ini telah menjadi permasalahan tahunan di berbagai negara tropis dan subtropis dunia, termasuk Indonesia. Kemunculan DBD yang berulang setiap tahun mengindikasikan adanya pola musiman dalam penyebarannya. Oleh karena itu, kajian terhadap kemunculan solusi periodik suatu model penyebaran DBD perlu dilakukan. Model penyebaran DBD yang dibahas dalam artikel ini dibentuk menggunakan pendekatan sistem persamaan diferensial nonlinier berdimensi lima. Dengan pendekatan *Quasi Steady State Approximation* dan asumsi populasi konstan, model tersebut dapat disederhanakan menjadi sistem persamaan diferensial biasa nonlinier berdimensi dua. Fitur menarik dari model yang dibahas terletak pada fungsi infeksi nonstandar yang digunakan untuk menggambarkan fenomena ketidakpedulian masyarakat terhadap penyebaran penyakit DBD. Analisis kemunculan bifurkasi Hopf, yang menyebabkan munculnya solusi periodik, dibahas dalam artikel ini secara analitik dan numerik. Simulasi numerik untuk beberapa skenario berbeda menunjukkan bahwa model yang dibahas dapat memunculkan fenomena menarik berupa bifurkasi maju, bifurkasi mundur, bifurkasi Hopf, hingga kemunculan fenomena gelembung (*endemic bubble*).

Kata kunci: Model demam berdarah dengue, Bifurkasi Hopf, Solusi periodik, Sistem dinamik

Abstract

Dengue hemorrhagic fever (DHF) is an infectious disease transmitted by the female *Aedes aegypti* mosquito. This disease has become an annual problem in various tropical and subtropical countries around the world, including Indonesia. The recurring appearance of DHF each year indicates the emergence of periodic behavior in its transmission. Therefore, it is necessary to study the occurrence of periodic solutions in a model of DHF transmission. *The mathematical model on the spread of dengue is formed by nonlinear ordinary differential equation of five dimensions and with Quassi Steady State Approximation approach and constant population assumption, the model can be reduced into nonlinear ordinary differential equation of two dimensions. The interesting part of this model is the non-standard transmission rate function to capture society's ignorance on the spread of dengue. The analysis on Hopf bifurcation occurrence that infers on the emergence of periodic solution is discussed in this article both analytically and numerically. Numerical simulation on different scenarios indicates that the model can show interesting phenomena, such as forward bifurcation, backward bifurcation, Hopf bifurcation, and the occurrence of endemic bubble.*

Keywords: *Dengue model, Hopf bifurcation, Periodic solutions, Dynamic systems*

1. PENDAHULUAN

Di Indonesia, terdapat berbagai jenis penyakit yang muncul di sepanjang tahun, atau secara konsisten muncul pada waktu-waktu tertentu, antara lain demam berdarah dengue (DBD). Penyakit DBD merupakan suatu penyakit yang disebabkan oleh virus DEN dan disebarluaskan melalui gigitan nyamuk betina *Aedes aegypti* yang telah terinfeksi. Penyakit ini tersebar hampir di seluruh provinsi di Indonesia. Berbagai pendekatan terus dilakukan untuk membantu pemerintah dalam menanggulangi penyebaran penyakit DBD, baik itu melalui disiplin ilmu kedokteran, kesehatan masyarakat, farmasi, maupun matematika.

Model matematika telah sejak lama digunakan untuk memodelkan penyebaran suatu penyakit dalam populasi. Sejauh yang kami ketahui, model matematika penyebaran penyakit menular pertama kali diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927 [1]. Sejak saat itu, berbagai model matematika telah banyak diajukan oleh para matematikawan untuk menganalisis penyebaran suatu penyakit, sebagai contoh: DBD [2, 3], malaria [4, 5], tuberkulosis [6, 7], COVID-19 [8, 9, 10], HIV/AIDS [11], dan berbagai jenis penyakit lainnya [12, 13, 14].

Pada tahun 2023, Aldila dan rekan-rekan merilis suatu artikel yang membahas penyebaran penyakit demam berdarah dengan mempertimbangkan efek ketidakpedulian masyarakat terhadap penyebaran DBD [15]. Dengan memisalkan bahwa populasi manusia dapat dibagi kedalam 3 kompartemen berdasarkan status kesehatannya yaitu sehat (S), terinfeksi dan mampu menginfeksi (I), dan sembuh sementara (R), serta populasi nyamuk dibagi kedalam dua kompartemen yaitu nyamuk sehat (U) dan terinfeksi (V), maka model ini dapat dituliskan dalam persamaan berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \Lambda_h - \beta_h(1 + \alpha I)SV + \delta R - \mu_h S \\
\frac{dI}{dt} &= \beta_h(1 + \alpha I)SV - \gamma I - \mu_h I \\
\frac{dR}{dt} &= \gamma I - \delta R - \mu_h R \\
\frac{dU}{dt} &= \Lambda_v - \beta_v(1 + \alpha I)UI - \mu_v U \\
\frac{dV}{dt} &= \beta_v(1 + \alpha I)UI - \mu_v V
\end{aligned}, \tag{1}$$

di mana Λ_h dan Λ_v merepresentasikan jumlah kelahiran per satuan waktu pada manusia dan nyamuk; β_h dan β_v sebagai merupakan laju transmisi infeksi yang berhasil pada populasi manusia dan nyamuk; μ_h dan μ_v sebagai laju kematian alami pada manusia dan nyamuk; γ sebagai laju kesembuhan; δ sebagai laju kehilangan imunitas sementara; serta α merepresentasikan tingkat keacuhan populasi terhadap keberadaan DBD. Model ini dilengkapi dengan nilai awal yang memenuhi:

