Jurnal Matematika Integratif. p-ISSN:1412-6184, e-ISSN:2549-903
Vol. 21, No. 1 (2025), pp. 123–130. doi:10.24198/jmi.v21.n1.63667.123-130

# Distribusi Kuartil Berdasarkan Statistik Urutan dari Sampel Acak Berdistribusi Seragam Sederhana

Nar Herrhyanto, Fitriani Agustina, dan Fitri Rahmawati

**Program Studi Matematika, FPMIPA, Universitas Pendidikan Indonesia,**
**Jl. Dr. Setiabudhi No. 229 Bandung 40154**
**Email: herrhyanton@gmail.com**

**Abstrak**
Penelitian ini bertujuan untuk menentukan distribusi kuartil berdasarkan statistik urutan dari sampel acak berasal dari populasi berdistribusi seragam sederhana dengan menggunakan teknik transformasi peubah acak. Distribusi seragam sederhana ini mempunyai fungsi kepadatan peluang berupa konstanta sebesar 1 untuk nilai peubah acak bernilai antara 0 dan 1. Statistik urutan ini diperoleh berdasarkan sampel acak $X_1, X_2, X_3, X_4$. Dari statistik urutan ini bisa diperoleh kuartil. Teknik transformasi peubah acak ini melibatkan dua peubah acak, artinya dalam transformasi itu melibatkan dua peubah acak lama dan dua peubah acak baru. Dua peubah acak lamanya merupakan statistik urutan yang didefinisikan atas sampel acak, dua peubah acak baru berupa kuartil dan peubah acak lainnya. Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur. Hasil temuan yang diperoleh adalah distribusi dari kuartil kesatu berbentuk $h_1(q_1) = \frac{16}{3}\left[(1-q_1)^3 - (1-4q_1)^3\right]$, $0 \le q_1 < 0{,}25$; $h_1(q_1) = \frac{16}{3}(1-q_1)^3$, $0{,}25 < q_1 < 1$; dan $h_1(q_1) = 0$; untuk $q_1$ lainnya. Untuk distribusi dari kuartil kedua berbentuk $h_2(q_2) = \frac{1}{8}(3q_2^2 - q_2^3)$, $0 \le q_2 < 2$; $h_2(q_2) = \frac{3}{4}q_2^4 - \frac{75}{16}q_2^3 + \frac{126}{144}q_2^2 - 6$, $2 < q_2 < 4$; dan $h_2(q_2) = 0$; untuk $q_2$ lainnya. Untuk distribusi dari kuartil ketiga berbentuk $h_3(q_3) = \frac{16}{3}q_3^3$, $0 \le q_3 < 0{,}75$; $h_3(q_3) = -336q_3^3 + 768q_3^2 - 576q_3 + 144$, $0{,}75 < q < 1$; dan $h_3(q_3) = 0$; $q_3$ lainnya.
**Kata kunci**: Ditribusi Seragam, Kuartil, Sampel Acak, Statistik Urutan, Teknik Transformasi Peubah Acak.

---

*2000 Mathematics Subject Classification*: 62G30, 62E10, 62G05
Received: 24-05-2025, accepted: 11-06-2025.

**Abstract**
*This research aims to determine the quartile distribution of a random sample from a population with a simple uniform distribution using random variable transformation techniques. This simple uniform distribution has a probability density function in the form of a constant of 1 for random variable values between 0 and 1. This order statistic is obtained based on random sample* $X_1, X_2, X_3, X_4$. *From this order statistic, quartiles can be obtained. This random variable transformation technique involves two random variables, meaning that the transformation involves two old random variables and two new random variables. The two long random variables are order statistics defined over a random sample. The research method used is literature study. The findings obtained are that the distribution of the first quartile is in the form* $h_1(q_1) = \frac{16}{3}\left[(1-q_1)^3 - (1-4q_1)^3\right]$, $0 \le q_1 < 0{,}25$; $h_1(q_1) = \frac{16}{3}(1-q_1)^3$, $0{,}25 < q_1 < 1$; *and* $h_1(q_1) = 0$; *for other* $q_1$. *The distribution of the second quartile is in the form* $h_2(q_2) = \frac{1}{8}(3q_2^2 - q_2^3)$, $0 \le q_2 < 2$; $h_2(q_2) = \frac{3}{4}q_2^4 - \frac{75}{16}q_2^3 + \frac{126}{144}q_2^2 - 6$, $2 < q_2 < 4$; *and* $h_2(q_2) = 0$; *for other* $q_2$. *The distribution of the third quartile is in the form* $h_3(q_3) = \frac{16}{3}q_3^3$, $0 \le q_3 < 0{,}75$; $h_3(q_3) = -336q_3^3 + 768q_3^2 - 576q_3 + 144$, $0{,}75 < q < 1$; *and* $h_3(q_3) = 0$; *for other* $q_3$.

