

Aljabar Hopf dan Ekstensi Hopf-Galois

RYAN AZIZ^{1,2}, MUHAMAD HAFIZH¹

¹ Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Indonesia, Depok 16424, Indonesia

² Combinatorics and Algebra Research Group, Universitas Indonesia, Depok 16424,
indonesia

Email: ryan.kasyfil@sci.ui.ac.id, hafizh3578@gmail.com

Abstrak

Aljabar Hopf adalah struktur aljabar yang secara bersamaan memuat struktur aljabar asosiatif dengan elemen satuan dan struktur koaljabar koasosiatif dengan counit, dilengkapi dengan suatu pemetaan tambahan yang disebut antipoda.. aljabar Hopf menawarkan kerangka generalisasi dari teori Galois klasik melalui konsep ekstensi Hopf-Galois. Pada artikel ini, disajikan dasar dari teori aljabar Hopf, dan juga penerapannya pada ekstensi Hopf-Galois, yang memungkinkan deskripsi simetri dalam ekstensi lapangan yang tidak harus normal. Secara khusus, akan dikonstruksi secara eksplisit struktur Hopf-Galois dari ekstensi lapangan tidak normal $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ dari $\mathbb{Q}$ yang bersesuaian dengan polinomial $x^4 - 2$.

Kata kunci: Aljabar Hopf, ekstensi Galois, grup Galois, Ekstensi Hopf-Galois, Aksi Hopf.

Abstract

Hopf algebras are algebraic structures that simultaneously carry the structure of an associative unital algebra and a coassociative counital coalgebra, together with an additional map called an antipode. Hopf algebras provide a framework for generalizing classical Galois theory through the concept of Hopf-Galois extensions. This review article presents the foundations of Hopf algebra theory and its application to Hopf-Galois extensions, which allow for the description of symmetries in field extensions that need not to be normal. In particular, we construct an explicit example of a Hopf-Galois extension arising from a non-normal field extension $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ of $\mathbb{Q}$ associated to the polynomial $x^4 - 2$.

Keywords: Hopf algebras, Galois extensions, Galois groups, Hopf-Galois extensions, Hopf actions.

1. PENDAHULUAN

Secara garis besar, teori Galois mengkaji hubungan antara akar-akar suatu polinomial monik dengan koefisien dalam suatu lapangan dasar K dan struktur grup automorfisme dari ekstensi lapangan yang diperoleh dengan menambahkan seluruh akar polinomial tersebut ke K . Himpunan automorfisme ini membentuk *grup Galois* dari polinomial yang bersangkutan. Melalui konsep ini, Galois menunjukkan bahwa suatu polinomial monik dengan koefisien di $\mathbb{Q}$ dapat diselesaikan dengan radikal jika dan hanya jika grup Galois yang bersesuaian merupakan grup *solvable*.

Secara garis besar, teori Galois dimulai dengan membentuk ekstensi lapangan $\mathbb{Q} \subseteq E$ yang diperoleh dengan menambahkan ke $\mathbb{Q}$ akar-akar suatu polinomial $f(x)$ yang semula tidak berada di $\mathbb{Q}$. Ekstensi lapangan E atas $\mathbb{Q}$ disebut sebagai ekstensi *Galois* jika E bersifat normal dan terpisahkan (*separable*), lihat Bagian 3.2 untuk penjelasan lebih lanjut. Secara intuitif, sifat normal menyatakan bahwa jika satu akar dari polinomial minimal terletak di E , maka semua akarnya juga berada di E , sedangkan sifat terpisahkan berarti polinomial minimal tersebut tidak memiliki akar ganda.

Pada perkembangan teori ekstensi Galois, syarat bahwa ekstensi lapangan harus bersifat normal dan terpisahkan sering kali dianggap terlalu ketat. Sebagai ilustrasi, polinomial monik rasional $x^4 - 2$ memiliki solusi $\pm\sqrt[4]{2}$ dan $\pm i\sqrt[4]{2}$. Dengan menambahkan semua solusi ini ke dalam lapangan $\mathbb{Q}$, didapat ekstensi lapangan

$$\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2}) = \{a_0 + a_1\sqrt[4]{2} + a_2\sqrt[4]{2}^2 + a_3\sqrt[4]{2}^3 + a_4i + a_5i\sqrt[4]{2} + a_6i\sqrt[4]{2}^2 + a_7i\sqrt[4]{2}^3 \mid a_j \in \mathbb{Q}\},$$

dengan grup Galois yang bersesuaian digunakan untuk mempelajari simetri pada $\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$. Hanya saja, seperti yang diilustrasikan pada Bagian 3.3, dapat dibentuk ekstensi lapangan lain dari $\mathbb{Q}$ dan juga lebih sederhana, yaitu lapangan

$$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) = \{a_0 + a_1\sqrt[4]{2} + a_2\sqrt[4]{2}^2 + a_3\sqrt[4]{2}^3 \mid a_j \in \mathbb{Q}\}.$$

Ekstensi lapangan $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ bukanlah ekstensi normal, sehingga struktur simetri pada $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ tidak dapat dipelajari melalui grup Galois karena kardinalitas dari grup tersebut terlalu kecil

Agar grup automorfisme di atas dapat mencerminkan struktur dari ekstensi lapangan sepenuhnya, perlu adanya kerangka struktur baru yang lebih umum. Aljabar Hopf hadir dalam rangka mencari struktur yang dapat mencakup simetri tersembunyi ini. Hal ini tidak mengejutkan, karena aljabar Hopf adalah linearisasi dari grup, sehingga teori yang ada pada grup dapat diperumum menjadi suatu teori pada aljabar Hopf.

Secara khusus, pada artikel ini dipelajari tentang *ekstensi Hopf-Galois*, yaitu generalisasi dari ekstensi Galois yang pertama kali diperkenalkan oleh Chase dan Sweedler di [3], dan akan dipelajari juga karakterisasi struktur Hopf-Galois pada suatu ekstensi lapangan yang tidak normal yang pertama kali diberikan oleh Grunther dan Pareigis di [6].

Hasil utama pada artikel ini terangkum pada Bagian 4, khususnya di Teorema 4.7 dan Teorema 4.9 yang merupakan kalkulasi detail untuk menentukan struktur Hopf-Galois dari ekstensi lapangan $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ atas $\mathbb{Q}$ sebagai ekstensi Hopf-Galois. Kalkulasi ini didasari oleh konstruksi oleh Garcia di [5], namun dengan langkah yang lebih rinci karena struktur Hopf-Galois pada contoh ini tidak diberikan secara eksplisit di [5].

Organisasi dari artikel ini adalah sebagai berikut:

- Pada Bagian 2, akan dibahas pendefinisian aljabar, koaljabar, bialjabar dan aljabar Hopf. Pendefinisian ini membutuhkan konsep ruang kali tensor pada ruang vektor yang juga akan dibahas di awal bagian ini.
- Pada Bagian 3, dibahas ekstensi Galois dan grup Galois. Secara khusus, pada Bagian 3.3, akan dibahas secara rinci tentang lapangan $\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$ sebagai ekstensi lapangan dari $\mathbb{Q}$ dengan menambahkan solusi dari polinomial $x^4 - 2$. Seperti yang sudah dibahas, $\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$ merupakan ekstensi Galois dan memiliki grup Galois yang bersesuaian. Lebih lanjut, pada bagian 4.3, ekstensi lapangan dibatasi menjadi $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ atas $\mathbb{Q}$ sehingga terbentuk ekstensi yang bukan ekstensi Galois.

- Pada Bagian 4, definisi ekstensi Galois diperumum ke ekstensi Hopf-Galois dari suatu ekstensi lapangan yang terpisahkan, namun tidak normal. Seperti yang sudah dijelaskan di atas, Hasil utama pada artikel terangkum pada Teorema 4.7 dan Teorema 4.9, yaitu dua buah aljabar Hopf H dan H' yang bersesuaian dengan ekstensi Hopf-Galois $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ atas $\mathbb{Q}$. Lebih lanjut, kedua aljabar Hopf ini tidak isomorfik, yang ditunjukkan pada Lema 4.10. Hal ini yang mengilustrasikan bahwa untuk ekstensi Hopf-Galois, aljabar Hopf yang bersesuaian dengannya tidaklah tunggal.

2. ALJABAR HOPF

Pada artikel ini, semua ruang vektor didefinisikan atas lapangan K dan tidak diasumsikan berdimensi hingga kecuali jika disebutkan demikian Materi yang ada pada bagian ini sudah umum diketahui. Pembahasan lebih lengkap tentang ruang vektor serta teoremanya dapat dilihat di [10], sedangkan teori untuk aljabar Hopf dibahas secara rinci di [7, 13].

2.1. Ruang kali tensor. Misalkan V, W adalah dua buah ruang vektor atas lapangan K . Ingat bahwa kali kartesian (sebagai himpunan) antara V, W adalah suatu himpunan baru

$$V \times W := \{(v, w) | v \in V, w \in W\}.$$

Definisikan X sebagai ruang vektor dengan basis $V \times W$, maka setiap unsur $x \in X$ dapat ditulis secara tunggal sebagai kombinasi linier dari pasangan elemen basis dari $V \times W$ seperti berikut:

$$x = \sum_{v \in V, w \in W} \alpha_{v,w}(v, w),$$

dengan $\alpha_{v,w} \in K$.

Sebagai ilustrasi, di X vektor $(2u, v)$ tidak sama dengan $2(u, v)$, dan vektor $(u, v + w)$ tidak sama dengan $(u, v) + (u, w)$. Penyebabnya adalah bahwa dalam ruang vektor X setiap pasangan (u, v) dengan $u \in V$ dan $v \in W$ diperlakukan sebagai sebuah vektor basis yang berbeda. Dengan demikian, $(2u, v)$ dan (u, v) merupakan dua vektor basis yang berlainan, sehingga $(2u, v)$ tidak dapat sama dengan kelipatan skalar $2(u, v)$; demikian pula $(u, v + w)$ bukan penjumlahan dari dua vektor basis (u, v) dan (u, w) , melainkan sebuah vektor basis lain yang berbeda.

Dari ilustrasi di atas, dapat dibayangkan bahwa ruang vektor X sangat besar, sehingga tidak cukup praktis untuk bekerja secara langsung di X . Oleh karena itu, ruang vektor X perlu diperkecil menjadi *ruang kali tensor* dengan cara berikut:

Definisi 2.1 (Ruang Kali Tensor). *Misalkan V, W adalah ruang vektor atas lapangan K . Definisikan X sebagai ruang vektor dengan basis kali kartesian $V \times W$ dan S sebagai subruang dari X yang direntang oleh vektor-vektor berbentuk:*

$$\begin{aligned} &(\lambda v, w) - \lambda(v, w), & (v, \lambda w) - \lambda(v, w) \\ &(v + v', w) - ((v, w) + (v', w)), & (v, w + w') - ((v, w) + (v, w')). \end{aligned}$$

untuk setiap $v, v' \in V, w, w' \in W$, dan $\lambda \in K$. Ruang kali tensor $V \otimes W$ didefinisikan sebagai ruang faktor $V \otimes_K W := X/S$ dengan setiap elemen dinotasikan dengan $v \otimes w := (v, w) + S$. Secara konkret, untuk setiap $v, v' \in V$ dan $w, w' \in W$, berlaku:

$$\begin{aligned} \lambda(v \otimes w) &= (\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w) \\ (v + v') \otimes w &= v \otimes w + v' \otimes w \\ v \otimes (w + w') &= v \otimes w + v \otimes w'. \end{aligned}$$

Catatan 2.2. Apabila konteks lapangannya jelas, maka $\otimes_K$ akan ditulis sebagai $\otimes$.

