Partisi Dengan Penjumlah Bilangan Asli Berurutan Berselisih 2

FAHREEZAN SHERAZ DIYALDIN, WILLIAM KOSASIH, SALSABILLA NIRMALASARI,
AGUNG ALDHI PRASTYA, DAN UHA ISNAINI

Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada
Sekip Utara Bulaksumur Yogyakarta 55281

Email: fahreezansheraz@mail.ugm.ac.id

Abstrak

Partisi dari bilangan bulat positif n didefinisikan sebagai barisan bilangan bulat positif tak naik yang jumlahnya sama dengan n . Salah satu topik yang menjadi perhatian dalam kajian partisi bilangan bulat adalah partisi dengan penjumlahan bilangan asli berurutan. Penelitian ini menyajikan formula untuk menghitung jumlah partisi dari n yang terdiri atas penjumlahan bilangan asli berurutan dengan syarat banyaknya penjumlahan tersebut adalah ganjil atau genap. Selain itu, penelitian ini mengembangkan hasil tersebut dengan memperluas batasan pada syarat penjumlahan. Hasil utama menunjukkan bahwa jumlah partisi dari n dengan syarat penjumlahan ganjil (genap) dan berselisih 2 sama dengan jumlah faktor ganjil (genap) dari n yang tidak melebihi $\sqrt{n}$.

Kata kunci: Partisi bilangan bulat, Keterbagian, Barisan aritmatika, Fungsi bijektif.

Abstract

The partition of a positive integer n is defined as a sequence of non-increasing positive integers whose sum equals n . One of the topics of interest in the study of integer partitions is the partition consisting of the summation of consecutive natural numbers. This study presents a formula for calculating the number of partitions of n that consist of the summation of consecutive natural numbers, with the condition that the number of terms in the summation is either odd or even. Furthermore, this research extends the results by relaxing the constraints on the summation conditions. The main result shows that the number of partitions of n with the condition of odd (even) summations and a difference of 2 is equal to the number of odd (even) factors of n that do not exceed $\sqrt{n}$.

Keywords: Integer partitions, Divisibility, Arithmetic sequence, Bijective function.

1. PENDAHULUAN

Partisi dari bilangan bulat positif n adalah cara menyatakan n sebagai jumlah dari bilangan asli tanpa memperhatikan urutan penjumlahannya. Untuk memperjelas pengertian ini, diberikan definisi berikut.

2000 Mathematics Subject Classification: 05A17, 11P81, 11B75.

Received: 20-01-2025, accepted: 17-05-2025.

Definisi 1.1. Diberikan bilangan bulat positif n . Bentuk

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k$$

dengan $k \in \mathbb{N}$ dan $p_i \in \mathbb{N}$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$ serta memenuhi $p_i \geq p_{i+1}$, disebut **partisi dari n** jika

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k = n.$$

Setiap bilangan p_i disebut **penjumlah** dari partisi tersebut.

Selanjutnya, didefinisikan $p(n)$ sebagai banyaknya partisi dari n . Sebagai contoh, semua partisi dari 4 adalah 4, 3 + 1, 2 + 2, 2 + 1 + 1, dan 1 + 1 + 1 + 1, sehingga diperoleh $p(4) = 5$.

Partisi dari suatu bilangan n juga dapat diberikan dengan syarat atau kondisi tertentu. Notasi $p(n \mid \text{kondisi})$ digunakan untuk menyatakan banyaknya partisi dari n yang memenuhi kondisi tersebut. Sebagai contoh, semua partisi dari 4 yang memuat penjumlah 1 adalah 3 + 1, 2 + 1 + 1, dan 1 + 1 + 1 + 1, sehingga diperoleh

$$p(4 \mid \text{memuat penjumlah 1}) = 3.$$

Pada tahun 1912, Mason [10] meneliti partisi bilangan bulat dengan penjumlah berupa bilangan asli yang berurutan. Penelitian ini menjadi topik menarik dalam teori bilangan karena mengungkap hubungan antara teori partisi klasik dengan struktur kombinatorial yang lebih spesifik. Seiring waktu, studi mengenai partisi dengan penjumlah berurutan terus berkembang, baik melalui modifikasi kondisi penjumlah maupun penambahan syarat-syarat tertentu.