**Keywords:** *Uniform Distribution, Quartile, Random Sample, Order Statistics, Random Variable Transformation Technique*

## 1. Pendahuluan

Dalam statistika, kuartil merupakan salah satu ukuran yang termasuk ke dalam ukuran pemusatan dalam penganalisisan data. Kenyataan dalam kehidupan sehari-hari kuartil ini banyak dilakukan dalam penggunaannya, termasuk penelitian. Beberapa penelitian difokuskan terhadap penerapan nilai kuartil, dan tidak ada peneliti lain yang memfokuskan kepada nilai kuartil secara teoritis. Penelitian yang dilakukan oleh [1] bertujuan untuk memberikan informasi tentang studi morfometri udang Bintik Coklat yang tertangkap di perairan Muara Ilu, Kecamatan Anggana, Kabupaten Kutai Kartanegara. Kemudian penelitian lain [2] yang bertujuan untuk mengkaji hubungan antara pengetahuan tingkat kecukupan gizi dan perilaku pemberian makan ibu dengan kejadian *stunting* pada balita di wilayah Posyandu Kecamatan Medan Belawan, variabel pola asuh makan, sebanyak 40% (12 orang) ibu memiliki skor pola asuh pada kuartil 1, sebanyak 23,3% (7 orang) ibu memiliki skor pola asuh pada kuartil 3, sebanyak 20% (6 orang) ibu memiliki skor pola asuh pada kuartil 4, dan sisanya sebanyak 16,7% (5 orang) ibu memiliki skor pola asuh pada kuartil 2. Oleh karena itu pada paper ini dilakukan penelitian untuk nilai kuartil secara teoritis, yang diperoleh dari statistik urutan berdasarkan sampel acak yang berasal dari populasi berdistribusi seragam.

Misalkan $Y_1 < Y_2 < Y_3 < \cdots < Y_n$ adalah statistik urutan dari sampel acak berukuran $n$ $(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$ yang berasal dari populasi berdistribusi dengan fungsi kepadatan bentuk tertentu. Kemudian dari sampel acak tersebut dihitung kuartil ke-$i$ ($Q_i$) yang bentuknya berupa statistik urutan. Jika nilai $i$ dan $n$ diketahui, maka bisa diketahui bentuk rumus kuartil ke-$i$. Dalam penelitian ini nilai $i$ dan $n$ dibatasi, yaitu $i = 1$ dan $n = 4$ dan distribusi dari populasinya diketahui seragam pada nilai $\alpha = 0$ dan $\beta = 1$, maka akan ditentukan distribusi dari kuartil kesatu ($Q_1$), kuartil kedua ($Q_2$), dan kuartil ketiga ($Q_3$) dengan menggunakan teknik transformasi peubah acak. Tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah menganalisis distribusi kuartil berdasarkan statistik urutan yang berasal dari sampel acak berdistribusi seragam. Metode penelitian yang digunakan adalah metode studi literatur atau studi kepustakaan.

## 2. Metode Penelitian

Penelitian ini membahas tentang penentuan distribusi kuartil dari sampel acak berukuran tertentu yang berdistribusi seragam sederhana, dan ini merupakan pembahasan materi secara teoritis dalam statistika sehingga metode penelitiannya adalah metode studi literatur atau studi kepustakaan [3]. Pada penelitian ini dibutuhkan fungsi kepadatan peluang distribusi seragam sederhana, kuartil, sampel acak, statistik urutan termasuk fungsi kepadatan peluang gabungan dari peubah acak $Y_i$ dan $Y_j$, dan teknik transformasi peubah acak.