Ruang kali tensor $V \otimes W$ adalah ruang vektor universal yang dibuat dari pasangan (v, w) sehingga semua pemetaan bilinear dari $V \times W$ terfaktorkan secara tunggal melalui pemetaan linier dari $V \otimes W$. Lebih jelasnya, jika diberikan pemetaan bilinear

$$\tau : V \times W \rightarrow V \otimes W, \quad \tau(v, w) = v \otimes w,$$

maka untuk setiap ruang vektor U dan setiap pemetaan bilinear $f : V \times W \rightarrow U$, terdapat secara tunggal pemetaan linier $\tilde{f} : V \otimes W \rightarrow U$ sedemikian rupa sehingga berlaku $\tilde{f}(v \otimes w) = f(v, w)$. Dengan menggunakan sifat universal ini, didapat proposisi berikut:

Proposisi 2.3. Misalkan $f : V \rightarrow V'$ dan $g : W \rightarrow W'$ adalah dua buah pemetaan linier, maka $f \otimes g : V \otimes W \rightarrow V' \otimes W'$ adalah suatu pemetaan linier dengan aturan $(f \otimes g)(v \otimes w)$ untuk setiap $v \in V$ dan $w \in W$.

Proof. Konstruksi pemetaan $(f, g) : V \times W \rightarrow V' \otimes W'$ dengan aturan $(f, g)(v, w) = f(v) \otimes g(w)$. Jelas bahwa (f, g) merupakan pemetaan bilinear, sehingga berdasarkan sifat universal terdapat tepat satu pemetaan linier $f \otimes g : V \otimes W \rightarrow V' \otimes W'$ dengan aturan $(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w)$. $\square$

Dengan menggunakan sifat universal, didapat pula lema berikut:

Lema 2.4. Misalkan V adalah suatu ruang vektor atas lapangan K , maka $K \otimes V \cong V \cong V \otimes K$ sebagai ruang vektor

Proof. Konstruksi pemetaan $f : K \times V \rightarrow V$ dengan aturan $f(\lambda, v) = \lambda v$. Jelas bahwa f adalah pemetaan bilinear, sehingga dari sifat universal ruang tensor, terdapat secara tunggal pemetaan linier

$$\Phi : K \otimes V \rightarrow V, \quad \Phi(\lambda \otimes v) = \lambda v.$$

Definisikan pula $\Psi : V \rightarrow K \otimes V$ dengan aturan $\Psi(v) = 1 \otimes v$. Jelas bahwa Ψ adalah suatu pemetaan linier. Lebih lanjut, diperoleh $\Phi(\Psi(v)) = \Phi(1 \otimes v) = v$ dan $\Psi(\Phi(\lambda \otimes v)) = \Psi(\lambda v) = 1 \otimes \lambda v = \lambda \otimes v$. Terbukti bahwa $K \otimes V \cong V$ sebagai ruang vektor. Dengan cara serupa, $V \otimes K \cong V$. $\square$

Meskipun sifat universal berguna dalam tinjauan abstraksi, namun perhitungan di ruang kali tensor dapat dilakukan dengan lebih praktis dengan menggunakan Definisi 2.1.

Sebagai aplikasi dari Definisi 2.1, jika ruang vektor V dan W berdimensi hingga, basis dari ruang vektor $V \otimes W$ adalah hasil kali tensor dari basis bagi V dan W , seperti dijelaskan pada teorema berikut

Teorema 2.5. Misalkan V dan W adalah ruang vektor berdimensi hingga dengan basis $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ dan $\mathcal{C} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ secara berturut-turut. Maka ruang kali tensor $V \otimes W$ memiliki basis $\mathcal{D} = \{e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, \dots, e_m \otimes f_n\}$.

Proof. Akan ditunjukkan bahwa vektor-vektor di $\mathcal{D}$ saling bebas linier dan merentang $V \otimes W$. Untuk menunjukkan $\mathcal{D}$ merentang $V \otimes W$, ambil sembarang $v \in V$ dan $w \in W$. Karena $\mathcal{B}$ merentang V dan $\mathcal{C}$ merentang W , maka terdapat $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_n$ di K sedemikian rupa sehingga berlaku $v = \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i$ dan $w = \sum_{j=1}^n \mu_j f_j$. Berdasarkan sifat kali tensor, didapat

$$v \otimes w = \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i e_i \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^n \mu_j f_j \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\lambda_i e_i) \otimes (\mu_j f_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\lambda_i \mu_j) (e_i \otimes f_j).$$

Terbukti bahwa setiap elemen di $V \otimes W$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari elemen-elemen dalam $\mathcal{D}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\mathcal{D}$ bebas linier dengan menunjukkan bahwa setiap anggota di $\mathcal{D}$ tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari anggota yang lain di $\mathcal{D}$. Tanpa mengurangi perumuman, asumsikan bahwa $e_1 \otimes f_1$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi

linier anggota lain di $\mathcal{D}$. Dengan kata lain, terdapat sejumlah hingga $\lambda_{i,j}$ sehingga berlaku:

$$\begin{aligned} e_1 \otimes f_1 &= \lambda_{1,2}(e_1 \otimes f_2) + \lambda_{1,3}(e_1 \otimes f_3) + \dots + \lambda_{m,n}(e_m \otimes f_n) \\ &= (e_1 \otimes \lambda_{1,2}f_2 + \dots + e_1 \otimes \lambda_{1,n}f_n) + (e_2 \otimes \lambda_{2,1}f_1 + \dots + e_2 \otimes \lambda_{2,n}f_n) + \dots \\ &\quad + (e_m \otimes \lambda_{m,1}f_1 + \dots + e_m \otimes \lambda_{m,n}f_n) \\ &= e_1 \otimes (\lambda_{1,2}f_2 + \dots + \lambda_{1,n}f_n) + e_2 \otimes (\lambda_{2,1}f_1 + \dots + \lambda_{2,n}f_n) + \dots \\ &\quad + e_m \otimes (\lambda_{m,1}f_1 + \dots + \lambda_{m,n}f_n). \end{aligned}$$

Persamaan terakhir hanya dipenuhi jika dan hanya jika $\lambda_{2,1}, \dots, \lambda_{2,n}, \dots, \lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,m}$ bernilai nol sedemikian sehingga persamaan terakhir menjadi:

$$e_1 \otimes f_1 = e_1 \otimes (\lambda_{1,2}f_2 + \dots + \lambda_{1,n}f_n) \quad (1)$$

Karena vektor-vektor di $\mathcal{C} = \{f_j | j = 1, \dots, n\}$ saling bebas linier, vektor f_1 tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $f_2, \dots, f_n$, kontradiksi dengan Persamaan (1). Terbukti bahwa vektor-vektor di $\mathcal{D}$ saling bebas linier. $\square$

2.2. Aljabar, Koaljabar, dan Bialjabar. Bagian ini akan dimulai dengan definisi dari aljabar sebagai berikut

Definisi 2.6 (Aljabar). *Suatu ruang vektor A disebut sebagai aljabar jika A dilengkapi dengan dua buah pemetaan linier*

$$m : A \otimes A \rightarrow A, \quad u : K \rightarrow A$$

yang secara berturut-turut disebut sebagai produk dan unit, sehingga kedua diagram berikut komutatif

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{m \otimes \text{id}} & A \otimes A \\ m \downarrow & & \downarrow m \\ A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} K \otimes A & \xrightarrow{u \otimes \text{id}} & A \otimes A & \xleftarrow{\text{id} \otimes u} & A \otimes K \\ & \searrow \cong & \downarrow m & & \swarrow \cong \\ & & A & & \end{array}$$

atau secara eksplisit, berlaku

$$m \circ (m \otimes \text{id}) = m \circ (\text{id} \otimes m), \quad m \circ (u \otimes \text{id}) = \text{id} = m \circ (\text{id} \otimes u)$$

Dengan menuliskan $m(a \otimes b) = ab$ sebagai produk dari sembarang $a, b \in A$, dan $u(1_K) = 1_A$ sebagai unit dari A , dapat diperiksa bahwa diagram pertama berkorespondensi dengan sifat asosiatif perkalian, dan diagram kedua berkorespondensi dengan sifat unital dari 1_A .

Pemetaan antar dua buah aljabar yang mempertahankan struktur aljabar, dapat didefinisikan dengan menggunakan diagram komutatif sebagai berikut

Definisi 2.7. *Misalkan A, B dua buah aljabar. Pemetaan linier $f : A \rightarrow B$ disebut sebagai pemetaan aljabar jika dua diagram berikut komutatif*

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{m_A} & A \\ f \otimes f \downarrow & & \downarrow f \\ B \otimes B & \xrightarrow{m_B} & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{u_A} & A \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow f \\ k & \xrightarrow{u_B} & B \end{array}$$

atau secara eksplisit, untuk setiap $a, b \in A$, berlaku

$$f(ab) = f(a)f(b), \quad f(1_A) = 1_B.$$

Proposisi 2.8. *Misalkan A, B dua buah aljabar. Maka $A \otimes B$ adalah suatu aljabar dengan produk dan unit berikut*

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$$

$$1_{A \otimes B} = 1_A \otimes 1_B$$

untuk setiap $a, a' \in A$ dan $b, b' \in B$

Proof. Cukup dibuktikan bahwa perkalian di atas bersifat asosiatif dan $1_{A \otimes B}$ bersifat unital. Untuk sifat asosiatif perkalian, karena A dan B asosiatif, berlaku

$$\begin{aligned} ((a \otimes b)(a' \otimes b'))(a'' \otimes b'') &= (aa' \otimes bb')(a'' \otimes b'') = (aa')a'' \otimes (bb')b'' \\ &= a(a'a'') \otimes b(b'b'') = (a \otimes b)(a'a'' \otimes b'b'') \\ &= (a \otimes b)((a' \otimes b')(a'' \otimes b'')) \end{aligned}$$

untuk setiap $a, a', a'' \in A$ dan $b, b', b'' \in B$. Dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan bahwa $1_A \otimes 1_B$ adalah unsur satuan di $A \otimes B$. $\square$

Definisi aljabar pada Definisi 2.6 berbeda definisi standar aljabar seperti pada [10, Bab 18], yang mendefinisikan aljabar A atas sebagai ruang vektor atas lapangan K sekaligus gelanggang satuan, sehingga untuk setiap $\lambda \in K$ dan $a, b \in A$ berlaku $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$. Namun dapat dibuktikan bahwa definisi aljabar pada [10] ini ekuivalen dengan Definisi 2.6.

Dengan membalikkan arah panah pada diagram di Definisi 2.6, dapat didefinisikan suatu struktur baru bernama *koaljabar* sebagai berikut:

Definisi 2.9 (Koaljabar). *Suatu ruang vektor C disebut sebagai koaljabar koasosiatif dan kounital jika C dilengkapi dengan dua buah pemetaan linier*

$$\Delta : C \rightarrow C \otimes C, \quad \epsilon : C \rightarrow K$$

yang secara berturut-turut disebut koproduk dan kounit, sehingga kedua diagram berikut komutatif

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \text{id} \otimes \Delta \\ C \otimes C & \xrightarrow{\Delta \otimes \text{id}} & C \otimes C \otimes C \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} k \otimes C & \xleftarrow{\epsilon \otimes \text{id}} & C \otimes C & \xrightarrow{\text{id} \otimes \epsilon} & C \otimes k \\ & \searrow \cong & \uparrow \Delta & \nearrow \cong & \\ & & C & & \end{array}$$

atau secara eksplisit, berlaku

$$(\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta = (\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta, \quad (\epsilon \otimes \text{id}) \circ \Delta = \text{id} = (\text{id} \otimes \epsilon) \circ \Delta.$$

Pemetaan antar dua buah koaljabar juga dapat didefinisikan dengan membalikkan arah panah pada diagram pemetaan aljabar di Definisi 2.7. Secara konkret:

Definisi 2.10. *Misalkan C, D dua buah koaljabar. Pemetaan linier $f : C \rightarrow D$ disebut sebagai pemetaan koaljabar jika berlaku*

$$\Delta_D \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_C, \quad \epsilon_D \circ f = \epsilon_C.$$

Untuk memudahkan perhitungan yang melibatkan koproduk, akan digunakan *notasi Sweedler* berikut untuk menuliskan koproduk:

$$\Delta(c) := \sum_i c_{i(1)} \otimes c_{i(2)} = c_{(1)} \otimes c_{(2)}.$$

Pada praktiknya, notasi sigma pada notasi Sweedler dapat diabaikan. Sebagai contoh, kedua sifat dari koaljabar secara berturut-turut ditulis kembali menjadi:

$$\begin{aligned} c_{(1)(1)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes c_{(2)} &= c_{(1)} \otimes c_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)}, \\ c_{(1)} \otimes \epsilon(c_{(2)}) &= c = \epsilon(c_{(1)}) \otimes c_{(2)}. \end{aligned}$$

Meskipun kurang dikenal jika dibandingkan dengan aljabar, koaljabar muncul secara alami sebagai dual dari aljabar. Ingat bahwa dual dari ruang vektor V , dinotasikan dengan $V^* := \text{Hom}(V, K)$, adalah ruang vektor yang berisikan pemetaan-pemetaan linier dari V ke K .