Salah satu arah pengembangan dilakukan dengan memodifikasi selisih antara dua penjumlah yang berurutan. Bouroubi dan Tani [2] pada tahun 2009 memperluas hasil Mason dengan mengkaji partisi bilangan bulat yang memiliki struktur barisan aritmetika. Selanjutnya, Lee [8] pada tahun 2019 menyelidiki partisi dengan penjumlah berurutan yang memiliki selisih genap. Caballero [3] mengkaji karakterisasi sisi miring segitiga Pythagoras primitif dengan menggunakan partisi bilangan ke dalam jumlah bilangan berurutan. Caballero [4] meneliti himpunan bilangan bulat yang tidak dapat dipartisi menjadi jumlah dari sejumlah genap bilangan asli yang berurutan. Di sisi lain, pengembangan juga dilakukan dengan menambahkan syarat paritas terhadap banyaknya penjumlah dalam suatu partisi. Contohnya, Hirschhorn dan Hirschhorn [5] pada tahun 2005 serta Caballero [4] pada tahun 2019 meneliti pengaruh paritas terhadap bentuk partisi tersebut.

Penelitian dalam *paper* ini terinspirasi dari dua arah pengembangan tersebut. Berdasarkan identitas yang diberikan oleh Hirschhorn, dilakukan modifikasi ide pembuktian untuk memperoleh identitas baru terkait partisi dengan penjumlah berurutan, di mana selisih antar dua suku berurutan dimodifikasi menjadi konstan bernilai 2. Identitas ini tidak hanya memperluas hasil-hasil terdahulu, tetapi juga menawarkan pendekatan kombinatorial yang menarik. Temuan ini membuka peluang untuk membangun hubungan baru antara partisi bilangan bulat dan struktur kombinatorial dengan batasan tambahan, serta memperkaya teori partisi klasik.

Secara khusus, penelitian ini menyajikan bukti kombinatorial untuk identitas partisi yang melibatkan penjumlah berurutan dengan penekanan pada paritas jumlah penjumlah. Selain itu, pengembangan lebih lanjut dilakukan dengan menetapkan selisih tetap sebesar 2 antara dua penjumlah yang berurutan.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan dan melengkapi hasil studi yang telah dilakukan oleh M. D. Hirschhorn dan P. M. Hirschhorn dalam artikel berjudul *Partitions into Consecutive Parts* [5]. Dalam artikel tersebut, penulis membahas partisi bilangan bulat dengan penjumlah berupa bilangan asli yang berurutan. Adapun fokus utama dari penelitian ini adalah pada penguatan aspek pembuktian serta pengembangan konsep partisi tersebut dengan menambahkan batasan baru, yakni selisih antar penjumlah yang ditetapkan bernilai 2.

Langkah awal dalam penelitian ini diawali dengan kajian literatur secara mendalam mengenai konsep dasar partisi bilangan bulat. Kajian ini mencakup pemahaman terhadap fungsi

partisi, identitas-identitas klasik dalam teori partisi, serta teknik pembuktian bijektif yang digunakan untuk membuktikan identitas-identitas tersebut. Pemahaman menyeluruh terhadap konsep-konsep ini menjadi fondasi utama dalam mengembangkan generalisasi yang lebih luas.

Selanjutnya, dilakukan eksplorasi terhadap partisi dengan penjumlahan yang membentuk barisan aritmetika. Dalam tahap ini, analisis difokuskan pada keterkaitan antara struktur aritmetika dan sifat-sifat keterbagian bilangan bulat. Kajian ini memberikan arahan dalam menyusun batasan tambahan yang relevan pada partisi bilangan, serta memungkinkan terbentuknya kerangka yang konsisten untuk pengembangan selanjutnya.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Partisi Dengan Penjumlahan Bilangan Asli Berurutan. Salah satu bentuk partisi yang menarik untuk dipelajari adalah partisi di mana penjumlahan bilangan-bilangan asli berurutan menghasilkan bilangan tertentu. Untuk memudahkan analisis, penjumlahan bilangan-bilangan asli berurutan selalu dimulai dari bilangan terkecil. Sebagai contoh, semua partisi dari 15 dengan penjumlahan bilangan asli berurutan diberikan sebagai berikut:

$$15, \quad 7 + 8, \quad 4 + 5 + 6, \quad \text{dan} \quad 1 + 2 + 3 + 4 + 5.$$

Selanjutnya diberikan teorema utama yang menjadi inti dari pembahasan, yaitu mengenai korespondensi antara partisi bilangan bulat menjadi bilangan asli berurutan dan faktor-faktor ganjil dari bilangan tersebut. Teorema ini sebelumnya telah dikemukakan oleh Hirschhorn dan Hirschhorn [5]. Namun, dalam penelitian ini, diberikan pembuktian yang lebih terstruktur dan rinci untuk mendukung klaim tersebut.