2.1. **Distribusi Seragam.** Peubah acak $X$ dikatakan mengikuti distribusi seragam pada interval $(\alpha, \beta)$ jika fungsi kepadatan peluang (fkp) nya berbentuk:

$$f(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta-\alpha}, & \alpha < x < \beta \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Karakteristik dari distribusi seragam adalah sebagai berikut:

(1) $E(X) = \dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$

(2) $\text{Var}(X) = \dfrac{(\beta-\alpha)^2}{12}$

(3) $M_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t(\beta-\alpha)}(e^{\beta t} - e^{\alpha t}), & t \neq 0 \\ 1, & t \text{ lainnya} \end{cases}$

paper ini menggunakan $\alpha = 0$ dan $\beta = 1$, sehingga fungsi kepadatan peluangnya berbentuk:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

2.2. **Kuartil.** Misalkan ada sekumpulan data yang nilainya sudah diurutkan dari terkecil sampai terbesar. Kemudian sekumpulan data tersebut dibagi dua bagian, maka pembaginya ada satu buah dan disebut median. Apabila sekumpulan datanya dibagi empat bagian, maka pembaginya ada tiga buah disebut kuartil. Jadi kuartil adalah pembagi yang membagi sekumpulan data menjadi empat bagian sama, setelah sekumpulan data tersebut diurutkan dari nilai terkecil sampai nilai terbesar [4].

Penghitungan nilai kuartil ini dibagi menjadi dua bagian, yaitu data tidak terkelompok dan data terkelompok. Dalam penelitian ini hanya dibahas data tidak terkelompok. Penghitungan nilai kuartil $Q$ dilakukan sebagai berikut [5]:

a. Letak $Q_i$ = data ke-$\frac{i(n+1)}{4}$, $\quad i = 1, 2, 3$
b. Nilai $Q_i$ bergantung pada hasil akhir dari letak $Q_i$-nya.
Apabila hasil letak $Q_i$ berupa bilangan bulat, maka nilai $Q_i$ langsung dicari dari data yang sudah diurutkan. Apabila hasil letak $Q_i$ berupa bilangan desimal, maka nilai $Q_i$ dicari melalui perhitungan.

2.3. **Sampel Acak.** Pembahasan kuartil tidak terlepas dari sampel acak. Definisi sampel acak secara teoritis berbeda dengan secara terapan. Menurut [6], sampel acak didefinisikan secara teoritis sebagai berikut. Dikatakan eksperimen acak dimana hasilnya berupa peubah acak $X$ yang mempunyai fungsi densitas peluang $f(x)$ diulang sebanyak kali secara bebas. Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ menunjukkan $n$ buah peubah acak yang dihubungkan dengan hasil-hasilnya. Kumpulan peubah acak ini, saling bebas dan berdistribusi identik, dinamakan sampel acak dari distribusi dengan fungsi densitas peluang $f(x)$. Bilangan $n$ dinamakan ukuran sampel. Sedangkan [7] mendefinisikan sampel acak sebagai berikut. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah sebuah sampel acak, yaitu himpunan peubah acak yang saling bebas dan berdistribusi identik berukuran $n$ dari populasi dengan fungsi distribusinya $F_X(x)$. [8] menyatakan bahwa misalkan $X$ adalah peubah acak dengan fungsi distribusinya $F$ dan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah $n$ buah peubah acak yang saling bebas dan berdistribusi identik dengan fungsi distribusinya $F$. Maka kumpulan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dinamakan sebuah sampel acak berukuran $n$ yang berasal dari fungsi distribusi $F$ atau sederhananya sebagai $n$ pengamatan yang saling bebas pada $X$. Dari beberapa pendapat di atas dapat disimpulkan bahwa $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dinamakan sebuah sampel acak berukuran $n$, jika dipenuhi syarat-syarat sebagai berikut :

(1) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah $n$ buah peubah acak yang saling bebas,
(2) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah $n$ buah peubah acak yang berdistribusi identik.

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah sebuah sampel acak berukuran $n$ yang berasal dari populasi berdistribusi normal dengan mean $= \mu$ dan varians $= \sigma^2$. Dalam hal ini, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah $n$ buah peubah acak yang saling bebas, artinya fungsi kepadatan peluang (fkp) gabungan dari $n$ buah peubah acak merupakan perkalian dari $n$ buah fkp untuk masing-masing peubah acaknya. Kemudian $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah $n$ buah peubah acak yang berdistribusi identik, artinya untuk setiap peubah acak $X_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ mempunyai mean yang sama (yaitu $\mu$), varians yang sama (yaitu $\sigma^2$), dan fungsi pembangkit momen yang sama (yaitu $\exp(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)$).