Proposisi 2.11. *Misalkan A suatu aljabar berdimensi hingga, maka A^* adalah suatu koaljabar.*

Proof. Misalkan $m : A \otimes A \rightarrow A$ dan $u : K \rightarrow A$ adalah produk dan unit dari A . Karena A berdimensi hingga, $(A \otimes A)^* \cong A^* \otimes A^*$, unsur di $(A \otimes A)^*$ dapat dipandang sebagai unsur di $A^* \otimes A^*$. Definisikan koproduk dan kounit dari A^* sebagai komposisi berikut:

$$\begin{aligned}\Delta : A^* &\xrightarrow{m^*} (A \otimes A)^* \xrightarrow{\cong} A^* \otimes A^*, \\ \epsilon : A^* &\xrightarrow{u^*} K^* \xrightarrow{\cong} K.\end{aligned}$$

Secara eksplisit, untuk setiap $f \in A^*$ dan untuk setiap $a, b \in A$, berlaku

$$\begin{aligned}(\Delta(f))(a \otimes b) &= f(m(a \otimes b)) = f(ab), \\ (\epsilon(f))(\lambda) &= f(u(\lambda)).\end{aligned}$$

Untuk membuktikan bahwa Δ bersifat koasosiatif, perhatikan bahwa untuk setiap $a, b, c \in A$ dan $f \in A^*$, berlaku:

$$\begin{aligned}(((\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta)(f))(a \otimes b \otimes c) &= (\Delta(f))(ab \otimes c) = f((ab)c) \\ &= f((ab)c) = (\Delta(f))(a \otimes bc) \\ &= (((\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta)(f))(a \otimes b \otimes c).\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $(\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta = (\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$. Dengan cara serupa, dapat ditunjukkan bahwa ϵ bersifat kounital. $\square$

Perhatikan bahwa pada pembuktian di atas, dibutuhkan isomorfisme ruang vektor $(A \otimes A)^* \cong A^* \otimes A^*$. Hal ini tidak berlaku jika A tidak berdimensi hingga karena secara umum $(A \otimes A)^*$ lebih besar daripada $A^* \otimes A^*$. Kebalikan dari Proposisi di atas juga berlaku, bahkan tanpa asumsi dimensi hingga. Jika C adalah suatu koaljabar C (tidak perlu berdimensi hingga), maka C^* adalah suatu aljabar. Hal ini dapat dibuktikan dengan membalikkan arah panah pada melakukan konstruksi di pembuktian Proposisi 2.11 di atas.

Seperti pada Proposisi 2.8, ruang kali tensor dari dua buah koaljabar adalah suatu koaljabar

Proposisi 2.12. *Misalkan C, D adalah dua buah koaljabar. Maka $C \otimes D$ adalah suatu koaljabar dengan koproduk dan kounit berikut*

$$\begin{aligned}\Delta_{C \otimes D}(c \otimes d) &= c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)} \\ \epsilon_{C \otimes D}(c \otimes d) &= \epsilon_C(c) \otimes \epsilon_D(d)\end{aligned}$$

Proof. Akan ditunjukkan bahwa $\Delta_{C \otimes D}$ bersifat koasiatif dan $\epsilon_{C \otimes D}$ bersifat kounital. Untuk yang pertama, dapat dengan menggunakan sifat koasosiatif pada C dan D , didapat

$$\begin{aligned}(\text{id}_{C \otimes D} \otimes \Delta_{C \otimes D})\Delta_{C \otimes D}(c \otimes d) &= c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes \Delta_{C \otimes D}(c_{(2)} \otimes d_{(2)}) \\ &= c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes c_{(2)(1)} \otimes d_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)} \otimes d_{(2)(2)} \\ &= c_{(1)(1)} \otimes d_{(1)(1)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes d_{(1)(2)} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)} \\ &= \Delta_{C \otimes D}(c_{(1)} \otimes d_{(2)}) \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)} \\ &= (\Delta_{C \otimes D} \otimes \text{id}_{C \otimes D})\Delta_{C \otimes D}(c \otimes d).\end{aligned}$$

Dengan cara serupa, dapat diperiksa bahwa $\epsilon_{C \otimes D}$ bersifat kounital. $\square$

Setelah mengetahui aljabar dan koaljabar, dapat didefinisikan *bialjabar* yang merupakan suatu aljabar sekaligus koaljabar sekaligus, dengan suatu kompatibilitas antara struktur aljabar dan koaljabarnya. Secara lengkap:

Definisi 2.13 (Bialjabar). *Suatu ruang vektor B disebut sebagai bialjabar jika (B, m, u) adalah aljabar, (B, Δ, ϵ) adalah koaljabar, dan Δ, ϵ adalah pemetaan aljabar.*

Berdasarkan Definisi 2.7, untuk sembarang $a, b \in B$, syarat Δ dan ϵ sebagai pemetaan aljabar dapat ditulis ulang sebagai berikut:

$$\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b), \quad \epsilon(ab) = \epsilon(a)\epsilon(b), \quad \Delta(1_B) = 1_B \otimes 1_B, \quad \epsilon(1_B) = 1_K.$$

Lebih lanjut, dengan notasi Sweedler, syarat Δ sebagai pemetaan aljabar dapat dituliskan kembali sebagai berikut:

$$\Delta(ab) = a_{(1)}b_{(1)} \otimes a_{(2)}b_{(2)}.$$

2.3. Aljabar Hopf. Perhatikan bahwa bialjabar memiliki sifat asosiatif dan koasosiatif, serta unital dan kounital. Sifat ini mirip seperti aksioma pada grup, sehingga di beberapa literatur, bialjabar dikatakan sebagai “linearisasi dari semi-grup”. Agar bialjabar dapat dianggap sebagai sepenuhnya sebagai “linearisasi dari grup” diperlukan sesuatu yang berperan sebagai unsur balikan, yang akan diperankan disebut sebagai *antipoda*. Sebelum membahas antipoda, perlu dibahas tentang aljabar konvolusi terlebih dahulu.

Misalkan (A, m, u) adalah suatu aljabar dan (C, Δ, ϵ) adalah suatu koaljabar. Pandang himpunan berikut

$$\text{Hom}(C, A) = \{f : C \rightarrow A \mid f \text{ pemetaan linier.}\}$$

Untuk setiap $f, g \in \text{Hom}(C, A)$, definisikan *perkalian konvolusi* sebagai komposisi berikut

$$\star : C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{f \otimes g} A \otimes A \xrightarrow{m} A,$$

atau dalam notasi Sweedler:

$$(f \star g)(c) = f(c_{(1)})g(c_{(2)}).$$

Proposisi 2.14. Misalkan (A, m, u) adalah suatu aljabar, dan (C, Δ, ϵ) adalah suatu koaljabar. Maka $(\text{Hom}(C, A), \star, u \circ \epsilon)$ adalah suatu aljabar, yang disebut sebagai aljabar konvolusi

Proof. Pertama, akan dibuktikan bahwa $\star$ bersifat asosiatif sebagai berikut: untuk setiap $f, g, h \in \text{Hom}(C, A)$, dan untuk setiap $c \in C$, berlaku

$$\begin{aligned} ((f \star g) \star h)(c) &= (f \star g)(c_{(1)})h(c_{(2)}) = (f(c_{(1)(1)})g(c_{(1)(2)}))h(c_{(2)}) \\ &= f(c_{(1)})(g(c_{(2)(1)})h(c_{(2)(2)})) = f(c_{(1)})((g \star h)(c_{(2)})) \\ &= f \star (g \star h)(c). \end{aligned}$$

Persamaan pertama dan kedua hanya merupakan penerapan langsung dari definisi perkalian konvolusi $\star$. Koasosiativitas koaljabar C menyatakan bahwa $c_{(1)(1)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes c_{(2)} = c_{(1)} \otimes c_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)}$. Karena kedua ekspresi ini merepresentasikan unsur yang sama di $C \otimes C \otimes C$, maka $c_{(1)(1)}$ dapat digantikan dengan $c_{(1)}$. Begitupun $c_{(1)(2)}$ dapat digantikan dengan $c_{(2)(1)}$, dan $c_{(2)}$ dengan $c_{(2)(2)}$. Kemudian dengan sifat asosiatif dari aljabar A , tanda kurung dapat digeser sehingga diperoleh persamaan ketiga. Terakhir, hasil perhitungan ini ditulis ulang dalam persamaan keempat dan kelima dengan kembali menggunakan definisi $\star$. Terbukti bahwa perkalian konvolusi $\star$ bersifat asosiatif.

Untuk setiap $f \in \text{Hom}(C, A)$ dan $c \in C$, dapat dihitung pula bahwa

$$(f \star (u \circ \epsilon))(c) = f(c_{(1)})(u(\epsilon(c_{(2)}))) = f(c)1_A = f(c).$$

Maka $f \star (u \circ \epsilon) = f$. Dengan cara yang serupa, didapat pula $(u \circ \epsilon) \star f = f$. Terbukti bahwa $u \circ \epsilon$ adalah unit di $\text{Hom}(C, A)$. $\square$

Jika $C = A = H$ adalah suatu bialjabar, berdasarkan Proposisi 2.14, $\text{End}(H) := \text{Hom}(H, H)$ dapat dilengkapi dengan operasi perkalian konvolusi sehingga membentuk suatu aljabar. Dari sini, dapat didefinisikan antipoda pada suatu bialjabar sebagai berikut

Definisi 2.15 (Antipoda). Misalkan $(H, m, u, \Delta, \epsilon)$ adalah suatu bialjabar. Suatu endomorfisme $S \in \text{End}(H)$ disebut sebagai antipoda bagi H jika S merupakan unsur balikan dari pemetaan identitas $\text{id} \in \text{End}(H)$. Dengan kata lain, berlaku

$$S \star \text{id} = u \circ \epsilon = \text{id} \star S.$$

Dengan menggunakan notasi Sweedler, kondisi pada S dapat ditulis ulang sebagai

$$(Sh_{(1)})h_{(2)} = 1_H \epsilon(h) = h_{(1)}(Sh_{(2)})$$

untuk setiap $h \in H$. Antipoda tidak selalu ada untuk setiap bialjabar. Untuk itu, didapatkan definisi aljabar Hopf sebagai berikut:

Definisi 2.16 (Aljabar Hopf). *Suatu bialjabar H disebut sebagai suatu aljabar Hopf jika H dilengkapi dengan antipoda $S : H \rightarrow H$.*

Setiap grup G dapat dilinierisasi menjadi ruang vektor $K[G]$, yaitu suatu ruang vektor atas lapangan K dengan unsurnya berupa polinomial dengan variabel di G . Dengan kata lain, grup G berperan sebagai basis bagi $K[G]$. Ruang vektor $K[G]$, yang disebut juga sebagai aljabar grup, adalah salah satu contoh utama dari aljabar Hopf yang relevan dengan artikel ini, yang dijelaskan pada contoh berikut.