$$S(0) \geq 0, I(0) \geq 0, R(0) \geq 0, U(0) \geq 0, V(0) \geq 0.$$

Karena ekspektasi umur hidup nyamuk yang jauh lebih singkat (kurang lebih hanya 3 minggu) dibandingkan manusia (kurang lebih 65–72 tahun), populasi nyamuk dapat diasumsikan telah mencapai kondisi keseimbangannya. Oleh karena itu, dinamika nyamuk dapat disederhanakan menggunakan asumsi *Quasi Steady State Approximation* (QSSA) dengan mensubstitusikan kondisi keseimbangan nyamuk ke dalam populasi manusia. Dengan mengasumsikan populasi manusia konstan sebesar N , model pada persamaan (1) dapat disederhanakan sebagai model berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= \frac{\beta_h(1 + \alpha I)^2(N - I - R)IM}{((1 + \alpha I)I + \kappa_v)} - \gamma I - \mu_h I \\
\frac{dR}{dt} &= \gamma I - \delta R - \mu_h R,
\end{aligned} \tag{2}$$

di mana $\kappa_v = \frac{\mu_v}{\beta_v}$, $M = \frac{\Lambda_v}{\mu_v}$, dan $S = N - I - R$. Selanjutnya, sistem persamaan (2) disebut dengan Model (2). Penulis dalam [15] telah menunjukkan kemungkinan kemunculan bifurkasi maju dan mundur dari model tersebut ketika $\mathcal{R}_0 = 1$, yang bergantung pada nilai α , dengan $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta_h NM}{\kappa_v(\gamma + \mu_h)}$. Jika $\alpha > \alpha^*$, dengan $\alpha^* = \frac{(\delta + \gamma + \mu_h)\kappa_v + N(\delta + \mu_h)}{2(\delta + \mu_h)N\kappa_v}$, maka bifurkasi mundur muncul di titik $(\mathcal{R}_0, I) = (1, 0)$. Di sisi lain, bifurkasi maju muncul jika $\alpha \leq \alpha^*$. Meskipun hasil yang telah dibahas oleh penulis dalam [15] cukup komprehensif, analisis terkait kemunculan solusi periodik belum dibahas. Padahal, kemunculan solusi periodik sangat krusial dalam memahami penyebaran DBD, mengingat banyak bukti menunjukkan bahwa penyakit ini memiliki pola musiman di berbagai daerah, termasuk Indonesia. Berdasarkan hal tersebut, analisis terhadap kemunculan solusi periodik dari model yang telah dibahas dalam [15] dipandang perlu untuk dilakukan.

Pada artikel ini, kami akan menunjukkan kemunculan bifurkasi yang lain, yaitu bifurkasi Hopf. Bukti analitik atas eksistensi bifurkasi Hopf ini akan ditunjukkan secara detail, dan beberapa simulasi numerik dilakukan untuk mendukung hasil analitik kami. Struktur dari artikel ini adalah sebagai berikut: analisis kemunculan bifurkasi Hopf ditunjukkan secara analitik pada bab 2, bab 3 membahas simulasi numerik yang menunjukkan eksistensi solusi periodik akibat kemunculan bifurkasi Hopf, dan kesimpulan sebagai penutup kami berikan pada bab 4.

2. KAJIAN ANALITIK

Bab ini membahas mengenai syarat-syarat kemunculan fenomena bifurkasi Hopf dari model yang diberikan pada persamaan (2). Berdasarkan Teorema 3.10 pada [1], syarat kemunculan bifurkasi Hopf pada sistem dua dimensi diberikan dalam teorema berikut:

Teorema 2.1. [1] Misalkan sistem planar

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y), \\ y' &= g(x, y) \end{aligned}$$

dan misalkan (x^*, y^*) merupakan titik keseimbangan sistem tersebut. Maka matriks Jacobian dari sistem tersebut ketika dievaluasi pada titik keseimbangan tersebut diberikan oleh

$$J|_{(x^*, y^*)} = \begin{bmatrix} f_x(x^*, y^*) & f_y(x^*, y^*) \\ g_x(x^*, y^*) & g_y(x^*, y^*) \end{bmatrix}.$$

Keseimbangan (x^*, y^*) mengalami bifurkasi Hopf jika dan hanya jika untuk suatu nilai parameter μ , yaitu μ_0 , berlaku:

- (1) $tr(J)|_{x=x^*(\mu_0), y=y^*(\mu_0)} = 0$.
- (2) $Det J|_{x=x^*(\mu_0), y=y^*(\mu_0)} > 0$.
- (3) $\frac{dtr(J)}{d\mu_0} = d \neq 0$.

Memanfaatkan Teorema 2.1, analisis kemunculan bifurkasi Hopf pada Model (2) diberikan sebagai berikut. Matriks Jacobian pada Model (2) diberikan oleh:

$$J = \begin{bmatrix} C - \gamma - \mu_h & -\frac{\beta_h M I (\alpha I + 1)^2}{\alpha I^2 + \kappa_v + I} \\ \gamma & -\delta - \mu_h \end{bmatrix}, \quad (3)$$

dengan $C = \frac{3\beta_h M (N - I - R)(\alpha I + 1)(\alpha I + \frac{1}{3})}{\alpha I^2 + \kappa_v + I} - \frac{\beta_h M I (\alpha I + 1)^2 (\alpha I (2N - I - 2R) + N + \kappa_v - R)}{(\alpha I^2 + \kappa_v + I)^2}$. Misalkan (I^*, R^*) adalah suatu titik keseimbangan endemik. Untuk menentukan apakah bifurkasi Hopf terjadi, maka akan dicek syarat pada Teorema 2.1 terkait Model (2).

2.1. Syarat 1. Syarat pertama dari Teorema 2.1 adalah terdapat parameter bifurkasi α yang memenuhi kondisi sedemikian sehingga $tr(J)$ bernilai nol. *Trace* dari matriks Jacobian J adalah sebagai berikut:

$$tr J|_{(I^*, R^*)} = \frac{P(\alpha)}{((1 + \alpha I^*)^2 I^* + \kappa_v)^2},$$

dengan

$$P(\alpha) = a_3 \alpha^3 + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 \quad (4)$$

dan:

$$\begin{aligned} a_3 &= -2M\beta_h I^{*5} + M\beta_h(N - R^*)I^{*4}, \\ a_2 &= (-5\beta_h M - \delta - \gamma - 2\mu_h)I^{*4} + 2M\beta_h((N - R^* - 2\kappa_v)I^* + \frac{3\kappa_v(N - R^*)}{2})I^{*2}, \\ a_1 &= ((-6\beta_h M - 2\delta - 2\gamma - 4\mu_h)\kappa_v + M\beta_h(N - R^*))I^{*2} + 4M\kappa_v(N - R^*)\beta_h I^*, \\ a_0 &= -I^*(\beta_h M + \delta + \gamma + 2\mu_h)(I^{*2} + 2\kappa_v) + ((M\beta_h(N - R^*) - \kappa_v(\delta + \gamma + 2\mu_h))\kappa_v). \end{aligned}$$