2.4. **Statistik Urutan.** Apabila ada sekumpulan data yang nilai-nilainya diketahui, maka dapat diketahui nilai data terkecil, nilai data terbesar, nilai median, nilai rentang, dan sebagainya. Akan tetapi apabila ada nilai data yang nilainya tidak diketahui (berupa peubah acak), maka tidak bisa diketahui nilai data terkecil, nilai data terbesar, dihitung nilai median, dihitung nilai rentang, dan sebagainya. Oleh karena itu, agar nilai-nilai di atas dapat diketahui dan dihitung, maka akan dibahas statistik yang diurutkan atau statistik urutan (*order statistic*).

Dalam statistika sebuah sampel acak berukuran $n$ biasanya disimbolkan $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$. Dalam hal ini, akan ditentukan berapa besar nilai terkecil, nilai terbesar, nilai rentang, nilai median, nilai kuartil, atau nilai lainnya. Karena sampel acak berupa peubah acak, maka tidak bisa ditentukan dengan pasti berapa nilai-nilai di atas. Karena itu perlu didefinisikan nilai-nilai yang sudah diurutkan berdasarkan sampel acak tersebut. Misalkan $Y_1$ adalah nilai terkecil dari $(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$, $Y_2$ adalah nilai terkecil kedua dari $(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$, $Y_3$ adalah nilai terkecil ketiga dari $(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n), \ldots, Y_n$ adalah nilai terbesar dari $(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$. Secara umum akan disimbolkan dengan $Y_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ dan ini disebut sebagai statistik urutan. Nilai statistik urutan ini bisa dibuat sebuah hubungan sebagai berikut: $Y_1 < Y_2 < Y_3 < \ldots < Y_n$.

Menurut [9], definisi statistik urutan sebagai berikut. Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ menyatakan sebuah sampel acak dari distribusi dengan jenis kontinu yang mempunyai fungsi densitas peluang berbentuk $f(x)$ positif, untuk $a < x < b$. Misalkan $Y_1$ adalah nilai terkecil dari $X_i$, $Y_2$ adalah nilai terkecil kedua dari $X_i$, …, dan $Y_n$ adalah nilai terbesar dari $X_i$. Dengan demikian, $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$ mewakili $X_1, X_2, \ldots, X_n$ apabila disusun dari terkecil sampai terbesar. Maka $Y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, dinamakan statistik urutan ke-$i$ dari sampel acak $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Sedangkan [6] mendefinisikan statistik urutan sebagai berikut. Jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah anggota-anggota dari sampel acak berukuran $n$ yang berasal dari distribusi kontinu, maka peubah acak $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$ menunjukkan statistik urutan dari sampel acak tersebut, dengan: $Y_1$ adalah nilai terkecil dari $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $Y_2$ adalah nilai terkecil kedua dari $X_1, X_2, \ldots, X_n$, …, $Y_n$ adalah nilai terbesar dari $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Selanjutnya menurut [10], statistik urutan didefinisikan sebagai berikut. Misalkan $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ menunjukkan peubah acak kontinu yang saling bebas dengan fungsi distribusi $F(y)$ dan fungsi densitas $f(y)$. Peubah acak yang diurutkan $Y_i$ dengan $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \ldots, Y_{(n)}$, dimana $Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq \ldots \leq Y_{(n)}$. Karena peubah acaknya kontinu, maka tanda sama dengan dapat dihilangkan. Dengan demikian:

$$Y_{(1)} = \min(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$$

nilai terkecil dari peubah acak $Y_i$ dan

$$Y_{(n)} = \max(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$$

nilai terbesar dari peubah acak $Y_i$

Secara umum, sebuah sampel acak berukuran $n$ biasa dinotasikan dengan $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$. Dari sampel acak tersebut, maka tidak bisa diketahui atau dihitung besaran-besaran di atas. Hal ini disebabkan karena sampel acak tersebut belum ada nilainya. Untuk dapat menyelesaikan persoalan tersebut, maka perlu pemisalan. Apabila nilai data terkecil dari $(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$ dimisalkan dengan $Y_1$, nilai data terkecil kedua dimisalkan dengan $Y_2$, $\ldots$, nilai data terkecil ke-$k$ dimisalkan dengan $Y_k$, $\ldots$, nilai data terbesar dimisalkan dengan $Y_n$; maka nilai-nilai $Y$ tersebut bisa diurutkan sebagai berikut:

$$Y_1 < Y_2 < Y_3 < \ldots < Y_n$$

Dari hubungan di atas, maka $Y_i$ dinamakan statistik urutan ke-$i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Jadi statistik urutan didefinisikan sebagai ukuran yang dihitung dari sebuah sampel acak, dengan nilainya sudah diurutkan dari nilai terkecil sampai terbesar. Dari nilai-nilai tersebut akan diperoleh nilai Kuartil kesatu $Q_1$, nilai Kuartil kedua $Q_2$, dan nilai Kuartil ketiga $Q_3$.