Contoh 2.17. *Misalkan K adalah lapangan dan G adalah grup berhingga berorde n dan unsur identitas e . Definisikan aljabar grup $K[G]$ sebagai ruang vektor dengan basis G*

$$K[G] = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i g_i \mid \lambda_i \in K, g_i \in G \right\}.$$

Aljabar grup $K[G]$ adalah suatu aljabar Hopf dengan unit e , kounit 1_K , serta produk, koproduk, dan antipoda berikut

$$\left(\sum \lambda_i g_i \right) \left(\sum \lambda_j g_j \right) = \sum \lambda_i \lambda_j g_i g_j, \quad \Delta \left(\sum \lambda_i g_i \right) = \sum \lambda_i g_i \otimes g_i, \quad S \left(\sum \lambda_i g_i \right) = \sum \lambda_i g_i^{-1}.$$

Proof. Karena G adalah basis dari $K[G]$, dan $m, u, \Delta, \epsilon, S$ semuanya adalah pemetaan linier, maka cukup buktikan bahwa semua pemetaan ini memenuhi sifat-sifat yang disyaratkan di tiap unsur $g \in G$. Sebagai contoh, $\Delta g = g_{(1)} \otimes g_{(2)} = g \otimes g$ sehingga dapat dihitung bahwa sifat antipoda terpenuhi sebagai berikut

$$(Sg_{(1)})g_{(2)} = (Sg)g = g^{-1}g = e = gg^{-1} = gSg = g_{(1)}(Sg_{(2)}).$$

□

3. TEORI GALOIS KLASIK

Pembahasan mendalam mengenai Teori Galois dapat dilihat di [9, 11]. Untuk memulai pembahasan, diperlukan beberapa definisi terkait dengan lapangan sebagai berikut.

3.1. Ekstensi Lapangan. Misalkan F adalah suatu lapangan. Lapangan E disebut sebagai *ekstensi lapangan* dari F , ditulis E/F , jika $F \subseteq E$ adalah sublapangan. Salah satu cara alami untuk memperoleh ekstensi lapangan E/F dari lapangan F adalah dengan menambahkan beberapa unsur $\alpha_i \in E$ ke lapangan dasar F . Sebagai ilustrasi, jika unsur $\alpha, \beta \in E$ ditambahkan ke lapangan F , maka didapat ekstensi lapangan $E = F(\alpha, \beta)$. Setiap elemen $x \in F(\alpha, \beta)$ dapat dinyatakan sebagai

$$x = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij} \alpha^i \beta^j, \quad \text{dengan } a_{ij} \in F,$$

dengan $m = \deg p$ dan $n = \deg q$, dengan p dan q berturut-turut merupakan polinomial minimal dari α dan β atas F . Sebagai contoh, polinomial $x^2 - 2$ dan $x^2 - 3$ di $\mathbb{Q}[x]$ secara berturut-turut memiliki solusi $\sqrt{2}$ dan $\sqrt{3}$, namun $\sqrt{2}$ dan $\sqrt{3}$ bukanlah bilangan rasional. Lapangan $\mathbb{Q}$ dapat diperluas dengan menambahkan $\sqrt{2}$ dan $\sqrt{3}$, dan diperoleh lapangan baru yaitu

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}.$$

Lapangan $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ merupakan ekstensi dari $\mathbb{Q}$, dituliskan pula sebagai $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$. Perhatikan bahwa $x^2 - 2$ dan $x^2 - 3$ sekarang memiliki akar yang merupakan anggota $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Definisi 3.1. (*Ekstensi Sederhana*) Misalkan E/F adalah suatu ekstensi lapangan. Maka, ekstensi tersebut disebut sederhana jika $E = F(\alpha)$ untuk suatu $\alpha \in E$. Lebih lanjut, elemen α disebut bersifat aljabar atas F jika terdapat polinomial tak-nol p atas F sedemikian sehingga $p(\alpha) = 0$, jika sebaliknya, elemen α disebut transendental atas F .

Unsur α diasumsikan bersifat aljabar atas F , artinya α merupakan akar dari suatu polinomial minimal atas F . Polinomial minimal adalah polinomial monik m yang unik atas F dengan derajat terendah sedemikian sehingga $m(\alpha) = 0$.

Struktur simetri dari ekstensi lapangan E/F digambarkan oleh himpunan automorfisma $\text{Aut}(E)$ yang mempertahankan elemen di lapangan F . Himpunan automorfisma yang memenuhi sifat yang demikian disimbolkan oleh $\text{Aut}_F(E)$ dan membentuk suatu grup terhadap operasi komposisi yang disebut sebagai *grup Galois*.

Teorema 3.2. Misalkan E/F adalah ekstensi lapangan. Definisikan $\text{Aut}_F(E)$ sebagai himpunan automorfisma dari E yang mempertahankan semua unsur di F , atau dengan kata lain

$$\text{Aut}_F(E) = \{\sigma \in \text{Aut}(E) : \sigma(x) = x \text{ untuk setiap } x \in F\}.$$

Maka $\text{Aut}_F(E)$ adalah subgrup dari $\text{Aut}(E)$. Lebih lanjut, jika H adalah subgrup dari $\text{Aut}_F(E)$, maka

$$E_H := \{x \in E : \sigma(x) = x \text{ untuk setiap } \sigma \in H\}$$

adalah sublapangan dari E .

Proof. Berdasarkan definisinya, jelas bahwa $\text{Aut}_F(E) \subseteq \text{Aut}(E)$ dan tak kosong karena setidaknya terdapat $\text{id} \in \text{Aut}_F(E)$. Lebih lanjut, untuk setiap $\alpha, \beta \in \text{Aut}_F(E)$, berlaku $\alpha \circ \beta \in \text{Aut}(E)$ karena untuk setiap $x \in F$ dan $\alpha \circ \beta$ berlaku

$$(\alpha \circ \beta)(x) = \alpha(\beta(x)) = \alpha(x) = x.$$

Terbukti bahwa $\text{Aut}_F(E)$ adalah subgrup dari $\text{Aut}(E)$.

Untuk bagian terakhir, perhatikan bahwa $E_H \subseteq E$ dan terdapat $0, 1 \in E_H$ sehingga E_H tidak kosong. Perhatikan pula bahwa untuk setiap $x, y \in E_H$ dan $\sigma \in H$ berlaku

$$\sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y) = x + y, \quad \sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y) = xy.$$

Untuk setiap $x \neq 0$ berlaku pula

$$\sigma(x^{-1}) = \sigma(x)^{-1} = x^{-1}.$$

Terbukti bahwa E_H tertutup terhadap operasi yang sama dengan E , menjadikan E_H sublapangan dari E . $\square$

Notasikan $[E : F]$ sebagai derajat dari ekstensi E/F , yaitu dimensi dari E yang dipandang sebagai ruang vektor atas lapangan F . Derajat ekstensi dari E/F dengan $E = F(\alpha)$ dapat dihitung menggunakan derajat polinomial minimal dari α atas F dan hukum rantai berikut (lihat [11], Bab 6.2)

Teorema 3.3. Misalkan E ekstensi dari F dan terdapat sublapangan K dari E yang memuat F , dapat ditulis $F \subseteq K \subseteq E$, maka $[E : F] = [E : K][K : F]$.

Perhatikan bahwa untuk sembarang ekstensi lapangan E/F , berlaku

$$|\text{Aut}_F(E)| \leq [E : F].$$

Ketaksamaan di atas menjadi sama ketika ekstensi lapangan E/F adalah suatu *ekstensi Galois*, yaitu ekstensi lapangan yang bersifat normal dan terpisahkan, yang akan dibahas pada subbagian selanjutnya.

3.2. Ekstensi Normal, terpisahkan, dan Galois. Normal dan terpisahkan adalah sifat-sifat dari ekstensi lapangan. Sebelum mendefinisikannya, dibahas lebih dulu mengenai lapangan pemisah (*splitting field*).

Definisi 3.4. Suatu lapangan E adalah lapangan pemisah dari suatu polinomial tak-konstan $p(x)$ atas lapangan F jika E adalah ekstensi dari F yang memenuhi kondisi berikut:

- (1) $p(x) = a(x - c_1)(x - c_2)\dots(x - c_n)$ dengan $a \in E$ dan $c_1, c_2, \dots, c_n$ adalah akar-akar dari $p(x)$ di E .
- (2) $E = F(c_1, c_2, \dots, c_n)$.

Definisi 3.5. (*Ekstensi Normal*) Suatu ekstensi E/F adalah normal jika untuk setiap polinomial tak-tereduksi $p(x)$ atas F yang memiliki setidaknya satu akar di E terpecah di E .

Teorema berikut memberikan alternatif untuk menunjukkan suatu ekstensi adalah normal melalui lapangan pemisah.

Teorema 3.6. Suatu ekstensi berhingga E dari F adalah normal atas F jika dan hanya jika E adalah lapangan pemisah untuk suatu polinomial atas F .

Proof. Misalkan E suatu ekstensi berhingga dan normal atas F . Tulis $E = F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ dengan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in E$ adalah aljabar atas F . Dengan demikian, asumsikan bahwa $m_i(x)$ adalah polinomial minimal dari α_i atas F . Karena E adalah ekstensi normal, maka $m_i(x)$ terpecah sepenuhnya di E karena memiliki satu akar di E . Pandang polinomial $f(x) = m_1(x)m_2(x)\dots m_n(x) \in F$ memiliki seluruh akar di E . Dengan demikian, E adalah lapangan pemisah dari polinomial $f(x)$.

Untuk arah sebaliknya, misalkan E adalah ekstensi berhingga dan E adalah lapangan pemisah dari suatu polinomial $f(x)$ di F . Ambil sembarang $\alpha \in E$, maka terdapat polinomial minimal p_α atas F yang terpecah di E karena E adalah lapangan pemisah. Dengan demikian, setiap polinomial minimal terpecah di E . Hal ini menunjukkan bahwa E adalah ekstensi normal atas F . $\square$

Setelah mendefinisikan ekstensi normal, dibutuhkan pula ekstensi terpisahkan yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.7. (*Ekstensi terpisahkan*) Suatu polinomial $p(x)$ dengan derajat n disebut terpisahkan atas F jika $p(x)$ memiliki n akar berbeda di lapangan pemisah E atas F . Suatu elemen pada ekstensi E dari F terpisahkan atas F jika polinomial minimalnya terpisahkan atas F . Ekstensi E dari F terpisahkan jika setiap elemen di E terpisahkan di F .

Setelah mendefinisikan ekstensi lapangan yang normal dan terpisahkan, dapat didefinisikan ekstensi Galois seperti berikut

Definisi 3.8. (*Ekstensi Galois*) Suatu ekstensi E dari F adalah Galois jika dan hanya jika normal dan terpisahkan.

Ingat kembali bahwa pertaksamaan $|\text{Aut}_F(E)| \leq [E : F]$ berubah menjadi persamaan tepat ketika ekstensi E/F memiliki jumlah automorfisma yang maksimum. Pada kasus ini, ekstensi lapangan menjadi ekstensi Galois.

Teorema 3.9. ([9, Korolari 2.16]) Misalkan E/F adalah ekstensi berhingga. Maka ekstensi E/F adalah Galois jika dan hanya jika $|\text{Aut}_F(E)| = [E : F]$.

Catatan 3.10. Jika ekstensi E/F adalah Galois, maka grup Galois $\text{Aut}_F(E)$ akan dinotasikan sebagai $\text{Gal}(E/F)$.

3.3. Struktur grup Galois pada ekstensi lapangan $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)/\mathbb{Q}$. Subbagian ini difokuskan pada konstruksi eksplisit struktur simetri dari ekstensi lapangan yang didapatkan dari polinomial $f(x) = x^4 - 2$ atas $\mathbb{Q}$. Ekstensi ini merupakan contoh dasar yang dibahas di [9, 11], dan mencerminkan struktur dan sifat penting dalam teori Galois.

Contoh 3.11. Misalkan $f(x) = x^4 - 2$ adalah polinomial atas $\mathbb{Q}$, maka $E = \mathbb{Q}(\alpha, i)$ adalah lapangan pemisah dari f atas $\mathbb{Q}$ dan $E/\mathbb{Q}$ merupakan suatu ekstensi Galois dengan derajat ekstensi $[\mathbb{Q}(\alpha, i) : \mathbb{Q}] = 8$.

Proof. Perhatikan bahwa $f(x) = x^4 - 2$ dapat difaktorkan menjadi

$$x^4 - 2 = (x - \alpha)(x + \alpha)(x - i\alpha)(x + i\alpha),$$

dengan $\alpha = \sqrt[4]{2}$ adalah suatu bilangan real positif dan $\mathbb{Q}(\alpha, i)$ adalah lapangan terkecil yang memuat seluruh akar dari f . Dengan demikian, E adalah lapangan pemisah dari f atas $\mathbb{Q}$.