Nilai dari *trace* J akan bernilai nol jika terdapat α^* yang memenuhi $P(\alpha) = 0$. Penentuan nilai α^* yang memenuhi persamaan $P(\alpha) = 0$ dilakukan dengan pendekatan numerik karena menentukan solusi α^* secara eksplisit pada persamaan ini tidak memberikan informasi biologis yang signifikan. Pendekatan ini dilakukan dengan mensubstitusi data pada Tabel 1 ke dalam Model (2) dan dengan nilai $\alpha \in [0, 1]$. Kemudian, solusi (I^*, R^*) yang didapat digunakan untuk mencari trace dari matriks J . Nilai α^* adalah nilai α yang menyebabkan $tr(J) = 0$. Solusi numerik dari $tr(J) = 0$ yang didapat adalah $\alpha_1 = 0.0055334747$, $\alpha_2 = 0.029895835$,

TABEL 1. Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi numerik

Parameter	Deskripsi	Nilai	referensi
N	Populasi manusia	1000	Asumsi
M	Populasi nyamuk	2000	Asumsi
γ	Laju kesembuhan	$\frac{1}{4}$	[15]
μ_h	Laju kematian alami	$\frac{1}{70*52}$	[15]
β_h	Laju transmisi infeksi	0.0025	Asumsi
κ_v	Jumlah maksimum populasi nyamuk	20000	Asumsi
δ	Laju kehilangan imunitas sementara	$\frac{1}{36}$	[15]

dan $\alpha_3 = 0.10254$. Masing-masing α_i^* , $i = 1, 2, 3$, yang didapat akan dicek apakah α_i^* tersebut memenuhi syarat-syarat berikutnya.

2.2. Syarat 2. Setelah menemukan nilai α^* yang menyebabkan $tr(J) = 0$ pada syarat 1 Teorema 2.1, selanjutnya akan ditunjukkan bahwa nilai α^* yang didapat dari syarat 1 Teorema 2.1 membuat nilai dari determinan matriks J pada persamaan (3) bernilai positif. Determinan dari matriks Jacobian J adalah sebagai berikut:

$$\det J = (\gamma + \mu_h)(\delta + \mu_h) + \frac{1}{((\alpha I^* + 1)I^* + \kappa_v)^2} \left(M(1 + \alpha I^*)\beta_h(b_1 + b_2 + b_3) \right), \quad (5)$$

dengan

$$\begin{aligned} b_1 &= (I^*)^2(1 + \alpha I^*)(\gamma + \alpha \gamma I^* + \delta + (2I^* - N + R^*)\alpha\delta), \\ b_2 &= (I^*(1 + \alpha I^*)\gamma + (2I^* - N + R + I^*(4I^* - 3N + 3R^*)\alpha)\delta)\kappa_v, \text{ dan} \\ b_3 &= (I^*)^2(1 + \alpha I^*)(1 + (2I^* - N + R^*)\alpha) + \\ &\quad (2I^* - N + R^* + I^*(4I^* - 3N + 3R^*)\alpha)\kappa_v. \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusi nilai α_1^* dan nilai parameter pada Tabel 1 beserta solusi numerik $(I^*, R^*)|_{\alpha=\alpha^*}$ pada determinan matriks Jacobian, didapat bahwa $\det J_{\alpha_1^*} = 0.0000831301$. Selanjutnya, akan diperiksa $\det J$ untuk nilai α_2^* . Nilai dari $\det J_{\alpha_2^*} = 0.0825342$. Pada α_3^* , nilai dari $\det J_{\alpha_3^*} = 0.822501$. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa nilai untuk semua nilai α^* memenuhi syarat kedua pada Teorema 2.1.

2.3. Syarat 3. Syarat ketiga dari Teorema 2.1 adalah turunan dari *trace* J terhadap parameter α tidak nol. Turunan dari *trace* matriks Jacobian J terhadap parameter α adalah sebagai berikut:

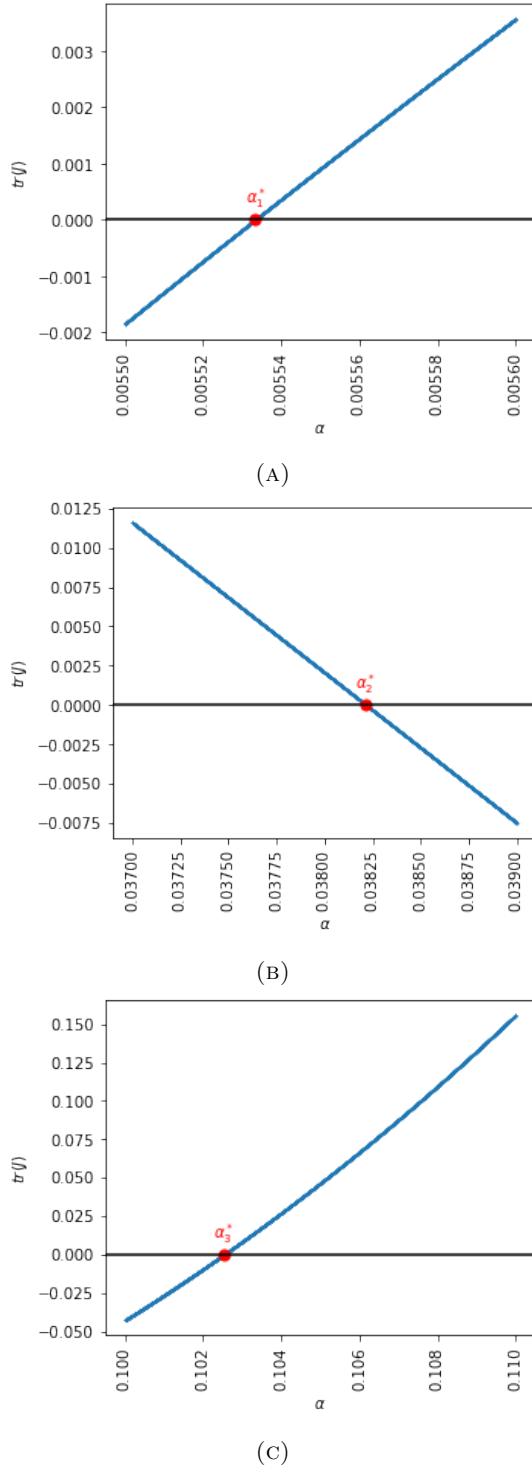
$$\frac{d}{d\alpha} tr(J) = -\frac{1}{((1 + \alpha I)I + \kappa_v)^3} \left(IM(c_1 + c_2 + c_3)\beta_h \right), \quad (6)$$