Misalkan $Y_1 < Y_2 < Y_3 < \ldots < Y_n$ adalah statistik urutan dari sampel acak berukuran $n$ yang berasal dari populasi berdistribusi dengan fungsi kepadatan peluang $f(x)$ positif untuk $a < x < b$. Fungsi kepadatan peluang gabungan dari $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n$ berbentuk sebagai berikut:

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{cases} n! \cdot f(y_1) \cdot f(y_2) \cdot \ldots \cdot f(y_n); & a < y_1 < y_2 < \ldots < y_n < b \\ \\ 0; & \text{lainnya} \end{cases}$$

Fungsi kepadatan peluang gabungan dari $Y_i, Y_j$ ditentukan dengan rumus sebagai berikut:

$$g_{ij}(y_i, y_j) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(i-1)!\,(j-i-1)!\,(n-j)!} \left[F(y_i)\right]^{i-1} \cdot \left[F(y_j) - F(y_i)\right]^{j-i-1} & \\ \quad \cdot \left[1 - F(y_j)\right]^{n-j} \cdot f(y_i) \cdot f(y_j); & a < y_i < y_j < b \\ \\ 0; & \text{lainnya} \end{cases}$$

2.5. **Teknik Transformasi Peubah Acak.** Misalkan ada peubah acak, baik diskrit maupun kontinu dan mempunyai fungsi kepadatan peluangnya. Kemudian ada peubah acak baru yang merupakan fungsi dari peubah acak semula. Dalam hal ini akan ditentukan distribusi dari peubah acak baru tersebut. Penentuan distribusi tersebut salah satunya digunakan teknik transformasi peubah acak.

Langkah-langkah untuk menentukan fungsi kepadatan peluang dari kuartil berdasarkan statistik urutan yang diambil dari sampel berukuran 4, yaitu $Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4$ dilakukan sebagai berikut [11]:

(1) Transformasi peubah acak untuk $Q_1 = f(Y_1, Y_2)$, $Q_2 = f(Y_2, Y_3)$, dan $Q_3 = f(Y_3, Y_4)$.
(2) Tentukan fungsi kepadatan peluang gabungan dari kedua peubah acak asalnya. Untuk $Q_1$ diperoleh $g_{12}(y_1, y_2)$, $Q_2$ diperoleh $g_{23}(y_2, y_3)$, dan $Q_3$ diperoleh $g_{34}(y_3, y_4)$.
(3) Misalkan satu transformasi peubah acak lagi (disimbolkan dengan $T$) dengan bentuknya disesuaikan dengan bentuk transformasi yang diketahui.
Untuk $Q_1$ diambil $T = Y_1$, $Q_2$ diambil $T = Y_2$, dan $Q_3$ diambil $T = Y_3$.
(4) Tentukan nilai inversnya.
(5) Tentukan matriks Jacobian.
(6) Tentukan nilai mutlak dari determinan matriks Jacobian.
(7) Tentukan distribusi gabungan dari kedua peubah acak transformasi. Untuk $Q_1$ diperoleh $h(q_1, t)$, untuk $Q_2$ diperoleh $h(q_2, t)$, dan untuk $Q_3$ diperoleh $h(q_3, t)$.
(8) Tentukan distribusi marginal dari peubah acak transformasi yang diketahui. Untuk $Q_1$ diperoleh $h_1(q_1) = \int_{-\infty}^{\infty} h(q_1, t)\, dt$, untuk $Q_2$ diperoleh $h_1(q_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h(q_2, t)\, dt$, dan untuk $Q_3$ diperoleh $h_1(q_3) = \int_{-\infty}^{\infty} h(q_3, t)\, dt$.