Berdasarkan Teorema 3.6, $E/\mathbb{Q}$ adalah ekstensi berhingga dan normal. Polinomial minimal dari α atas $\mathbb{Q}$ adalah $f(x) = x^4 - 2$ yang memiliki 4 akar berbeda sehingga α terpisahkan atas $\mathbb{Q}$. Polinomial minimal dari i atas $\mathbb{Q}$ adalah $g(x) = x^2 + 1$ yang memiliki 2 akar berbeda sehingga i terpisahkan atas $\mathbb{Q}$. Karena seluruh elemen di E dibangun oleh α dan i yang keduanya terpisahkan, maka $E/\mathbb{Q}$ adalah ekstensi terpisahkan. Dengan demikian, ekstensi $\mathbb{Q}(\alpha, i)/\mathbb{Q}$ adalah suatu ekstensi Galois.

Perhatikan bahwa, $\deg(g(x)) = 2$ sebagai polinomial minimal dari i atas $\mathbb{Q}(\alpha) \supseteq \mathbb{Q}$, maka $[E : \mathbb{Q}(\alpha)] = 2$. Dengan langkah serupa, $\deg(f(x)) = 4$ sehingga $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 4$. Dengan menggunakan hukum rantai Teorema 3.3, didapat $[E : \mathbb{Q}] = [E : \mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 4 = 8$. $\square$

Selanjutnya, akan ditentukan seluruh unsur dari grup $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$. Perhatikan bahwa sembarang g di $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ akan memetakan i ke akar dari $g(x)$, yaitu $i \mapsto \pm i$ dan α akan dipetakan ke akar dari $f(x)$, yaitu $\alpha \mapsto \pm\alpha, \pm i\alpha$. Definisikan:

$$\begin{aligned} \sigma(i) &= i & \sigma(\alpha) &= i\alpha \\ \tau(i) &= -i & \tau(\alpha) &= \alpha \end{aligned}$$

Ada sebanyak $2 \cdot 4 = 8$ cara untuk mendefinisikan seluruh automorfisma dari E . Hal ini sesuai dengan definisi $E/\mathbb{Q}$ sebagai ekstensi Galois, yaitu $|\text{Gal}(E/\mathbb{Q})| = [E : \mathbb{Q}] = 8$. Masing-masing dari 8 automorfisma dan efeknya pada i dan α ditulis dalam tabel berikut:

Automorfisma	Evaluasi di α	Evaluasi di i
id	α	i
σ	$i\alpha$	i
σ^2	$-\alpha$	i
σ^3	$-i\alpha$	i
τ	α	$-i$
$\sigma\tau$	$i\alpha$	$-i$
$\sigma^2\tau$	$-\alpha$	$-i$
$\sigma^3\tau$	$-i\alpha$	$-i$

TABEL 1. Grup $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$

Kombinasi lainnya tidak menghasilkan automorfisme baru karena adanya relasi berikut:

$$\sigma^4 = \text{id}, \quad \tau^2 = \text{id}, \quad \tau\sigma = \sigma^3\tau, \quad \tau\sigma^2 = \sigma^2\tau, \quad \tau\sigma^3 = \sigma\tau.$$

Tinjau sublapangan $\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha, i)$. Ekstensi $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ merupakan ekstensi terpisahkan karena polinomial minimal dari $\alpha = \sqrt[4]{2}$ atas $\mathbb{Q}$, yaitu $f(x) = x^4 - 2$, memiliki akar-akar berbeda, yaitu $\pm\alpha, \pm i$. Namun, ekstensi ini tidak normal karena $\pm i\alpha$ bukanlah elemen di $\mathbb{Q}(\alpha)$. Oleh karena itu, ekstensi $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ bukan ekstensi Galois dengan derajat ekstensi $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 4$.

Grup Galois dari $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ tetap dapat ditentukan, yaitu $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\alpha) = \{\text{id}, \sigma\}$ dengan

$$\text{id}(\alpha) = \alpha, \quad \sigma(\alpha) = -\alpha.$$

Perhatikan bahwa σ ini berbeda dengan σ pada Tabel 1. Dapat dilihat bahwa $|\text{Aut}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\alpha)| = 2 < [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 4$. Hal ini menunjukkan bahwa $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\alpha)$ tidak dapat sepenuhnya menangkap simetri pada ekstensi lapangan secara utuh karena kardinalitas grup Galoisnya tidak mencapai derajat ekstensinya.

4. EKSTENSI HOPF-GALOIS DAN CONTOHNYA

Pada Bagian 3.3, telah dibahas bahwa ekstensi lapangan yang terpisahkan namun tidak normal tetap bersesuaian dengan suatu grup Galois. Hanya saja, seperti yang sudah diilustrasikan, grup Galois yang dibentuk tidak dapat menangkap keseluruhan simetri yang muncul. Hal ini diakibatkan oleh keterbatasan struktur grup $\text{Aut}_F(E)$ yang unsur-unsurnya tidak dapat dikombinasikan secara linier. Oleh karena itu, ide utama untuk menyelesaikan masalah ini adalah dengan melakukan linierisasi grup menjadi aljabar grup. Pada Contoh 2.17, diketahui bahwa aljabar grup merupakan suatu aljabar Hopf. Oleh karena itu, peran grup dapat digantikan oleh aljabar Hopf dan teori ekstensi Galois dapat diperumum ke dalam kerangka aljabar Hopf, yang disebut sebagai ekstensi Hopf-Galois [3, 6].

4.1. Ekstensi Hopf-Galois. Misalkan E/F adalah ekstensi berhingga dan terpisahkan dengan $\text{Aut}_F(E)$ sebagai grup Galois yang bersesuaian. Setiap $\sigma \in \text{Aut}_F(E)$ mengirimkan setiap akar $\alpha_i \in E$ ke $\sigma(\alpha_i) \in E$ sehingga grup Galois beraksi pada lapangan E :

$$\begin{aligned} \phi : \text{Aut}_F(E) \times E &\rightarrow E \\ \sigma \cdot x &\mapsto \sigma(x) \end{aligned}$$

Aksi tersebut diperluas secara F -linier menjadi aksi dari aljabar grup $F[G]$ pada E dengan $G \leq \text{Aut}_F(E)$.

$$\left(\sum_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma \right) \cdot x = \sum_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma(x).$$

Konsep ekstensi Galois dapat dirumuskan kembali sebagai berikut (lihat [5], Teorema 4.2.3)

Teorema 4.1. Misalkan E/F adalah ekstensi lapangan yang berhingga dan terpisahkan dengan G adalah subgrup dari $\text{Aut}_F(E)$. Maka ekstensi E/F adalah Galois dengan grup G jika dan hanya jika pemetaan

$$\phi : E \otimes_F F[G] \rightarrow \text{End}_F(E), \quad \phi(x \otimes \sigma)(y) = x\sigma(y)$$

untuk setiap $x, y \in E$ dan $\sigma \in F[G]$, adalah suatu bijeksi.

Dengan mengganti $F[G]$ dengan sembarang aljabar Hopf, diperoleh definisi dari ekstensi Hopf-Galois sebagai berikut:

Definisi 4.2. Misalkan E/F adalah ekstensi lapangan berhingga dan H adalah aljabar Hopf berhingga atas F . Maka, E/F disebut ekstensi H -Galois jika terdapat homomorfisme aljabar

$$\mu : H \rightarrow \text{End}_F E$$

sedemikian sehingga kondisi berikut terpenuhi:

- (1) $(1, \mu) : E \otimes H \rightarrow \text{End}_F(E)$ dengan $(1, \mu)(x \otimes h)(y) = x(h \cdot y)$ adalah isomorfisme.
- (2) $h \cdot (xy) = (h_{(1)} \cdot x)(h_{(2)} \cdot y)$
- (3) $h \cdot 1_E = \epsilon(h)(1_E)$.

Ekstensi E/F adalah ekstensi H -Galois jika memuat pasangan (H, μ) dengan H suatu aljabar Hopf dan μ adalah aksi Hopf. Perhatikan pada definisi di atas, struktur Hopf Galois (H, μ) tidak tunggal. Hal ini akan diilustrasikan pada Bagian 4.3.

4.2. Struktur Hopf-Galois pada Ekstensi Terpisahkan. Misalkan E/F dengan $E = F(\alpha)$ adalah ekstensi berhingga dan terpisahkan dengan derajat ekstensi n . Misalkan f adalah polinomial minimal dari α atas F dengan $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ adalah akar dari f . Tetapkan $\alpha = \alpha_1$.

Definisikan $\tilde{E}$ sebagai *penutup normal* dari E/F , yaitu ekstensi terkecil dari E yang normal atas F . Artinya, $\tilde{E}/F$ dan $\tilde{E}/E$ keduanya adalah ekstensi normal, sehingga dapat dibentuk grup Galois $G = \text{Gal}(\tilde{E}/F)$ dan $G' = \text{Gal}(\tilde{E}/E)$. Berdasarkan konstruksinya, G' adalah subgrup dari G sehingga dapat dibentuk himpunan koset kiri $S = G/G'$ yang berorde n . Dari teori grup, ingat bahwa $\text{Perm}(S) \cong S_n$. Penjelasan di atas dideskripsikan melalui diagram berikut:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{E} & \xrightarrow{G'} & E & \xrightarrow{\quad} & F \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & G & & \end{array}$$

Berdasarkan [5, Bab 5.2], Grup G dapat disisipkan ke dalam grup simetri S_n sebagai subgrup transitif, artinya setiap elemen di G akan bertindak sebagai permutasi akar-akar dari f .

Sebelum pembahasan lebih lanjut, diperlukan definisi berikut:

Definisi 4.3. Subgrup $N \subseteq S_n$ disebut *regular* jika untuk setiap $i, j \in S$, terdapat secara tunggal $\sigma \in N$ sehingga berlaku $\sigma(i) = j$.

Definisi 4.4. Subgrup $G \subseteq S_n$ disebut *menormalisasi* N jika $gng^{-1} \in N, \forall g \in G, n \in N$.

Karakterisasi struktur Hopf-Galois dari suatu ekstensi lapangan E/F yang berhingga dan terpisahkan diberikan oleh Greither dan Pareigis melalui teorema berikut:

Teorema 4.5. [6, Teorema 2.1] Misalkan E/F adalah ekstensi berhingga dan terpisahkan. Maka pernyataan berikut ekuivalen:

- (1) Terdapat aljabar Hopf H atas F sedemikian sehingga E/F adalah ekstensi H -Galois.
- (2) Terdapat subgrup regular $N \subset \text{Perm}(S)$ sedemikian sehingga subgrup $G \subset \text{Perm}(S)$ menormalisasi N .

Selanjutnya akan dilihat bagaimana mengkonstruksi secara eksplisit struktur Hopf-Galois pada Definisi 4.2 dari ekstensi E/F yang tidak normal sesuai dengan Teorema 4.5. Konstruksi berikut ini didapat dari [5, Bab 5.2].

Misalkan $\{x_i : i \in \{1, \dots, [\tilde{E} : F]\}\}$ adalah basis dari $\tilde{E}$ sebagai ruang vektor atas F . Sehingga dapat ditulis:

$$\tilde{E}[N] = \left\{ \sum_{m \in N} \lambda_m m : \lambda_m \in \tilde{E} \right\} \text{ dengan } \lambda_m = \left\{ \sum_{i=1}^{[\tilde{E}:F]} \mu_{i,m} x_i : \mu_{i,m} \in F \right\}$$

Ingat bahwa aljabar grup $\tilde{E}[N]$ adalah aljabar Hopf atas lapangan $\tilde{E}$ karena skalar λ_m berada di $\tilde{E}$ (lihat kembali Contoh 2.17). Namun, karena setiap $\lambda_m \in \tilde{E}$ dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari elemen basis x_i dengan koefisien di F , maka $\tilde{E}[N]$ adalah suatu aljabar atas F . Lebih lanjut, G beraksi pada $\tilde{E}[N]$:

$$g \cdot \left(\sum_{m \in N} \lambda_m m \right) = \sum_{m \in N} g(\lambda_m) gmg^{-1}.$$

Karena N dinormalisasi oleh G , maka gmg^{-1} tetap berada di N .