dengan

$$\begin{aligned} c_1 &= I^2(2I - N + R)(1 + \alpha I)^3, \\ c_2 &= 3I(2I - N + R)(1 + \alpha I)^2\kappa_v, \text{ dan} \\ c_3 &= 2(3I - 2N + 2R + I(4I - 3N + 3R)\alpha)\kappa_v^2. \end{aligned}$$

Perhitungan $\frac{d}{d\alpha} tr(J)$ juga dapat dilakukan dengan melihat bentuk kurva $Tr(J)$ di sekitar titik α^* . Dari Gambar 1, didapat bahwa

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} tr(J)|_{\alpha=\alpha_1^*} &> 0, \\ \frac{d}{d\alpha} tr(J)|_{\alpha=\alpha_2^*} &< 0, \text{ dan} \\ \frac{d}{d\alpha} tr(J)|_{\alpha=\alpha_3^*} &> 0 \end{aligned}$$



GAMBAR 1. Kurva $tr(J)$ pada titik (A) α_1^* , (B) α_2^* , dan (C) α_3^*

Sebagai contoh ilustrasi, pada Gambar 1(A), $\frac{d}{d\alpha} tr(J)|_{\alpha=\alpha_1^*} > 0$ karena kurva $tr(J)$ di sekitar titik α_1^* merupakan kurva monoton naik. Karena $\frac{d}{d\alpha} tr(J)|_{\alpha=\alpha^*} \neq 0$, maka syarat ketiga pada Teorema 2.1 pada nilai α^* terpenuhi.

Berdasarkan ketiga syarat yang telah dibahas di atas, hasil kajian dirumuskan dalam teorema berikut:

Teorema 2.2. *Misalkan matriks J adalah matriks Jacobian dari Model (2). Sistem tersebut mengalami bifurkasi Hopf jika:*

- (1) *Terdapat nilai α yang memenuhi persamaan (4).*
- (2) *Determinan matriks J yang dievaluasi pada α dan titik keseimbangan endemik, sebagaimana diberikan dalam persamaan (5), bernilai positif.*
- (3) *Laju perubahan trace dari matriks J terhadap α , seperti yang diberikan pada persamaan (6), di titik α^* pada poin pertama, bernilai tidak nol.*

2.4. Jenis Bifurkasi Hopf. Karena sudah dibuktikan bahwa syarat-syarat pada Teorema 2.1 terpenuhi, subbab ini akan membahas tentang jenis bifurkasi Hopf dengan menggunakan Teorema 3.9 pada [1]. Jenis bifurkasi Hopf dapat ditentukan dengan cara menganalisis *genericity condition* model tersebut. Dengan memisalkan

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y; \mu), \\ y' &= g(x, y; \mu). \end{aligned}$$

Genericity condition di titik (x^*, y^*) dan pada nilai $\mu = \mu_0$ dicari dengan menggunakan persamaan

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{16} \left(f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy} \right) + \\ &\quad \frac{1}{16\omega} \left(f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + f_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy} \right) \end{aligned} \tag{7}$$

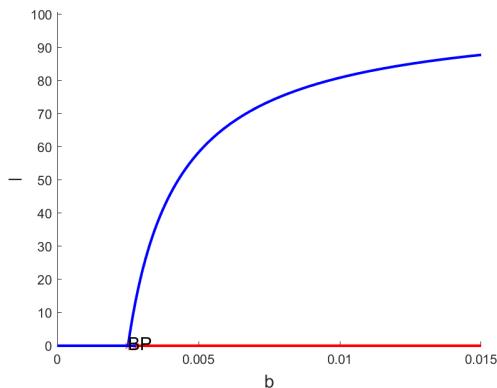
dengan $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{\mu=\mu_0} (x^*, y^*)$ dan seterusnya. ω merupakan komponen imajiner dari nilai eigen matriks Jacobian di sekitar titik endemik $(x^*, y^*)|_{\alpha=\alpha^*}$ dengan $\omega \neq 0$. Hasil yang diharapkan adalah $a \neq 0$.

Secara ringkas, dapat disimpulkan berdasarkan Teorema 3.9 pada [1] bahwa jika $ad < 0$, bifurkasi disebut superkritikal, dan solusi periodik bifurkasi bersifat stabil. Lebih lanjut, jika $ad > 0$, bifurkasi disebut subkritikal, dan solusi periodik bifurkasi bersifat tidak stabil. Perlu diingat bahwa nilai d didapatkan dari syarat 3 di Teorema 2.1. Pada α_1^* , didapat bahwa $\omega_1 = 0.0091166$, sehingga $a = -8.9827 \times 10^{-6}$. Kemudian pada α_2^* , didapat bahwa $\omega_2 = 0.354773$, sehingga $a = -9.24241 \times 10^{-6}$. Terakhir, pada $\alpha_3^* = 0.1025345$, didapat bahwa $\omega = 0$, sehingga nilai a tidak terdefinisi. Terlihat bahwa nilai ad untuk α_1^* adalah $ad < 0$, sehingga jenis bifurkasi Hopf yang muncul adalah superkritikal dan nilai ad untuk α_2^* adalah $ad > 0$, sehingga jenis bifurkasi Hopf yang muncul adalah subkritikal. Jenis bifurkasi Hopf pada α_3 tidak dapat ditentukan karena tidak memenuhi *nonhyperbolicity condition* pada Teorema 3.9 pada [1]. Visualisasi dari Teorema 2.2 ditunjukkan pada Gambar 1 untuk tiga nilai α yang berbeda.