## 3. Hasil dan Pembahasan

1. Berdasarkan rumus kuartil, datanya merupakan data tunggal, maka:

$$\begin{aligned}\text{letak kuartil kesatu} &= \text{data ke-}\frac{1(4+1)}{4}\\ &= \text{data ke-1,25}\\ \text{nilai kuartil kesatu} &= \text{data ke-1} + 0{,}25\,(\text{data ke-2} - \text{data ke-1})\\ &= Y_1 + 0{,}25(Y_2 - Y_1)\\ &= Y_1 + 0{,}25Y_2 - 0{,}25Y_1\\ &= 0{,}75Y_1 + 0{,}25Y_2\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh transformasinya dari $Q_1$ adalah $Q_1 = 0{,}75\,Y_1 + 0{,}25\,Y_2$. Karena transformasi yang diketahui berbentuk penjumlahan, maka dimisalkan transformasi keduanya berbentuk: $T = Y_1$. Fungsi kepadatan peluang gabungan dari $Y_1, Y_2$ adalah:

$$g_{1,2}(y_1, y_2) = \begin{cases} 12(1-y_2)^2; & 0 < y_1 < y_2 < 1\\ 0; & \text{lainnya}\end{cases}$$

Hubungan antara nilai $y_1$ dari $Y_1$ dan nilai $y_2$ dari $Y_2$ dengan nilai $q_1$ dari $Q_1$ dan nilai $t$ dari $T$ diberikan dengan:

$$q_1 = 0{,}75\,y_1 + 0{,}25\,y_2 \quad \text{dan} \quad t = y_1$$

Inversnya : $y_1 = t$ dan $y_2 = \dfrac{q_1 - 0{,}75t}{0{,}25}$

Jacobian :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial t} & \frac{\partial y_1}{\partial q_1}\\ \frac{\partial y_2}{\partial t} & \frac{\partial y_2}{\partial q_1}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0\\ -3 & 4\end{vmatrix} = 4 \quad \text{maka } |J| = 4$$

Fungsi kepadatan peluang gabungan dari $Q_1$ dan $T$ adalah:

$$h(q_1, t) = \begin{cases} 48\left(1 - \dfrac{q_1 - 0{,}75t}{0{,}25}\right)^2; & \text{untuk } 0 < t < 1,\ t < q_1 < 0{,}25 + 0{,}75t\\ 0; & \text{lainnya.}\end{cases}$$

Fungsi kepadatan peluang marginal untuk $Q_1$ adalah :

$$h_1(q_1) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{q_1} 48\left(1 - \frac{q_1 - 0{,}75t}{0{,}25}\right)^2 dt = \frac{16}{3}\left[(1-q_1)^3 - (1-4q_1)^3\right]; & 0 \le q_1 < 0{,}25\\ \displaystyle\int_{\frac{q_1 - 0{,}25}{0{,}75}}^{q_1} 48\left(1 - \frac{q_1 - 0{,}75t}{0{,}25}\right)^2 dt = \frac{16}{3}(1-q_1)^3; & 0{,}25 < q_1 < 1\\ 0; & \text{q lainnya.}\end{cases}$$

2. Berdasarkan rumus kuartil, datanya merupakan data tunggal, maka:

$$\begin{aligned}\text{letak kuartil kedua} &= \text{data ke-}\frac{2(4+1)}{4}\\ &= \text{data ke-2,5}\\ \text{nilai kuartil kedua} &= \text{data ke-2} + 0{,}5\,(\text{data ke-3} - \text{data ke-2})\\ &= Y_2 + 0{,}5(Y_3 - Y_2)\\ &= Y_2 + 0{,}5Y_3 - 0{,}5Y_2\\ &= 0{,}5Y_2 + 0{,}5Y_3\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh transformasinya dari $Q_2$ adalah $Q_2 = 0{,}5Y_2 + 0{,}5Y_3$. Karena transformasi yang diketahui berbentuk penjumlahan, maka dimisalkan transformasi keduanya berbentuk: $T = Y_2$.

Fungsi kepadatan peluang gabungan dari $Y_2, Y_3$ adalah:

$$g_{2,3}(y_2, y_3) = \begin{cases} 24y_2(1-y_3); & 0 < y_2 < y_3 < 1 \\ 0; & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Hubungan antara nilai $y_2$ dari $Y_2$ dan nilai $y_3$ dari $Y_3$ dengan nilai $q_2$ dari $Q_2$ dan nilai $t$ dari $T$ diberikan dengan:

$$q_2 = 0{,}5\, y_2 + 0{,}5\, y_3 \quad \text{dan} \quad t = y_2$$

Inversnya : $y_2 = t$ dan $y_3 = 0{,}5q_2 - t$

Jacobian :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_2}{\partial t} & \frac{\partial y_2}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y_3}{\partial t} & \frac{\partial y_3}{\partial q_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0{,}5 \end{vmatrix} = 0{,}5 \quad \text{maka } |J| = 0{,}5$$