Definisikan H sebagai subaljabar Hopf dari $\tilde{E}[N]$ yang menetapkan elemen-elemen di $\tilde{E}[N]$ melalui aksi di atas, yaitu:

$$H := \left\{ x \in \tilde{E}[N] : g(x) = x \quad \forall g \in G \right\}. \quad (2)$$

Perhatikan bahwa untuk setiap $g \in G$ dan $x \in H$:

$$g(x) = g \left(\sum_{m \in N} \lambda_m m \right) = \sum_{m \in N} g(\lambda_m) gmg^{-1} = \sum_{m \in N} g(\lambda_{g^{-1}mg}) m = \left(\sum_{m \in N} \lambda_m m \right) = x.$$

Dengan demikian, diperoleh relasi yang dipenuhi oleh koefisien-koefisien dari elemen-elemen di dalam H , yaitu:

$$\lambda_m = g(\lambda_{g^{-1}mg}) \quad \forall g \in G.$$

Untuk menentukan aksi Hopf, beri penomoran pada koset kiri di S dari 1 sampai n , yaitu:

$$g_1 G' := G', g_2 G', \dots, g_n G'.$$

Elemen di $N \subset \text{Perm}(S) \cong S_n$ dapat direpresentasikan sebagai permutasi dari koset-koset kiri. Definisikan pemetaan F -linier $\psi : \tilde{E}[N] \rightarrow \text{End}_F \tilde{E}$ dengan aturan

$$m \in N \mapsto g_i, \quad r \in \tilde{E} \mapsto [f \mapsto rf] \quad (3)$$

yang memenuhi $m^{-1}(1) = g_i G'$. Syarat ini diberikan sebagai kompatibilitas antara elemen $m \in N$ dengan elemen $g_i \in G$ sehingga aksi m pada koset kiri G/G' dapat dikaitkan secara konsisten dengan aksi g_i pada $\tilde{E}$. Karena $H \subseteq \tilde{E}[N]$ dan $\psi(h)(x) \in E$ untuk setiap $h \in H, x \in E$ atau dengan kata lain aksi H pada E tertutup di E , maka pemetaan ψ dapat direstriksi menjadi homomorfisma aljabar berikut:

$$\mu := \psi|_H : H \rightarrow \text{End}_F E. \quad (4)$$

Dengan demikian, telah berhasil dikonstruksi struktur Hopf-Galois, yaitu pasangan (H, μ) dari suatu ekstensi E/F yang berhingga dan terpisahkan.

4.3. Struktur Hopf-Galois pada ekstensi lapangan $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$. Pada bagian ini, dikaji kembali contoh ekstensi lapangan yang terpisahkan tetapi tidak normal, yaitu $E/\mathbb{Q}$ dengan $E = \mathbb{Q}(\alpha)$ yang telah dibahas di akhir Bagian 3.3.

Untuk memperoleh ekstensi yang normal, didefinisikan $\tilde{E} = \mathbb{Q}(\alpha, i)$ sebagai penutup normal dari $E/\mathbb{Q}$ sedemikian sehingga ekstensi $\tilde{E}/\mathbb{Q}$ adalah ekstensi Galois. Dapat diperiksa bahwa ekstensi $\tilde{E}/E$ juga merupakan ekstensi Galois. Tujuan akhir dari bagian ini adalah untuk menunjukkan bahwa $E/\mathbb{Q}$ adalah ekstensi H -Galois dengan menyertakan struktur Hopf-Galoisnya. Proses dilakukan dengan menggunakan Teorema 4.5 sehingga harus ditunjukkan eksistensi dari subgroup regular $N \subseteq \text{Perm}(S)$ yang dinormalisasi oleh $G = \text{Gal}(\tilde{E}/\mathbb{Q}) \subseteq \text{Perm}(S)$.

Berdasarkan hasil dari Bagian 3.3 dan pemeriksaan melalui Tabel 1, didapatkan:

$$\begin{aligned} G &= \text{Gal}(\tilde{E}/\mathbb{Q}) = \langle \sigma, \tau | \sigma^4 = \text{id}, \tau^2 = \text{id}, \tau\sigma = \sigma^3\tau \rangle \\ G' &= \text{Gal}(E/\mathbb{Q}) = \langle \tau | \tau^2 = \text{id} \rangle \\ S = G/G' &= \{G', \sigma G', \sigma^2 G', \sigma^3 G'\}, \quad \text{Perm}(S) \cong S_4. \end{aligned}$$

Ingat kembali bahwa G dapat disisipkan ke dalam S_4 sebagai subgroup transitif, artinya setiap elemen di G akan bertindak sebagai permutasi akar-akar dari $x^4 - 2$. Untuk itu, perlu dilakukan pelabelan sebagai berikut:

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = i\alpha, \quad \alpha_3 = -\alpha, \quad \alpha_4 = -i\alpha.$$

Berdasarkan pelabelan tersebut, masing-masing automorfisma di G direpresentasikan sebagai permutasi-permutasi di S_4 dengan hasil sebagai berikut:

Automorfisma	Representasi Permutasi
id	(1)
σ	(1 2 3 4)
σ^2	(1 3)(2 4)
σ^3	(1 4 3 2)
τ	(2 4)
$\sigma\tau$	(1 2)(3 4)
$\sigma^2\tau$	(1 3)
$\sigma^3\tau$	(1 4)(2 3)

TABEL 2. Representasi Permutasi Grup $\text{Gal}(\tilde{E}/\mathbb{Q})$

Maka, G adalah subgroup dari S_4 yang dibangun oleh permutasi $\sigma = (1234)$ dan $\tau = (24)$. Dengan kata lain, $G = \langle (1234), (24) \rangle \cong D_4$.

Lema 4.6. Misalkan $E/\mathbb{Q}$ adalah suatu ekstensi berhingga dan terpisahkan. Misalkan pula S_4 adalah grup simetri, dan $G = \langle \sigma, \tau \rangle$ adalah subgrup dari S_4 yang dibangun oleh $\sigma = (1234)$ dan $\tau = (24)$. Tulis $\rho = \sigma$, maka terdapat subgrup regular $N = \langle \rho \rangle = \{\text{id}, \rho, \rho^2, \rho^3\} \cong \mathbb{Z}_4$ dari S_4 yang dinormalisasi oleh G .

Proof. Akan dibuktikan bahwa N bersifat reguler, yaitu untuk setiap $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, terdapat unik $m \in N = \langle \rho \rangle \cong \mathbb{Z}_4$ sedemikian sehingga $m(i) = j$ (lihat Definisi 4.3). Dari Tabel 2, $\sigma = \rho$, sehingga dapat diperiksa bahwa:

$$\begin{aligned} \text{Untuk } i = 1 \text{ berlaku: } & \text{id}(1) = 1, \quad \rho(1) = 2, \quad \rho^2(1) = 3, \quad \rho^3(1) = 4 \\ \text{Untuk } i = 2 \text{ berlaku: } & \text{id}(2) = 2, \quad \rho(2) = 3, \quad \rho^2(2) = 4, \quad \rho^3(2) = 1 \\ \text{Untuk } i = 3 \text{ berlaku: } & \text{id}(3) = 3, \quad \rho(3) = 4, \quad \rho^2(3) = 1, \quad \rho^3(3) = 2 \\ \text{Untuk } i = 4 \text{ berlaku: } & \text{id}(4) = 4, \quad \rho(4) = 1, \quad \rho^2(4) = 2, \quad \rho^3(4) = 3. \end{aligned}$$

Berikutnya, akan dibuktikan bahwa G menormalisasi N , yaitu $gng^{-1} \in N$ untuk setiap $g \in G$ dan $n \in N$ (lihat Definisi 4.4). Untuk setiap $\rho^k \in N$ dan $\sigma, \tau \in G$ dengan $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ dan $\rho^0 = \text{id}$ berlaku:

$$\sigma \rho^k \sigma^{-1} = \rho \rho^k \rho^{-1} = \rho^{1+k-1} = \rho^k \in N.$$

Ingat bahwa elemen di grup G memiliki relasi $\tau\sigma = \sigma^3\tau$ sehingga berlaku:

$$\tau \rho^k \tau^{-1} = (\tau \rho \tau^{-1})^k = (\rho^3)^k \in N.$$

Karena G dibangun oleh σ dan τ yang masing-masing menormalisasi N , maka setiap $g \in G$ menormalisasi N . Dengan demikian terbukti bahwa N adalah subgrup regular dari S_4 yang dinormalisasi oleh G . $\square$

Sebagai teorema utama pada artikel ini, terdapat aljabar Hopf H atas $\mathbb{Q}$ yang merupakan subaljabar Hopf dari aljabar grup $\tilde{E}[N]$ sedemikian sehingga $E/\mathbb{Q}$ adalah ekstensi H -Galois.

Teorema 4.7. Misalkan $E/\mathbb{Q}$ adalah ekstensi berhingga dan terpisahkan dengan $N = \{\text{id}, \rho, \rho^2, \rho^3\}$ diberikan pada Lema 4.6. Maka terdapat struktur Hopf-Galois (H, μ) pada $E/\mathbb{Q}$ sehingga ekstensi lapangan $E/\mathbb{Q}$ adalah ekstensi H -Galois dengan H adalah aljabar Hopf dengan basis atas $\mathbb{Q}$ sebagai berikut:

$$H = \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\text{id}, \rho + \rho^3, (\rho - \rho^3)i, \rho^2\}.$$

Proof. Berdasarkan Teorema 4.5, aljabar Hopf yang bersesuaian dengan $E/\mathbb{Q}$ dapat ditentukan melalui Persamaan (2) sebagai berikut:

$$H = \left\{ \sum_{k=0}^3 \lambda_{\rho^k} \rho^k \in \tilde{E}[N] : g(x) = x, \text{ untuk setiap } g \in G \right\}. \quad (5)$$

Ingat bahwa koefisien-koefisien dari elemen-elemen di dalam H harus memenuhi:

$$\lambda_{\rho^k} = g(\lambda_{g^{-1}\rho^k g}), \quad \forall g \in G.$$

Akan dihitung λ_{ρ^k} untuk setiap $k \in \{0, 1, 2, 3\}$:

- (1) Untuk $k = 0$, berlaku $\lambda_{\text{id}} = g(\lambda_{g^{-1}\text{id}g}) = g(\lambda_{\text{id}})$ untuk setiap $g \in G$. Perhatikan bahwa $\lambda_{\text{id}} \in \tilde{E}$ adalah elemen tetap dibawah seluruh automorfisma di G . Dengan demikian λ_{id} haruslah elemen lapangan dasar, yaitu $\lambda_{\text{id}} \in \mathbb{Q}$.
- (2) Untuk kasus $k \in \{1, 2, 3\}$ dengan $g = \sigma$, berlaku $\lambda_{\rho^k} = \sigma(\lambda_{\sigma^{-1}\rho^k\sigma}) = \sigma(\lambda_{\rho^k})$. Dengan demikian, $\lambda_{\rho^k} \in \tilde{E}$ adalah elemen tetap di bawah σ , yaitu $\lambda_{\rho^k} \in \tilde{E}^{(\sigma)} = \{x \in \tilde{E} : \sigma(x) = x\} = \mathbb{Q}(i)$.
- (3) Untuk kasus $k \in \{1, 2, 3\}$ dengan $g = \tau$, berlaku $\lambda_{\rho^k} = \tau(\lambda_{\tau^{-1}\rho^k\tau}) = \tau(\lambda_{(\tau^{-1}\rho\tau)^k}) = \tau(\lambda_{(\tau\rho\tau^{-1})^k}) = \tau(\lambda_{(\rho^3)^k})$. Hal ini terjadi karena $\tau^2 = \text{id}$ jika dan hanya jika $\tau = \tau^{-1}$, dan juga karena adanya relasi $\tau\sigma = \sigma^3\tau$. Dengan demikian, diperoleh $\lambda_{\rho^k} = \tau(\lambda_{\rho^{3k}})$.