Pada bab berikut ini, kami akan menunjukkan simulasi numerik terkait kemunculan solusi periodik yang disebabkan oleh kemunculan bifurkasi Hopf. Beberapa nilai α diberikan untuk menunjukkan dua kemungkinan perilaku dinamis yang berbeda.

3. SIMULASI NUMERIK

Pada bab ini, akan ditunjukkan simulasi numerik terhadap diagram bifurkasi Model (2) menggunakan nilai parameter yang diberikan di Tabel 1 (kecuali disebutkan berbeda). Semua diagram bifurkasi dihasilkan menggunakan *software* MATLAB, khususnya program *MatCont*. *MatCont* adalah sebuah perangkat lunak berbasis MATLAB yang dirancang untuk analisis numerik bifurkasi pada suatu sistem dinamis. Beberapa istilah yang digunakan dalam bentuk simbol di bab ini adalah *FP* sebagai titik balik (*Fold Point*), *BP* sebagai titik percabangan (*Branching Point*), dan titik *H* sebagai titik Hopf.



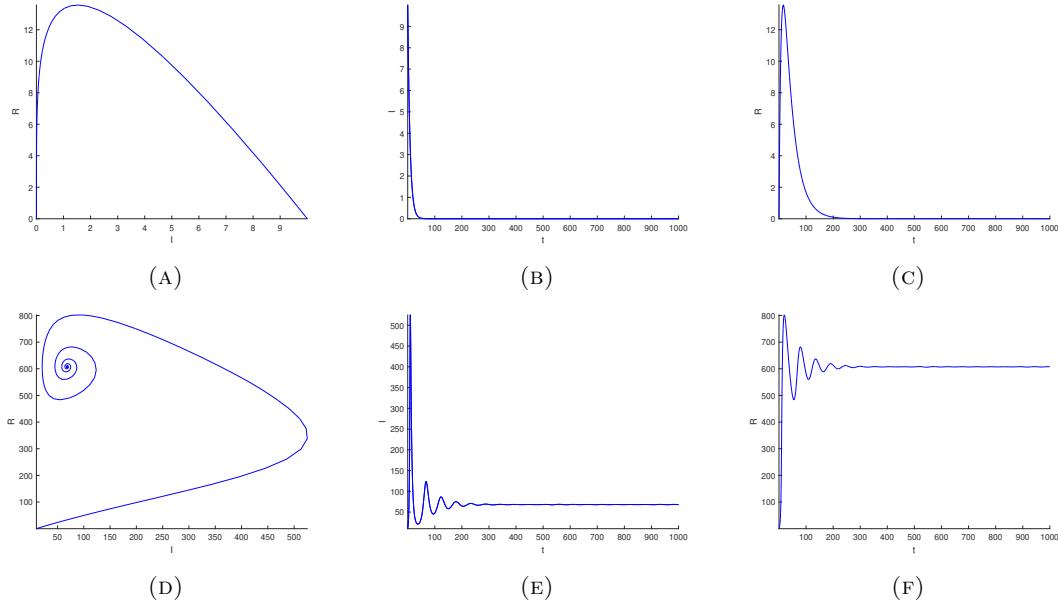
GAMBAR 2. Diagram bifurkasi maju dengan b sebagai parameter bifurkasi.

Nilai parameter yang digunakan diberikan pada Tabel 1, kecuali $\alpha = 0.001566427943$. Kurva merah dan biru masing-masing merepresentasikan titik ekuilibrium tidak stabil dan stabil

Simulasi pertama dilakukan menggunakan nilai parameter seperti di Tabel 1, kecuali nilai α yaitu 0.001566427943 dan parameter b digunakan sebagai parameter bifurkasi. Dengan menggunakan nilai parameter seperti ini, dihasilkan fenomena bifurkasi maju seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2. Interpretasi dari Gambar 2 diberikan sebagai berikut. Ketika $b = 0$, ditemukan bahwa hanya titik bebas penyakit yang muncul dan bersifat stabil, ditandai dengan grafik solid berwarna biru. Ketika b terus membesar, maka kestabilan titik bebas penyakit ini terus terjaga hingga akhirnya bertemu dengan titik percabangan BP saat $b = 0.0025$. Ketika mencapai titik BP ini, kestabilan titik bebas penyakit berubah menjadi tidak stabil (ditandai dengan grafik solid berwarna merah). Di saat yang sama, titik endemik yang bersifat stabil juga muncul yang ditandai dengan grafik solid berwarna biru. Untuk b yang terus membesar menjauhi titik percabangan BP , kestabilan titik endemik terus terjaga dan tidak pernah berubah.

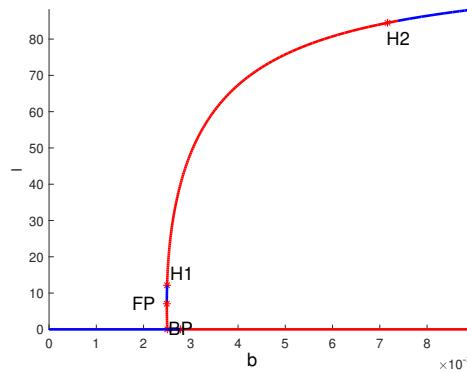
Simulasi numerik yang menunjukkan solusi Model (2) untuk beberapa nilai b yang berbeda ditunjukkan pada Gambar 3. Simulasi ini didasarkan pada Gambar 2. Untuk $b = 0.0013 < BP$, ditemukan bahwa solusi dari sistem (2) akan menuju titik keseimbangan bebas penyakit yang bersifat stabil seperti ditunjukkan oleh Gambar 3a-3c. Di lain pihak, untuk $b = 0.0063 > BP$, ditemukan bahwa titik keseimbangan bebas penyakit menjadi tidak stabil. Namun, titik keseimbangan endemiklah yang bersifat stabil. Oleh karena itu, solusi dari sistem (2) menuju titik keseimbangan endemik seperti ditunjukkan pada Gambar 3d-3f.