Teorema 3.1 (Hirschhorn dan Hirschhorn [5]). *Untuk setiap bilangan asli n , berlaku:*

- (1) *Banyaknya partisi dari n sebagai penjumlahan dari jumlah ganjil bilangan asli berurutan sama dengan banyaknya faktor ganjil dari n yang kurang dari $\sqrt{2n}$.*
- (2) *Banyaknya partisi dari n sebagai penjumlahan dari jumlah genap bilangan asli berurutan sama dengan banyaknya faktor ganjil dari n yang lebih dari $\sqrt{2n}$.*

BUKTI TEOREMA 3.1. (1) Misalkan A adalah himpunan partisi dari n yang terdiri atas jumlah ganjil bilangan asli berurutan, dan B adalah himpunan faktor ganjil dari n yang kurang dari $\sqrt{2n}$. Untuk setiap partisi dari n dalam bentuk

$$(a - k) + (a - k + 1) + \cdots + (a + k),$$

jumlah penjumlahannya adalah $2k + 1$ (ganjil), dan syarat agar partisi valid adalah $a - k \geq 1$. Jumlah total dari barisan tersebut adalah

$$(2k + 1)a = n.$$

Dengan demikian, $2k + 1$ adalah pembagi ganjil dari n , dan kita definisikan fungsi

$$f : A \rightarrow B, \quad f[(a - k) + \cdots + (a + k)] = 2k + 1.$$

Perlu ditunjukkan bahwa $2k + 1 < \sqrt{2n}$:

$$\begin{aligned} a - k \geq 1 &\Rightarrow 2a - (2k + 1) > 0 \Rightarrow 2k + 1 < 2a, \\ &\Rightarrow 2k + 1 < \frac{2n}{2k + 1} \Rightarrow (2k + 1)^2 < 2n \Rightarrow 2k + 1 < \sqrt{2n}. \end{aligned}$$

Maka $2k + 1 \in B$ dan fungsi f terdefinisi dengan baik. Fungsi f bersifat injektif karena nilai k unik untuk setiap panjang partisi.

Untuk menunjukkan bahwa f juga surjektif, ambil sebarang $2p + 1 \in B$. Karena $2p + 1$ adalah faktor ganjil dari n , maka terdapat $a \in \mathbb{N}$ sehingga $n = (2p + 1)a$. Selanjutnya, karena $2p + 1 < \sqrt{2n}$, diperoleh $a - p \geq 1$, sehingga partisi

$$(a - p) + (a - p + 1) + \cdots + (a + p)$$

valid dan anggota dari A . Oleh karena itu, f adalah bijeksi, sehingga $|A| = |B|$ dan klaim pertama terbukti.

BUKTI TEOREMA 3.1. (2). Misalkan C adalah himpunan partisi dari n yang terdiri atas jumlah genap bilangan asli berurutan, dan D adalah himpunan faktor ganjil dari n yang lebih dari $\sqrt{2n}$. Bentuk umum partisi dalam C adalah:

$$(a + 1 - k) + (a + 2 - k) + \cdots + (a + k),$$

yang merupakan $2k$ bilangan berurutan dengan nilai tengah $a + \frac{1}{2}$, sehingga jumlah totalnya adalah:

$$k(2a + 1) = n.$$

Maka, kita definisikan fungsi

$$g : C \rightarrow D, \quad g[(a + 1 - k) + \cdots + (a + k)] = 2a + 1.$$

Kita periksa bahwa $2a + 1 > \sqrt{2n}$:

$$\begin{aligned} a + 1 - k \geq 1 &\Rightarrow (2a + 1) - 2k > 0 \Rightarrow 2k < 2a + 1, \\ &\Rightarrow 2a + 1 > \frac{2n}{2a + 1} \Rightarrow (2a + 1)^2 > 2n \Rightarrow 2a + 1 > \sqrt{2n}. \end{aligned}$$

Sehingga $2a + 1 \in D$ dan g terdefinisi dengan baik. Fungsi g juga injektif karena nilai a dan k ditentukan secara unik oleh panjang partisi.

Untuk surjektivitas, ambil sebarang $2q + 1 \in D$. Karena $2q + 1$ adalah faktor ganjil dari n , maka terdapat $b \in \mathbb{N}$ sehingga $n = b(2q + 1)$. Dengan memilih $k = q$ dan $a = q$, maka diperoleh partisi:

$$(b - q + 1) + \cdots + (b + q),$$

yang merupakan elemen dari C . Oleh karena itu, g adalah bijeksi, sehingga $|C| = |D|$ dan klaim kedua terbukti. $\square$

Diberikan beberapa contoh sebagai berikut.