Berdasarkan hasil perhitungan di atas, diperoleh hasil lebih lanjut sebagai berikut:

- (i) $\lambda_{\text{id}} \in \mathbb{Q}$, tulis $\lambda_{\text{id}} = \lambda$.
- (ii) $\lambda_\rho \in \mathbb{Q}(i)$ dan berlaku $\lambda_\rho = \tau(\lambda_{\rho^3}) \iff \tau^{-1}(\lambda_\rho) = \lambda_{\rho^3} \iff \lambda_{\rho^3} = \tau(\lambda_\rho)$.
Tulis $\lambda_\rho = b + ci$, dengan $b, c \in \mathbb{Q}$.
- (iii) $\lambda_{\rho^2} \in \mathbb{Q}(i)$, yaitu $\lambda_{\rho^2} = \sigma(\lambda_{\rho^2})$. Lebih lanjut, $\lambda_{\rho^2} = \tau(\lambda_{\rho^6}) = \tau(\lambda_{\sigma^2})$. Perhatikan bahwa λ_{ρ^2} tetap di bawah seluruh automorfisma di $g \in G = \langle \sigma, \tau \rangle$ sehingga $\lambda_{\rho^2} \in \mathbb{Q}$, tulis $\lambda_{\rho^2} = \mu$.
- (iv) Berdasarkan poin ke dua, $\lambda_{\rho^3} = \tau(\lambda_\rho) = \tau(b + ci) = \tau(b) + c\tau(i) = b - ci$. Dengan demikian, $\lambda_{\rho^3} = b - ci$, dengan $b, c \in \mathbb{Q}$, adalah konjugasi dari λ_ρ .

Dengan demikian, dari Persamaan (5), setiap $x \in H$ dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari $\{\text{id}, \rho, \rho^2, \rho^3\}$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} x &= \lambda \text{id} + (b + ci)\rho + \mu\rho^2 + (b - ci)\rho^3 \\ &= \lambda \text{id} + b(\rho + \rho^3) + c(\rho - \rho^3)i + \mu\rho^2 \end{aligned}$$

dengan $\lambda, b, c, \mu \in \mathbb{Q}$. Didapat basis dari H sebagai ruang vektor atas $\mathbb{Q}$ sebagai berikut:

$$\{\text{id}, \rho + \rho^3, (\rho - \rho^3)i, \rho^2\}.$$

Selanjutnya akan ditentukan aksi Hopf $\mu : H \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Q}} E$. Untuk melakukannya, perlu dilihat bagaimana pemetaan $\psi : \tilde{E}[N] \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Q}} \tilde{E}$ didefinisikan. Ingat kembali, $\psi(\rho^k) = g_j$ sedemikian sehingga $(\rho^k)^{-1}(1) = g_j G'$. Lakukan penomoran pada koset kiri G/G' sebagai berikut:

$$g_1 G' = G', \quad g_2 G' = \sigma G', \quad g_3 G' = \sigma^2 G', \quad g_4 G' = \sigma^3 G'.$$

Berdasarkan penomoran tersebut, menggunakan aturan pemetaan pada Persamaan (3), diperoleh oleh $\psi : \tilde{E}[N] \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Q}} \tilde{E}$ yang memetakan

$$\rho^k \in N \mapsto \sigma^{-k}, \quad r \in \tilde{E} \mapsto [f \mapsto rf].$$

Perhatikan bahwa hasil peta dari ρ^k didapat karena $((\rho^k)^{-1})(1) = (\rho^{-k})(1) = \sigma^{-k} G'$.

Notasi σ^{-k} menyatakan invers dari σ^k . Karena $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, maka $\sigma^{-k} = \sigma^{4-k}$. Dengan demikian, restriksi pemetaan ψ dan sesuai dengan Persamaan (4), diperoleh aksi Hopf $\mu := \psi_H : H \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Q}} E$, dengan aturan

$$\text{id} \mapsto \text{id}, \quad \rho^2 \mapsto \sigma^{-2} = \sigma^2, \quad \rho + \rho^3 \mapsto \sigma^3 + \sigma, \quad (\rho - \rho^3)i \mapsto (\sigma^3 - \sigma)i.$$

Dapat diperiksa bahwa:

$$\text{id}(\alpha) = \alpha, \quad (\sigma^3 + \sigma)(\alpha) = 0, \quad ((\sigma^3 - \sigma)i)(\alpha) = 2\alpha, \quad \sigma^2(\alpha) = -\alpha.$$

yang menunjukkan bahwa simetri dari ekstensi lapangan $E/\mathbb{Q}$ tertangkap sepenuhnya melalui aksi Hopf. $\square$

Ingat bahwa pada Definisi 4.2, suatu ekstensi Hopf-Galois bisa saja memiliki struktur Hopf-Galois yang berbeda. Hal ini akan diilustrasikan melalui contoh berikut: misalkan $E = \mathbb{Q}(\alpha)$ dan $E/\mathbb{Q}$ adalah ekstensi terpisahkan seperti yang telah dijelaskan di atas. Pada lema berikut, terdapat subgrup regular lain dari S_4 yang berbeda dengan Lema 4.6 yang dinormalisasi oleh G .

Lema 4.8. *Misalkan $E/\mathbb{Q}$ adalah suatu ekstensi berhingga dan terpisahkan. Misalkan pula S_4 adalah grup simetri, dan $G = \langle \sigma, \tau \rangle$ adalah subgrup dari S_4 yang dibangun oleh $\sigma = (1234)$ dan $\tau = (24)$. Tulis $\rho = \sigma$, maka terdapat subgrup regular $N' = \langle \rho^2, \rho\tau \rangle = \{\text{id}, \rho^2, \rho\tau, \rho^3\tau\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ dari S_4 yang dinormalisasi oleh G .*

Proof. Pembuktian ini serupa seperti pada pembuktian Lema 4.6. Pertama, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \text{Untuk } i = 1 \text{ berlaku:} & \quad \text{id}(1) = 1, \quad \rho^2(1) = 3, \quad \rho\tau(1) = 2, \quad \rho^3\tau(1) = 4 \\ \text{Untuk } i = 2 \text{ berlaku:} & \quad \text{id}(2) = 2, \quad \rho^2(2) = 4, \quad \rho\tau(2) = 1, \quad \rho^3\tau(2) = 3 \\ \text{Untuk } i = 3 \text{ berlaku:} & \quad \text{id}(3) = 3, \quad \rho^2(3) = 1, \quad \rho\tau(3) = 4, \quad \rho^3\tau(3) = 2 \\ \text{Untuk } i = 4 \text{ berlaku:} & \quad \text{id}(4) = 4, \quad \rho^2(4) = 2, \quad \rho\tau(4) = 3, \quad \rho^3\tau(4) = 1. \end{aligned}$$

sehingga, berdasarkan Definisi 4.3, disimpulkan bahwa N' adalah subgrup regular dari S_4 .

Berikutnya akan ditunjukkan bahwa G menormalisasi N' . Dapat dilihat bahwa untuk setiap $\sigma, \tau \in G$ dan $\rho^2, \rho\tau \in N'$, berlaku

$$\sigma(\rho^2)\sigma^{-1} = \rho^2, \quad \tau(\rho^2)\tau^{-1} = \rho^2, \quad \sigma(\rho\tau)\sigma^{-1} = \rho^3\tau, \quad \tau(\rho\tau)\tau^{-1} = \rho^3\tau$$

yang semuanya merupakan anggota dari N' . Dengan demikian, berdasarkan Definisi 4.4, disimpulkan bahwa N' adalah subgrup regular dari S_4 yang dinormalisasi oleh G . $\square$

Dari Lema 4.8, terdapat aljabar Hopf H' atas $\mathbb{Q}$ yang merupakan subaljabar Hopf dari aljabar grup $\tilde{E}[N']$ sedemikian sehingga $E/\mathbb{Q}$ adalah ekstensi H' -Galois. Konstruksi aljabar Hopf H' diberikan di teorema berikut.

Teorema 4.9. *Misalkan $E/\mathbb{Q}$ adalah ekstensi berhingga dan terpisahkan dengan $N' = \{\text{id}, \rho^2, \rho\tau, \rho^3\tau\}$ diberikan pada Lema 4.8. Maka terdapat struktur Hopf Galois (H', μ') pada $E/\mathbb{Q}$, sedemikian sehingga ekstensi lapangan $E/\mathbb{Q}$ adalah H' -Galois dengan H' adalah aljabar Hopf dengan basis atas $\mathbb{Q}$ sebagai berikut:*

$$H' = \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\text{id}, \rho\tau + \rho^3\tau, (\rho\tau - \rho^3\tau)\sqrt{2}i, \rho^2\}.$$

Proof. Berdasarkan Teorema 4.5, aljabar Hopf yang bersesuaian dengan $E/\mathbb{Q}$ dapat ditentukan melalui Persamaan (2) sebagai berikut:

$$H' = \left\{ \sum_{m \in N'} \lambda_m \rho^m \in \tilde{E}[N'] : g(x) = x, \text{ untuk setiap } g \in G \right\}. \quad (6)$$

Artinya, elemen dari aljabar Hopf H' harus memenuhi

$$\lambda_m = g(\lambda_{g^{-1}mg})$$

untuk setiap $m \in N'$ dan $g \in G$, yang apabila dijabarkan secara lengkap, harus memenuhi

$$\lambda_{\text{id}} = g(\lambda_{\text{id}}), \quad \lambda_{\rho^2} = g(\lambda_{\rho^2}), \quad \lambda_{\rho\tau} = g(\lambda_{\rho^3\tau}), \quad \lambda_{\rho^3\tau} = g(\lambda_{\rho\tau})$$

untuk setiap $g \in G$.

Dapat diperiksa bahwa hanya elemen $N' = \{\text{id}, \rho^2, \rho\tau, \rho^3\tau\}$ yang mengawetkan $\sqrt{2}i$. Lebih lanjut, dapat dilihat bahwa $\lambda_{\rho\tau}$ dan $\lambda_{\rho^3\tau}$ adalah elemen-elemen yang tetap diawetkan oleh seluruh automorfisma di N' . Sebagai contoh,

$$\lambda_{\rho\tau} = \sigma(\lambda_{\rho^3\tau}) = \sigma(\sigma(\lambda_{\rho\tau})) = \rho^2(\lambda_{\rho\tau}).$$

Dapat diperiksa pula untuk $\lambda_{\rho^3\tau}$ sehingga $\lambda_{\rho\tau}, \lambda_{\rho^3\tau} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}i)$. Misalkan $\lambda_{\rho\tau} = a + b\sqrt{2}i$ dengan $a, b \in \mathbb{Q}$, maka:

$$\lambda_{\rho^3\tau} = \tau(a + b\sqrt{2}i) = \tau(a) + \tau(b)\tau(\sqrt{2}i) = a - b\sqrt{2}i \text{ dengan } a, b \in \mathbb{Q}.$$

Dengan demikian, berdasarkan (6), setiap elemen $x \in H'$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x &= \lambda_{\text{id}} \cdot \text{id} + \lambda_{\rho^2} \cdot \rho^2 + \lambda_{\rho\tau} \cdot \rho\tau + \lambda_{\rho^3\tau} \cdot \rho^3\tau \\ &= \lambda_{\text{id}} + \mu\rho^2 + (a + b\sqrt{2}i)\rho\tau + (a - b\sqrt{2}i)\rho^3\tau \\ &= \lambda_{\text{id}} + \mu\rho^2 + a(\rho\tau + \rho^3\tau) + b(\rho\tau - \rho^3\tau)\sqrt{2}i \end{aligned}$$

dengan $\lambda, \mu, a, b \in \mathbb{Q}$. Diperoleh basis H' atas $\mathbb{Q}$ sebagai berikut:

$$\{\text{id}, \rho\tau + \rho^3\tau, (\rho\tau - \rho^3\tau)\sqrt{2}i, \rho^2\}.$$

Langkah terakhir, yaitu menentukan aksi Hopf dengan melakukan penomoran pada koset kiri G/G' yang sesuai. Berdasarkan (3), definisikan $\psi : \tilde{E}[N'] \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Q}} \tilde{E}$ dengan aturan

$$\text{id} \mapsto \text{id}, \quad \rho^2 \mapsto \sigma^2, \quad \rho\tau \mapsto \sigma, \quad \rho^3\tau \mapsto \sigma^3.$$

Dengan merestriksi pemetaan di atas, sesuai dengan (4), diperoleh aksi Hopf $\mu' := \psi|_{H'} : H' \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Q}} E$ dengan aturan

$$\text{id} \mapsto \text{id}, \quad \rho\tau + \rho^3\tau \mapsto \sigma + \sigma^3, \quad (\rho\tau - \rho^3\tau)\sqrt{2}i \mapsto (\sigma - \sigma^3)\sqrt{2}i, \quad \rho^2 \mapsto \sigma^2.$$

Dapat dihitung bahwa

$$\text{id}(\alpha) = \alpha, \quad (\sigma + \sigma^3)(\alpha) = 0, \quad ((\sigma - \sigma^3)\sqrt{2}i)(\alpha) = -2\sqrt{2}\alpha, \quad \sigma^2(\alpha) = -\alpha$$

yang menunjukkan bahwa simetri dari ekstensi lapangan $E/\mathbb{Q}$ tertangkap sepenuhnya melalui aksi Hopf. $\square$

Aljabar H dan H' yang diperoleh pada Teorema 4.7 dan 4.9 isomorfik sebagai ruang vektor atas $\mathbb{Q}$ karena keduanya memiliki dimensi yang sama. Meskipun begitu, mereka tidak isomorfik sebagai aljabar seperti yang ditunjukkan pada lema berikut.