Simulasi kedua dilakukan menggunakan nilai parameter seperti di Tabel 1, kecuali nilai α yaitu 0.005566427943. Dengan nilai parameter ini, ditemukan fenomena bifurkasi mundur seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4. Penjelasan dari Gambar 4 diberikan sebagai berikut. Dimulai dari $b = 0$, seiring membesarnya nilai b , titik keseimbangan bebas penyakit terus bersifat stabil yang ditandai dengan kurva solid berwarna biru. Kestabilan ini terus terjaga hingga akhirnya ditemukan titik percabangan BP saat $b = 0.0025$. Melewati titik percabangan BP ini, kestabilan titik keseimbangan bebas penyakit berubah menjadi tidak stabil. Meskipun begitu, di titik BP ini, muncul cabang titik keseimbangan lainnya yang ditandai dengan grafik solid berwarna merah untuk b yang mengecil. Ketika b mengecil menjauhi titik BP , ditemukan cabang titik endemik yang tidak stabil yang ditandai dengan grafik solid merah bernilai positif. Ketidakstabilan ini tetap terus terjaga hingga menemui titik balik (*fold point*) FP di $b = 0.0024923$. Melewati titik FP ini, terjadi perubahan kestabilan titik endemik yang awalnya tidak stabil menjadi titik yang stabil seiring membesarnya nilai b . Namun, tidak lama setelah titik endemik ini stabil, kestabilannya menghilang di titik $b = 0.002497$ karena kemunculan titik Hopf yang pertama, yaitu $H1$. Melewati titik $H1$ ini, solusi periodik muncul. Keluarga



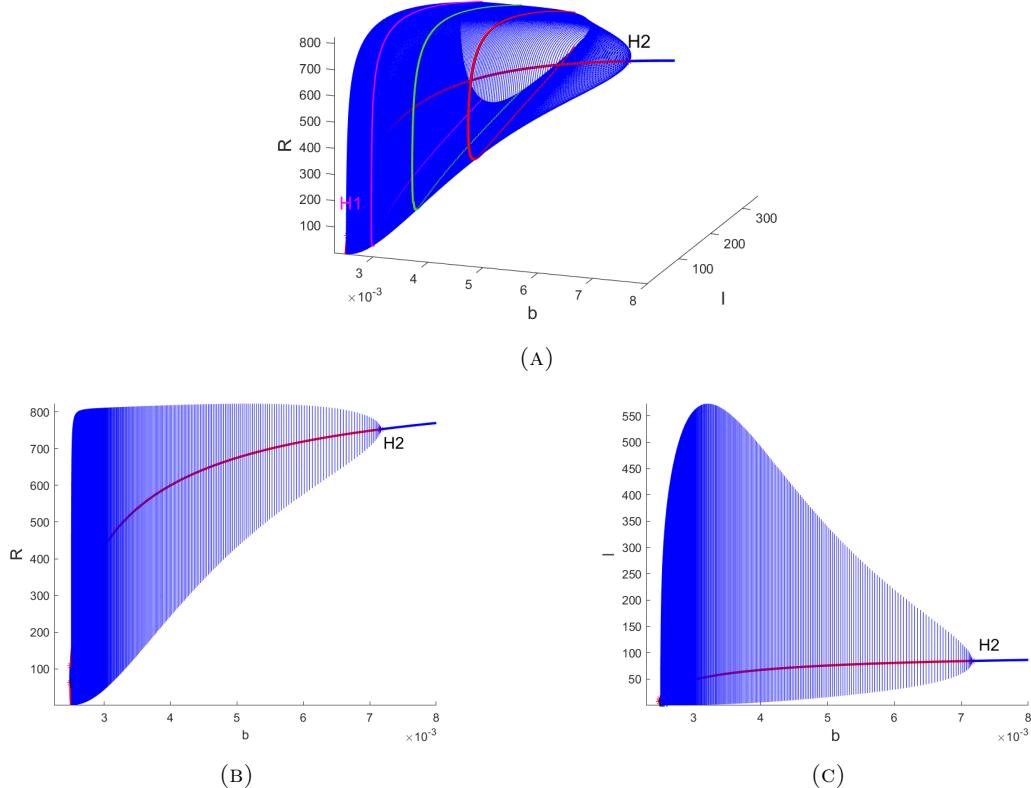
GAMBAR 3. Solusi *autonomous* untuk dua buah nilai b yang berbeda, yaitu $b = 0.0063$ (baris pertama) dan $b = 0.0013$ di baris kedua

solusi periodik ini dapat dilihat pada gambar 5a. Solusi periodik ini terus terjaga hingga ditemui titik Hopf kedua yaitu $H2$ di $b = 0.007163$. Karena munculnya dua titik Hopf ini, maka fenomena *endemic bubble* atau gelembung endemik muncul untuk $b \in (H1, H2)$. Bentuk gelembung endemiknya dapat dilihat di gambar 5b dan 5c. Ketika b melewati $H2$ dan terus membesar, maka titik endemik menjadi stabil dan terus terjaga untuk $b > H2$. Terlihat dengan jelas bahwa amplitudo solusi periodik meningkat secara drastis ketika b bergerak menjauhi titik $H1$, kemudian menurun perlahan seiring dengan meningkatnya b , hingga akhirnya amplitudo tersebut menghilang ketika mencapai titik $H2$.



GAMBAR 4. Diagram bifurkasi dengan b sebagai parameter bifurkasi. Nilai parameter yang digunakan diberikan pada Tabel 1, kecuali $\alpha = 0.005566427943$. Kurva merah dan biru masing-masing merepresentasikan titik ekuilibrium tidak stabil dan stabil

Beberapa solusi dari Model (2) untuk nilai b yang berbeda ditunjukkan pada Gambar 6. Nilai b yang pertama digunakan adalah 0.002. Karena $b = 0.002 < FP$, maka berdasarkan Gambar 4, hanya titik bebas penyakit yang muncul dan bersifat stabil. Solusinya ditunjukkan