Contoh 3.2. (1) Misalkan $n = 15$. Hitung terlebih dahulu $\sqrt{2n} = \sqrt{30} \approx 5.477$. Maka, faktor ganjil dari 15 yang kurang dari $\sqrt{2n}$ adalah 1, 3, 5. Berdasarkan bukti pada Teorema 3.1 (1), setiap faktor ganjil d dari n yang memenuhi $d < \sqrt{2n}$ berkorespondensi dengan partisi dari n sebagai penjumlahan sebanyak d bilangan asli berurutan (ganjil banyaknya).

- Untuk $d = 1$, diperoleh $2k + 1 = 1 \Rightarrow k = 0$, sehingga

$$a = \frac{n}{2k + 1} = \frac{15}{1} = 15.$$

Maka partisinya terdiri dari satu bilangan, yaitu 15.

- Untuk $d = 3$, diperoleh $2k + 1 = 3 \Rightarrow k = 1$, sehingga

$$a = \frac{n}{2k + 1} = \frac{15}{3} = 5.$$

Maka partisinya adalah $4 + 5 + 6$.

- Untuk $d = 5$, diperoleh $2k + 1 = 5 \Rightarrow k = 2$, sehingga

$$a = \frac{n}{2k + 1} = \frac{15}{5} = 3.$$

Maka partisinya adalah $1 + 2 + 3 + 4 + 5$.

Sekarang perhatikan faktor ganjil dari 15 yang lebih dari $\sqrt{2n}$, yaitu 15. Berdasarkan Teorema 3.1 (2), faktor ini berkorespondensi dengan partisi dari n menjadi jumlah genap bilangan asli berurutan. Diketahui:

$$2a + 1 = 15 \Rightarrow a = 7, \quad \text{dan} \quad k = \frac{n}{2a + 1} = \frac{15}{15} = 1.$$

Maka partisinya terdiri dari $2k = 2$ bilangan, yaitu:

$$(a - k + 1) + (a + k) = 7 + 8.$$

- (2) Misalkan $n = 90$. Hitung $\sqrt{2n} = \sqrt{180} \approx 13.416$. Maka, faktor ganjil dari 90 yang kurang dari $\sqrt{2n}$ adalah 1, 3, 5, 9, dan 15. Faktor ganjil yang **lebih dari** $\sqrt{2n}$ adalah 45. Berikut tabel yang menunjukkan partisi berurutan yang berkorespondensi dengan masing-masing faktor, menggunakan metode yang sama seperti pada bagian (1).

TABEL 1. Faktor ganjil dari 90 dan partisi dengan penjumlah berurutan yang berkorespondensi

Faktor Ganjil dari 90	Partisi Berurutan yang Berkorespondensi
1	90
3	29 + 30 + 31
5	16 + 17 + 18 + 19 + 20
9	6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14
15	2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13
45	21 + 22 + 23 + 24

Setiap partisi pada tabel di atas diperoleh dari ekspresi $n = d \cdot a$ untuk faktor ganjil d , dengan konstruksi:

- Jika $d = 2k + 1 < \sqrt{2n}$, maka partisi terdiri dari $(2k + 1)$ bilangan berurutan yang disusun simetris di sekitar a .
- Jika $d = 2a + 1 > \sqrt{2n}$, maka partisi terdiri dari $2k$ bilangan berurutan dengan rata-rata $a + \frac{1}{2}$.

3.2. Partisi Dengan Penjumlah Bilangan Asli Berurutan Berselisih 2. Pada bagian ini, kita membahas partisi dari bilangan n yang terdiri dari penjumlahan bilangan asli berurutan dengan selisih 2. Sebagai ilustrasi, semua partisi dari $n = 54$ adalah sebagai berikut:

$$54, \quad 26 + 28, \quad 16 + 18 + 20, \quad \text{dan} \quad 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14.$$

Selanjutnya, kita menyatakan teorema mengenai hubungan antara partisi bilangan dengan selisih 2 dan faktor n .