Lema 4.10. *Aljabar Hopf $H = \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\text{id}, \rho + \rho^3, (\rho - \rho^3)i, \rho^2\}$ dan $H' = \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\text{id}, \rho\tau, \rho^3\tau, (\rho\tau - \rho^3\tau)\sqrt{2}i, \rho^2\}$ atas $\mathbb{Q}$ pada Teorema 4.7 dan Teorema 4.9 tidak isomorfik sebagai aljabar.*

Proof. Basis dari H dan H' adalah $\mathcal{B} = \{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ dan $\mathcal{B}' = \{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ dengan:

$$\begin{aligned} e_0 &= \text{id}, & e_1 &= \rho^2, & e_2 &= \rho + \rho^3, & e_3 &= (\rho - \rho^3)i, \\ f_0 &= \text{id}, & f_1 &= \rho^2, & f_2 &= \rho\tau + \rho^3\tau, & f_3 &= (\rho\tau - \rho^3\tau)\sqrt{2}i \end{aligned}$$

Asumsikan bahwa H dan H' isomorfik sebagai aljabar, artinya terdapat suatu isomorfisma aljabar $\theta : H \rightarrow H'$. Ini berarti θ adalah homomorfisma aljabar yang bijektif sehingga untuk setiap $a, b \in H$ berlaku $\theta(ab) = \theta(a)\theta(b)$ dan $\theta(\text{id}_H) = \text{id}_{H'}$.

Berdasarkan syarat di atas, haruslah $\theta(e_0) = f_0$. Namun, perhatikan bahwa $(e_1)^2 = e_0$ sehingga $\theta((e_1)^2) = (\theta(e_1))^2 = f_0$. Elemen di H' yang kuadratnya f_0 adalah f_0 dan f_1 . Karena θ injektif dengan $e_1 \neq e_0$, maka $\theta(e_1) \neq f_0$. Sehingga haruslah $\theta(e_1) = f_1$. Dengan demikian, terdapat dua aturan pemetaan yang ditetapkan, yaitu:

$$\theta(e_0) = f_0, \quad \theta(e_1) = f_1.$$

Karena pemetaan θ bijektif, maka hanya terdapat dua cara untuk memetakan e_2, e_3 ke f_2, f_3 . Dengan demikian, berikut adalah aturan pemetaan θ yang mungkin adalah

$$\theta_1(e_0) = f_0, \quad \theta_1(e_1) = f_1, \quad \theta_1(e_2) = f_2, \quad \theta_1(e_3) = f_3;$$

atau

$$\theta_2(e_0) = f_0, \quad \theta_2(e_1) = f_1, \quad \theta_2(e_2) = f_3, \quad \theta_2(e_3) = f_2.$$

Ambil $e_3 \in H$ dan hitung:

$$e_3 \cdot e_3 = (\rho - \rho^3)i \cdot (\rho - \rho^3)i = -1(\rho^2 - \rho^4 - \rho^4 + \rho^6) = -1(2\rho^2 - 2\text{id}) = 2e_0 - 2e_1.$$

maka, dapat dihitung pula bahwa

$$\theta_1(e_3 \cdot e_3) = \theta_1(2e_0 - 2e_1) = 2 \cdot \theta_1(e_0) - 2 \cdot \theta_1(e_1) = 2f_0 - 2f_1.$$

padahal

$$\theta_1(e_3)\theta_1(e_3) = f_3 \cdot f_3 = [(\rho\tau - \rho^3\tau)\sqrt{2}i]^2 = -2(\text{id} - 2\rho^2 + \text{id}) = -4f_0 + 4f_1$$

sehingga didapat $\theta_1(e_3 \cdot e_3) \neq \theta_1(e_3)\theta_1(e_3)$. Dapat diperiksa pula bahwa $\theta_2(e_3 \cdot e_3) \neq \theta_2(e_3)\theta_2(e_3)$. Artinya, baik θ_1 maupun θ_2 bukanlah suatu pemetaan aljabar, sehingga H dan H' tidak isomorfik secara aljabar. $\square$

Karena H dan H' atas $\mathbb{Q}$ tidak isomorfik sebagai aljabar, maka mereka juga tidak isomorfik sebagai aljabar Hopf. Hal ini mengilustrasikan bahwa struktur Hopf-Galois (H, μ) dari suatu ekstensi Galois E/F tidaklah tunggal.

5. SIMPULAN DAN ARAH PENELITIAN LANJUTAN

Pada artikel ini, telah dilakukan tinjauan literatur terhadap aljabar Hopf sebagai perumuman dari linierisasi grup. Aljabar Hopf merupakan suatu struktur matematika yang kaya. Sebagai ruang vektor, tentunya aljabar Hopf memiliki kali skalar, dan ia juga dilengkapi dengan operasi produk serta operasi dualnya, yaitu koproduk. Meskipun memiliki banyak operasi, kekayaan akan struktur aljabar Hopf dapat lebih diapresiasi ketika bekerja dengan representasi (atau modul) dan juga korepresentasi (atau komodul) atas aljabar Hopf. Hal ini tidak dilakukan pada artikel ini, namun sebagai ilustrasi, korepresentasi atas aljabar Hopf dapat dianggap sebagai simetri kuantum dari suatu objek geometri [7].

Dari penjabaran di atas, dapat diperhatikan bahwa aljabar Hopf memiliki banyak aplikasi di berbagai bidang ilmu, salah satunya adalah tentang ekstensi Hopf-Galois yang berhingga. Sebagai simpulan, pada artikel ini, telah dibahas ekstensi lapangan $E = \mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ dengan $\alpha = \sqrt[4]{2}$ yang memiliki polinomial minimal $x^4 - 2$ atas $\mathbb{Q}$. Ekstensi tersebut bersifat terpisahkan tetapi tidak normal sehingga tidak Galois secara klasik. Oleh karena itu, grup Galois $\text{Aut}_{\mathbb{Q}} E$ tidak mampu menangkap struktur simetri dari ekstensi tersebut sepenuhnya. Grup tersebut digantikan dengan aljabar Hopf. Pada kasus ini, terdapat dua aljabar Hopf tidak isomorfik yang membuat ekstensi $E/\mathbb{Q}$ menjadi Hopf-Galois dengan hasil sebagai berikut:

Properti	Struktur Hopf Galois I	Struktur Hopf Galois II
Grup N	$N = \langle \rho \rangle = \{\text{id}, \rho, \rho^2, \rho^3\}$	$N = \langle \rho^2, \rho\tau \rangle = \{\text{id}, \rho^2, \rho\tau, \rho^3\tau\}$
$\mathbb{Q}$ -Aljabar Hopf	$\text{Span}\{\text{id}, \rho + \rho^3, (\rho - \rho^3)i, \rho^2\}$	$\text{Span}\{\text{id}, \rho\tau + \rho^3\tau, (\rho\tau - \rho^3\tau)\sqrt{2}i, \rho^2\}$
Aksi Hopf	$\text{id}(\alpha) = \alpha$ $(\sigma^3 + \sigma)(\alpha) = 0$ $((\sigma^3 - \sigma)i)(\alpha) = 2\alpha$ $\sigma^2(\alpha) = -\alpha$	$\text{id}(\alpha) = \alpha$ $(\sigma + \sigma^3)(\alpha) = 0$ $((\sigma - \sigma^3)\sqrt{2}i)(\alpha) = -2\sqrt{2}\alpha$ $\sigma^2(\alpha) = -\alpha$

TABEL 3. Perbandingan Struktur Hopf-Galois pada Ekstensi $E/\mathbb{Q}$

Perhitungan ini dilakukan dengan menggunakan metode yang lebih baru sebagaimana dijelaskan dalam [5]. Pada referensi [5] juga telah dibahas ekstensi Hopf-Galois dari ekstensi lapangan yang bersesuaian dengan polinomial $x^8 - 2$, dan juga telah dicari semua struktur Hopf-Galoisnya. Namun, secara umum, kasus untuk polinomial berbentuk $x^{2n} - 2$ untuk bilangan bulat $n \geq 3$ belum dikaji dan memerlukan bantuan program komputer untuk menyelesaikannya secara eksplisit. Lebih lanjut, terdapat pula permasalahan untuk mencari ekstensi Hopf-Galois dari ekstensi lapangan yang bersesuaian dengan polinomial $T_n(x) - a$ dengan $T_n(x)$ adalah polinomial Chebyshev. Hal ini akan menjadi arah penelitian lanjutan.

Kajian tentang ekstensi Hopf-Galois sendiri masih berkembang hingga sekarang. Misalnya, ekstensi Hopf-Galois untuk ekstensi lapangan tak-hingga baru saja didefinisikan dan dipelajari di [2] yang merupakan perumuman dari [3] dan [6]. Lebih lanjut, peran dari ekstensi lapangan dapat digantikan dengan ekstensi aljabar (lihat [8]) atau koaljabar (lihat [1]). Lebih lanjut, ekstensi Hopf-Galois juga berguna dalam teori kategori, lihat [1, 12] untuk kajian lebih lanjut.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Aziz, R., and Vercruysse, J., Generalized Yetter-Drinfeld modules, center of bi-actegories, and groupoid-crossed braided bicategories, *arXiv:2507.08722*.
- [2] Bui, H-P., Vercruysse, J., and Wiese, G., Correspondence theorem for infinite Hopf-Galois extensions, *ArXiv:2404.06724*.
- [3] Chase, S. U., and Sweedler, M. E., *Hopf algebras and Galois theory*, Springer, Berlin, 2006.
- [4] Durbin, J.R., *Modern algebra: an introduction*. John Wiley & Sons, 2008.
- [5] Garcia, M.S., *Hopf Galois theory of separable field extensions*, Bachelor thesis, Universitat de Barcelona, 2016.

- [6] Greither, C., and Pareigis, B., Hopf Galois theory for separable field extension, *Journal of Algebra*, Volume 106, Issue 1, March 1987, Pages 239 – 258.
- [7] Majid, S., *A quantum group primer*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [8] Montgomery, S., Hopf Galois Theory: a survey, *New topological contexts for Galois theory and algebraic geometry (BIRS 2008)*, 16, 367–400.
- [9] Morandi, P., *Fields and Galois theory*, Volume 167, Springer Science & Business Media, 2012.
- [10] Roman, S., *Advance Linear algebra*, Springer, New York, 2005.
- [11] Steward, I.N., *Galois theory*, CRC Press, 2015.
- [12] Schauenburg, P., Hopf-Galois and bi-Galois extensions, *Fields Inst. Commun.* , 43 American Mathematical Society, Providence RI, 2004, 469 - 515.
- [13] Sweedler, M., *Hopf algebras*, Mathematics Lecture Note Series, Benjamin, New York, 1969.