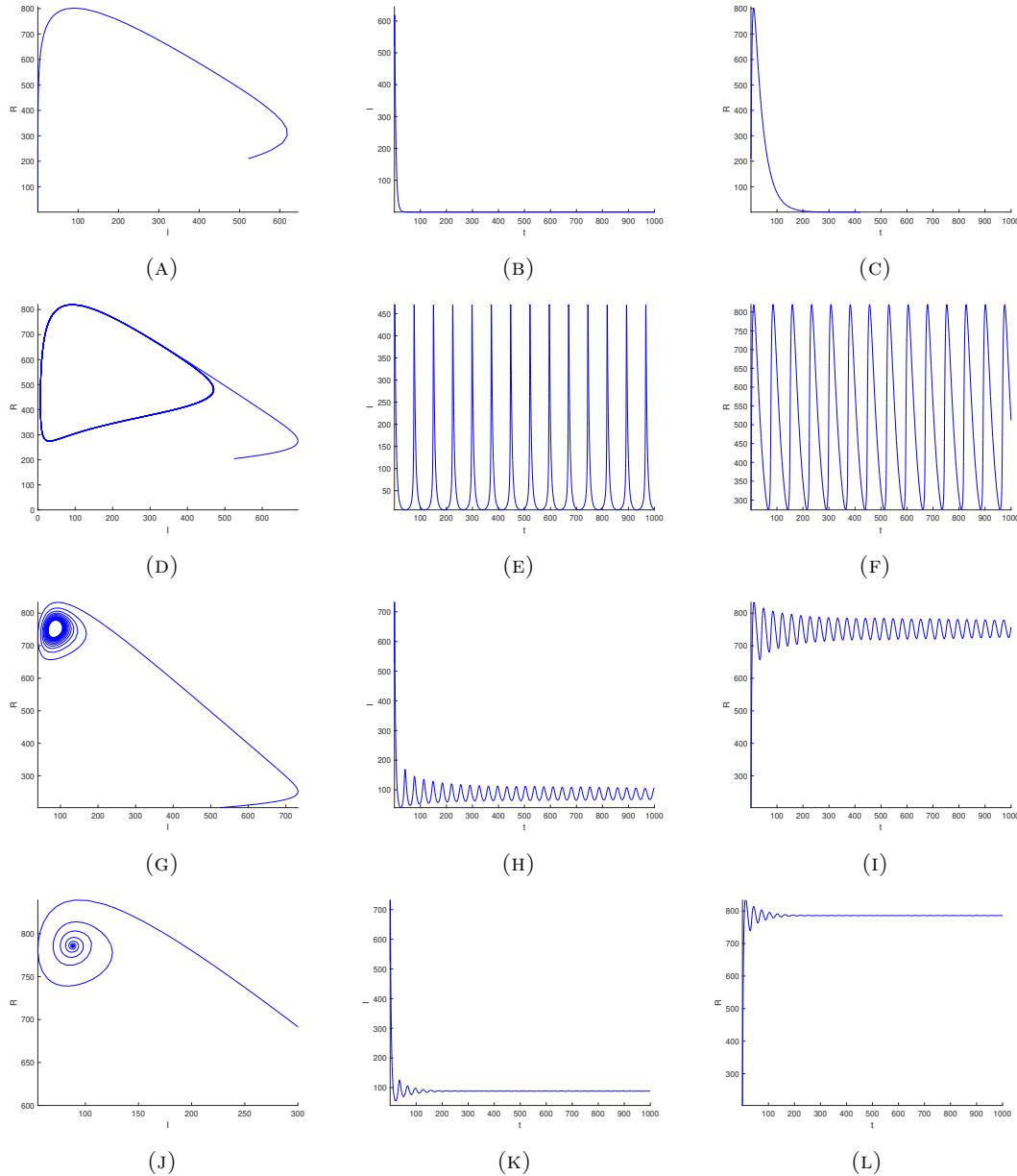


GAMBAR 5. Diagram bifurkasi dan keluarga solusi periodik yang diakibatkan karena kemunculan *endemic bubble* untuk nilai b di antara $H1$ dan $H2$

pada Gambar 6a-6c. Ketika b dipilih sedemikian sehingga memenuhi $b \in (H1, H2)$, maka solusi periodik akan muncul bergantung pada nilai awal yang diberikan (diakibatkan pada interval $b \in (H1, BP)$ terjadi fenomena stabilitas ganda, sedangkan untuk $b \in (BP, H2)$ hanya titik endemik yang stabil). Gambar 6d-6f menunjukkan bahwa titik endemik Model (2) bersifat stabil periodik menuju *limit cycle* yang stabil untuk $b = 0.0041$. Ketika b yang dipilih lebih besar lagi namun masih berada di antara $H1$ dan $H2$, maka titik endemik Model 2 masih bersifat stabil periodik, namun ukuran *limit cycle* nya menjadi lebih kecil. Hal ini dapat dilihat pada Gambar 6g-6i. Simulasi terakhir ditunjukkan ketika $b > H2$, yaitu ketika $b = 0.009$ seperti yang diberikan pada Gambar 6j-6l. Terlihat bahwa titik endemik Model (2) menjadi stabil asimtotik, sehingga solusi menuju titik endemik yang stabil.

4. SIMPULAN

Studi lebih lanjut terhadap model yang dirilis oleh penulis pada [15] dibahas pada artikel ini, khususnya terkait kemunculan fenomena solusi periodik dan fenomena gelembung endemik (*endemic bubble*). Pada artikel [15], para penulis membuat model matematika penyebaran demam berdarah dengan mempertimbangkan ketidakpedulian masyarakat terhadap penyebaran penyakit yang makin meluas. Hal tersebut diakomodir dengan bentuk fungsi infeksi yang non-standar, diwakili dengan parameter α . Mereka mengasumsikan bahwa semakin besar nilai α , semakin tidak peduli masyarakat terhadap penyebaran DBD. Kemunculan fenomena bifurkasi maju dan mundur ditunjukkan secara analitik dalam artikel tersebut. Estimasi parameter



GAMBAR 6. Beberapa solusi *autonomous* sistem (2) untuk beberapa nilai b yang berbeda. Semua parameter yang digunakan sama dengan yang digunakan pada Gambar 5 kecuali b yang bervariasi yaitu $b = 0.0.002$ pada baris pertama, $b = 0.0041$ pada baris kedua, $b = 0.007163$ pada baris ketiga, dan $b = 0.009$ pada baris keempat

menggunakan data insiden demam berdarah di Jakarta juga dilakukan untuk mendukung kajian numerik mereka.