Fungsi kepadatan peluang gabungan dari $Q_2$ dan $T$ adalah:

$$h(q_2, t) = \begin{cases} 12t(1 - 0{,}5q_2 + t); & \text{untuk } 0 < t < 1,\ t < q < 0{,}25 + 0{,}75t \\ 0; & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Fungsi kepadatan peluang marginal untuk $Q_2$ adalah:

$$h_1(q_2) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{0,25q_2} 12t(1 - 0{,}5q_2 + t)dt = \frac{1}{8}\left(3q_2^2 - q_2^3\right); & 0 \le q_2 < 2 \\ \displaystyle\int_{0,5(q_2-2)}^{0,25q_2} 12t(1 - 0{,}5q_2 + t)dt = \frac{3}{4}q_2^4 - \frac{75}{16}q_2^3 + \frac{126}{144}q_2^2 - 6; & 2 < q_2 < 4 \\ 0; & q_2 \text{ lainnya.} \end{cases}$$

3. Berdasarkan rumus kuartil, datanya merupakan data tunggal, maka:

$$\begin{aligned} \text{letak kuartil ketiga} &= \text{data ke-}\frac{3(4+1)}{4} \\ &= \text{data ke-3,75} \\ \text{nilai kuartil ketiga} &= \text{data ke-3} + 0{,}75\,(\text{data ke-4} - \text{data ke-3}) \\ &= Y_3 + 0{,}75(Y_4 - Y_3) \\ &= Y_3 + 0{,}75Y_4 - 0{,}75Y_3 \\ &= 0{,}25Y_3 + 0{,}75Y_4 \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh transformasinya dari $Q_3$ adalah $Q_3 = 0{,}25Y_3 + 0{,}75Y_4$. Karena transformasi yang diketahui berbentuk penjumlahan, maka dimisalkan transformasi keduanya berbentuk: $T = Y_3$. Fungsi kepadatan peluang gabungan dari $Y_3, Y_4$ adalah:

$$g_{3,4}(y_3, y_4) = \begin{cases} 12\, y_3^2, & 0 < y_3 < y_4 < 1 \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Hubungan antara nilai $y_3$ dari $Y_3$ dan nilai $y_4$ dari $Y_4$ dengan nilai $q_3$ dari $Q_3$ dan nilai $t$ dari $T$ diberikan dengan:

$$q_3 = 0{,}25\, y_3 + 0{,}75\, y_4 \quad \text{dan} \quad t = y_3$$

Inversnya : $y_3 = t$ dan $y_4 = \frac{4}{3}q_3 - \frac{1}{3}t$

Jacobian :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_3}{\partial t} & \frac{\partial y_3}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y_4}{\partial t} & \frac{\partial y_4}{\partial q_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{vmatrix} = \frac{4}{3} \quad \text{maka } |J| = \frac{4}{3}$$

Fungsi kepadatan peluang gabungan dari $Q_3$ dan $T$ adalah:

$$h(q_3, t) = \begin{cases} 16t^2; & \text{untuk } 0 < t < 1,\ t < q_3 < 0{,}75 + 0{,}25t \\ 0; & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Fungsi kepadatan peluang marginal untuk $Q_3$ adalah:

$$h_3(q) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{q_3} 16t^2\,dt = \frac{16}{3}q_3^3; & 0 \le q < 0{,}75 \\ \displaystyle\int_{4q_3-3}^{q_3} 16t^2\,dt = -336q_3^3 + 768q_3^2 - 576q_3 + 144; & 0{,}75 < q < 1 \\ 0; & q_3 \text{ lainnya.} \end{cases}$$