Teorema 3.3. Diberikan $n \in \mathbb{N}$, maka:

- (1) Banyaknya partisi dari n yang terdiri dari sebanyak ganjil bilangan asli berurutan dengan selisih 2 sama dengan banyaknya faktor ganjil dari n yang tidak lebih dari $\sqrt{n}$.
- (2) Banyaknya partisi dari n yang terdiri dari sebanyak genap bilangan asli berurutan dengan selisih 2 sama dengan banyaknya faktor genap dari n yang tidak lebih dari $\sqrt{n}$.

BUKTI TEOREMA 3.3. (1) Misalkan A adalah himpunan semua partisi n dengan jumlah ganjil bilangan asli berurutan berselisih 2, dan B adalah himpunan faktor ganjil dari n yang tidak lebih dari $\sqrt{n}$. Kita mendefinisikan fungsi $f : A \rightarrow B$ sebagai berikut:

$$f[(a - 2k) + (a - 2k + 2) + \dots + (a + 2k)] = 2k + 1.$$

Langkah 1: Menunjukkan bahwa f adalah fungsi.

Setiap elemen A dapat ditulis dalam bentuk

$$(a - 2k) + (a - 2k + 2) + \dots + a + \dots + (a + 2k),$$

dengan a bilangan asli, k bilangan bulat non-negatif, dan $a - 2k \geq 1$. Dengan demikian, jumlah partisi adalah

$$n = (2k + 1)a.$$

Karena n habis dibagi $2k + 1$, maka $2k + 1$ adalah faktor ganjil dari n . Selain itu, dari $a - 2k \geq 1$, diperoleh

$$a \geq 2k + 1 \implies n \geq (2k + 1)^2 \implies 2k + 1 \leq \sqrt{n}.$$

Jadi, $2k + 1 \in B$. Terbukti bahwa f terdefinisi dengan baik.

Langkah 2: Menunjukkan bahwa f bijektif.

- **Surjektivitas:** Untuk setiap $2p+1 \in B$, terdapat b sedemikian sehingga $n = (2p+1)b$. Dengan $b \geq 2p+1$, diperoleh partisi

$$(b-2p) + (b-2p+2) + \cdots + b + \cdots + (b+2p).$$

- **Injektivitas:** Jika $f(x_1) = f(x_2)$, maka

$$x_1 = (c-2l) + \cdots + (c+2l), \quad x_2 = (d-2r) + \cdots + (d+2r).$$

Dari $f(x_1) = f(x_2)$, diperoleh $2l+1 = 2r+1 \implies l = r$. Karena $n = (2l+1)c = (2r+1)d$, maka $c = d$, sehingga $x_1 = x_2$.

Karena f injektif dan surjektif, maka f bijektif. Dengan demikian, $|A| = |B|$.

BUKTI TEOREMA 3.3. (2) Proses pembuktian untuk bagian (2) serupa dengan bagian (1), dengan C sebagai himpunan partisi n dengan jumlah genap bilangan asli berurutan berselisih 2, dan D sebagai himpunan faktor genap dari n yang tidak lebih dari $\sqrt{n}$. Fungsi $f : C \rightarrow D$ didefinisikan sebagai

$$f[(a-2k+2) + (a-2k+4) + \cdots + (a+2k)] = 2k.$$

Proses pembuktian f well-defined dan onjektif mengikuti langkah serupa dengan bagian (1). Adapun pembuktian bahwa f surjektif dilakukan dengan mengambil $a = \frac{n}{2k} - 1$ untuk setiap $2k \in D$. Dengan demikian, terbukti bahwa $|C| = |D|$. $\square$

Untuk memperjelas penggunaan Teorema 3.3, diberikan kedua contoh berikut.

Contoh 3.4. Untuk $n = 354$, faktor ganjil dari n yang tak lebih dari $\sqrt{n}$ adalah 1 dan 3. Akan ditunjukkan cara mengonstruksi partisi dengan penjumlahan berurutan berselisih 2 yang berkorespondensi dengan masing-masing faktor berdasarkan bukti **Teorema 3.3 (1)**. Untuk faktor 1, diperoleh $2k+1 = 1 \iff k = 0$ dan $a = \frac{n}{2k+1} = 354$. Didapat partisi

$$(a-2k) + (a-2k+2) + \cdots + (a+2k) = 354.$$

Untuk faktor 3, diperoleh $2k+1 = 3 \iff k = 1$ dan $a = \frac{n}{2k+1} = 118$, sehingga didapat partisi