Pada artikel ini, kami melanjutkan analisis terhadap model yang dirilis pada [15], khususnya terhadap kemungkinan munculnya fenomena solusi periodik yang diakibatkan oleh munculnya bifurkasi Hopf. Kajian analitik dan numerik dilakukan dengan nilai parameter yang sama seperti di artikel rujukan, namun menggunakan variasi nilai α sebagai indikator perubahan dinamik yang terjadi. Secara analitik kami berhasil menunjukkan syarat kemunculan bifurkasi

Hopf. Simulasi numerik yang kami lakukan menunjukkan munculnya fenomena gelembung endemik (*endemic bubble*) yang ditandai dengan munculnya dua buah titik Hopf pada satu percabangan titik keseimbangan yang sama. Kami berhasil menunjukkan syarat tertentu terkait nilai α sedemikian sehingga solusi periodik dapat muncul dari sistem yang dibahas.

Hasil kajian menunjukkan bahwa tingkat ketidakpedulian masyarakat terhadap bahaya endemik DBD, yang dimodelkan oleh parameter α , memainkan peran krusial dalam dinamika penyebaran penyakit. Semakin besar nilai α , semakin tinggi tingkat ketidakpedulian masyarakat, yang dalam model ini dapat memicu munculnya perilaku dinamik yang kompleks berupa siklus endemik berulang (solusi periodik). Fenomena "gelembung endemik" yang dihasilkan menunjukkan bahwa terdapat rentang nilai α tertentu di mana wabah DBD dapat muncul dan menghilang secara periodik, meskipun parameter lainnya tetap. Dengan demikian, pengurangan ketidakpedulian masyarakat—misalnya melalui edukasi atau kampanye kesadaran—berpotensi menstabilkan dinamika penyebaran dan mencegah terjadinya lonjakan kasus berulang.

Ucapan Terima kasih

Penelitian ini dibiayai melalui pendanaan hibah Riset Fundamental dari Kementerian Riset dan Teknologi dengan nomer hibah NKB-894/UN2.RST/HKP.05.00/2024.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Martcheva M., 2015, *An Introduction to Mathematical Epidemiology*, Edisi ke-1, Springer, New York
- [2] Megawati, E. L., & Aldila, D., 2023, A STABILITY AND OPTIMAL CONTROL ANALYSIS ON A DENGUE TRANSMISSION MODEL WITH MOSQUITO REPELLENT, *Communications in Mathematical Biology and Neuroscience*, Vol. **2023(2023)**: 98
- [3] Aldila, D., Ndii, M. Z., Anggriani, N., Windarto, Tasman, H., & Handari, B. D., 2023, Impact of social awareness, case detection, and hospital capacity on dengue eradication in Jakarta: A mathematical model approach, *Alexandria Engineering Journal*, Vol. **64**: 691 – 707
- [4] Handari, B. D., Amalia, A., Shinta Rahmayani, A., & Aldila, D., 2020, Numerical simulation of malaria transmission model considering secondary infection, *Communications in Mathematical Biology and Neuroscience*, Vol. **2020(2020)**: 1 – 24
- [5] Handari, B. D., Ramadhani, R. A., Chukwu, C. W., Khoshnaw, S. H. A., & Aldila, D., 2022, An Optimal Control Model to Understand the Potential Impact of the New Vaccine and Transmission-Blocking Drugs for Malaria: A Case Study in Papua and West Papua, Indonesia. *Vaccines*, Vol. **10(8)**: 1174
- [6] Simorangkir, G., Aldila, D., Rizka, A., Tasman, H., & Nugraha, E. S., 2021, Mathematical model of tuberculosis considering observed treatment and vaccination interventions, *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, Vol. **24(6)**: 1717 –1737
- [7] Aldila, D., Chávez, J. P., Wijaya, K. P., Ganegoda, N. C., Simorangkir, G. M., Tasman, H., & Soewono, E., 2023, A tuberculosis epidemic model as a proxy for the assessment of the novel M72/AS01E vaccine. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. **120**: 107162
- [8] Aldila, D., 2020, Analyzing the impact of the media campaign and rapid testing for COVID-19 as an optimal control problem in East Java, Indonesia, *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. **141**: 110364
- [9] Aldila, D., Samiadji, B. M., Simorangkir, G. M., Khosnaw, S. H. A., & Shahzad, M., 2021, Impact of early detection and vaccination strategy in COVID-19 eradication program in Jakarta, Indonesia, *BMC Research Notes*, Vol. **14(1)**: 132
- [10] Balya, M. A., Dewi, B. O., Lestari, F. I., Ratu, G., Rosuliyana, H., Windyhani, T., Fadhlia, Z. R., Samiadji, B. M., Aldila, D., Khoshnaw, S. H. A., & Shahzad, M., 2021, Investigating the impact of social awareness and rapid test on a covid-19 transmission model, *Communication in Biomathematical Sciences*, Vol. **4(1)**: 46 – 64
- [11] Aldila, D., Handari, B. D., Widyah, A., & Hartanti, G., 2020, Strategies of optimal control for hiv spreads prevention with health campaign, *Communications in Mathematical Biology and Neuroscience*, Vol. **2020(2020)**: 7
- [12] Aldila, D., Awdinda, N., Fatmawati, Herdicho, F. F., Ndii, M. Z., & Chukwu, C. W., 2023, Optimal control of pneumonia transmission model with seasonal factor: Learning from Jakarta incidence data, *Heliyon*, Vol. **9(7)**: e18096
- [13] Chukwu, C. W., Chazuka, Z., Safdar, S., Febriana, I. H., & Aldila, D., 2024, Assessing Syphilis transmission among MSM population incorporating low and high-risk infection: a modeling study, *Computational and Applied Mathematics*, Vol. **43(4)**: 205
- [14] Hassan, A. H., Aldila, D., & Noor Aziz, M. H., 2024, Optimal control and stability analysis of monkeypox transmission dynamics with the impact of contaminated surfaces. *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*, Vol. **10**: 1372579

- [15] Aldila, D., Aulia Puspadi, C., & Rusin, R., 2023, Mathematical analysis of the impact of community ignorance on the population dynamics of dengue, *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*, Vol. **9**: 1094971