## 4. Simpulan

Penentuan fungsi kepadatan peluang dari kuartil kesatu ($Q_1$) berdasarkan statistik urutan dari sampel acak berukuran 4, $Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4$ yang berasal dari populasi berdistribusi seragam $S(0,1)$ dilakukan dengan menggunakan teknik transformasi peubah acak. Transformasi peubah acaknya: $Q_1 = 0{,}75\,Y_1 + 0{,}25\,Y_2$. Hasil akhir dari penelitian ini sebagai berikut: $h_1(q_1) = \frac{16}{3}\left[(1-q_1)^3 - (1-4q_1)^3\right] \quad ; \quad 0 \le q_1 < 0{,}25; h_1(q_1) = \frac{16}{3}(1-q_1)^3 \quad ; \quad 0{,}25 < q_1 < 1$ dan $h_1(q_1) = 0 \quad ; \quad$ untuk $q_1$ lainnya. Penentuan fungsi kepadatan peluang dari kuartil kedua ($Q_2$) berdasarkan statistik urutan dari sampel acak berukuran 4, $Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4$ yang berasal dari populasi berdistribusi seragam $S(0,1)$ dilakukan dengan menggunakan teknik transformasi peubah acak. Transformasi peubah acaknya: $Q_2 = 0{,}5\,Y_2 + 0{,}5\,Y_3$. Hasil akhir dari penelitian ini sebagai berikut: $h_1(q_2) = \frac{1}{8}(3q_2^2 - q_2^3) \quad ; \quad 0 \le q_2 < 2; h_1(q_2) = \frac{3}{4}q_2^4 - \frac{75}{16}q_2^3 + \frac{126}{144}q_2^2 - 6 \quad ; \quad 2 < q_2 < 4;$ dan $h_1(q_2) = 0 \quad ; \quad$ untuk $q_2$ lainnya. Penentuan fungsi kepadatan peluang dari kuartil ketiga ($Q_3$) berdasarkan statistik urutan dari sampel acak berukuran 4, $Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4$ yang berasal dari populasi berdistribusi seragam $S(0,1)$ dilakukan dengan menggunakan teknik transformasi peubah acak. Transformasi peubah acaknya: $Q_3 = 0{,}25\,Y_3 + 0{,}75\,Y_4$. Hasil akhir dari penelitian ini sebagai berikut : $h_1(q_3) = \dfrac{16}{3}q_3^3$ untuk $0 \le q_3 < 0{,}75$ ; $h_1(q_3) = -336q_3^3 + 768q_3^2 - 576q_3 + 144$ untuk $0{,}75 < q_3 < 1$; dan $h_1(q_3) = 0$ untuk $q_3$ lainnya. Batasan dalam penelitian ini adalah parameter dari distribusi seragam dan ukuran sampelnya harus tertentu. Implikasi teoritis dari artikel ini adalah penggunaan teknik transformasi peubah acak secara teoritis dalam penentuan fungsi kepadatan peluang dari fungsi peubah acak. Rekomendasi untuk penelitian lanjutan adalah menentukan distribusi kuartil berdasarkan statistik urutan berdasarkan sampel acak berukuran tertentu yang berdistribusi seragam secara umum.

## Daftar Pustaka


[1] Padang, Y., Abdunnur, Syahrir R., M., Analisis Kuartil, Desil dan Persentil pada Ukuran Panjang Udang Bintik Coklat (Metapenaeus demani) di Perairan Muara Ilu Kabupaten Kutai Kartanegara, 2023, *Tropical Aquatic Sciences*, Vol. 2(1):44-50.

[2] Sitorus, F.F., Aulia, D.M., Anggraini, F., Putri, A.A., Chairunnisa, P., Haryana, N.R., Hubungan Pengetahuan tentang Tingkat Kecukupan Gizi dan Perilaku Pemberian Makanan Ibu dengan Kejadian Stunting pada Bayi di Medan Belawan, *Jurnal Ilmiah Wahana Pendidikan*, Februari 2025, 11 (2.C), 140-150.

[3] Nazir, M. *Metode Penelitian.* Jakarta: Penerbit Ghalia Indonesia, 1985.

[4] Herrhyanto, N. and Gantini, T., *Analisis Data Kuantitatif dengan Statistika Deskriptif.* Bandung: Penerbit Yrama Widya, 2015.

[5] Sudjana, *Metoda Statistika*, 6th ed. Bandung: TARSITO, 1996.

[6] Hogg, Robert V. & Tanis, E.A. *Probability & Statistical Inference.* Collier Ma. Canada: Collier Macmillan Canada, Ltd, 1977.

[7] Dudewicz, Edward J. & Mishra, S.N. *Modern Mathematical Statistics. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.* Canada: John Wiley & Sons, Inc., 1988.

[8] Rohatgi, V.K., *An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics.* Canada: John Wiley & Sons, Inc., 1976.

[9] Hogg, Robert V. & Craig, A.T., *Introduction to Mathematical Statistics*, Fifth Edit. New Jersey: Prentice Hall International Inc., Englewood Cliffs, 07632, 1995.

[10] Wackerly, Dennis D.; Mendenhall III, William; & Scheaffer, R.L., *Mathematical Statistics with Applications*, 5th ed. Wadsworth Publishing Company. A Division of International Thomson Publishing Inc., 1996.

[11] Herrhyanto, N., *Statistika Inferensial Secara Teoretis.* Bandung: Yrama Widya, 2013.