$$(a-2k) + (a-2k+2) + \cdots + (a+2k) = 116 + 118 + 120.$$

Selanjutnya, faktor genap dari n yang tak lebih dari $\sqrt{n}$ adalah 2 dan 6. Berikut diberikan cara mengonstruksi partisi dengan penjumlahan berurutan berselisih 2 yang berkorespondensi dengan masing-masing faktor berdasarkan bukti **Teorema 3.3 (2)**. Untuk faktor 2, diperoleh $2k = 2 \iff k = 1$ dan $a = \frac{n}{2k} - 1 = 176$. Didapat partisi

$$(a-2k+2) + (a-2k+4) \cdots + (a+2k) = 176 + 178.$$

Untuk faktor 6, diperoleh $2k = 6 \iff k = 3$ dan $a = \frac{n}{2k} - 1 = 58$, sehingga didapat partisi

$$(a-2k+2) + (a-2k+4) + \cdots + (a+2k) = 54 + 56 + 58 + 60 + 62 + 64.$$

Contoh 3.5. Untuk $n = 950$:

- (1) Partisi ganjil: $950, 186 + 188 + 190 + 192 + 194, \dots$ Faktor ganjil 1, 5, 19, 25.
- (2) Partisi genap: $474 + 476, 86 + 88 + \cdots + 104$. Faktor genap 2, 10.

4. SIMPULAN

Penelitian ini mengkaji hubungan antara teori partisi dan teori bilangan. Untuk bilangan asli n , ditunjukkan bahwa jumlah partisi n dengan ganjil (genap) penjumlahan bilangan asli berurutan sama dengan jumlah faktor ganjil (genap) n yang kurang (lebih) dari $\sqrt{2n}$. Pengembangan dilakukan dengan memperluas syarat penjumlahan menjadi selisih 2, menghasilkan bahwa jumlah partisi n dengan ganjil (genap) penjumlahan berurutan berselisih 2 sama dengan jumlah faktor ganjil (genap) n yang tidak lebih dari $\sqrt{n}$. Pembuktian menggunakan pendekatan kombinatorial melalui fungsi bijektif.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Andrews, G.E., and Eriksson, K. Integer partitions. Cambridge University Press, 2004.
- [2] Bouroubi, S., and Tani, N. B. "Integer partitions into arithmetic progressions." *Rostocker Mathematisches Kolloquium* 64: 11-16, 2009.
- [3] Caballero, J.M.R. "A Characterization of the Hypotenuses of Primitive Pythagorean Triangles Using Partitions into Consecutive Parts." *The American Mathematical Monthly* 126, no. 1: 74-77, 2019.
- [4] Caballero, J.M.R. "Integers Which Cannot Be Partitioned Into an Even Number of Consecutive Parts." *Integers: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory* 19, 2019.
- [5] Hirschhorn, M. D., and P. M. Hirschhorn. "Partitions into consecutive parts." *Mathematics Magazine* 78, no. 5: 396-396, 2005.
- [6] Ho, C., He, T.-X., and Shiue, P. J.-S. "Representations of positive integers as sum of arithmetic progressions, I." *Notes Number Theory and Discrete Mathematics* 29, no. 2:241-259, 2023.
- [7] Ho, C., He, T.-X., and Shiue, P. J.-S. "Representations of positive integers as sum of arithmetic progressions, I." *Notes Number Theory and Discrete Mathematics* 29, no. 2:260-275, 2023.
- [8] Lee, S. "The sum of some string of consecutive with a difference of $2k$." *Journal of Applied Mathematics & Informatics* 37, no. 3(4): 177-182, 2019.
- [9] Leveque, W. "On representations as a sum of consecutive integers." *Canadian Journal of Mathematics* 2: 399-405, 1950.
- [10] Mason, T. E. "On the Representation of an Integer as the Sum of Consecutive Integers." *The American Mathematical Monthly* 19, no. 3: 46-50, 1912.
- [11] Munagi, A. O., and Shonhiwa, T. "On the partition of a number into arithmetic progressions." *Journal of Integer Sequences* 11, 2008.
- [12] Munagi, A. O. "Combinatorics of integer partitions in arithmetic progression." *Integers* 10: 73-82, 2010.
- [13] Munagi, A. O., and de Vega, F. J. "An extension of Sylvester's theorem on arithmetic progressions." *Symmetry* 15, no 6, 2023.
- [14] Nyblom, M. A., and Evans, C. "On the enumeration of partitions with summands in arithmetic progression." *Australasian Journal of Combinatorics* 28: 149-159, 2003.
- [15] Sylvester, J. J., and Franklin, F. "A constructive theory of partitions, arranged in three acts, an interact and an exodion." *American Journal of Mathematics* 5, no. 1: 251-330, 1882.