

## Invers Matriks Hankel Bentuk Khusus $(n + 1) \times (n + 1)$ Menggunakan Metode Adjoin

FITRI ARYANI, JEANETTE ANGELICA Risci VIRGINIA, YUSLENITA MUDA,  
ADE NOVIA RAHMA, DAN CORRY CORAZON MARZUKI

PRODI MATEMATIKA UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU  
EMAIL: KHODIJAH\_FITRI@UIN-SUSKA.AC.ID, JEANETTE.ANGELICA99@GMAIL.COM

### Abstrak

Tujuan artikel ini merumuskan invers dari Matriks Hankel bentuk khusus  $(n + 1) \times (n + 1)$ . Penentuan invers matriks dilakukan menggunakan metode adjoin. Untuk memperoleh rumus umum invers matriks tersebut, diperlukan dua komponen utama: rumus umum determinan Matriks Hankel dan rumus umum matriks kofaktornya. Rumusan determinan diperoleh dengan mengamati pola determinan matriks  $A_1$  sampai  $A_9$  kemudian divalidasi melalui pembuktian induksi matematika. Sementara itu, rumus umum matriks kofaktor disimpulkan dari pola matriks kofaktor  $C_1$  sampai  $C_9$  dan dibuktikan menggunakan metode pembuktian langsung. Selanjutnya, bentuk umum invers yang telah diperoleh diilustrasikan melalui beberapa contoh perhitungan.

**Kata kunci:** Determinan, Invers, Matriks Hankel, Matriks Kofaktor, Metode Adjoin.

### Abstract

*This article aims to formulate the general form of the inverse of a special  $(n + 1) \times (n + 1)$  Hankel Matrix. The inverse of the matrix is determined using the adjoin method. To obtain the general formula for the inverse of the matrix, two main components are required: the general formula for the determinant of the Hankel matrix and the general formula for its cofactor matrix. The determinant formula is obtained by observing the determinant patterns of matrices  $A_1$  to  $A_9$  then validated through mathematical induction. Meanwhile, the general formula for the cofactor matrix is derived from the patterns of cofactor matrices  $C_1$  to  $C_9$  and proven using direct proof methods. Furthermore, the resulting general inverse form is illustrated through several example calculations.*

**Keywords:** Adjoin Method, Cofactor Matrix, Determinant, Hankel Matrix, Invers.

## 1. PENDAHULUAN

Invers suatu matriks dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan sistem persamaan linear. Artinya bentuk dari invers matriks sangat diperlukan dalam menyelesaikan SPL. Pembentukan invers matriks dimulai dengan melihat determinan matriks. Apabila determinan matriks nya tidak nol, maka matriks tersebut mempunyai invers, dan apabila determinannya sama dengan nol, maka invers matriks tersebut tidak dapat ditentukan. Selanjutnya ukuran matriks merupakan faktor yang harus diperhatikan dalam menentukan invers matriks, sebab apabila suatu matriks dengan ukuran yang besar maka menentukan invers matriksnya cukup memakan waktu yang lama. Sehingga untuk mempermudah menentukan invers suatu matriks, maka diperlukan bentuk umum invers matriks tersebut. Dengan mensubstitusi elemen yang ada maka diperoleh invers matriksnya. Artikel ini bertujuan untuk memudahkan dalam menentukan bentuk umum invers matriks Hankel bentuk khusus ukuran  $(n+1) \times (n+1)$ .

Banyak penelitian yang telah dilakukan dalam pembentukan invers suatu matriks diantaranya pada tahun 2014 [1] membahas mengkaji invers matriks toeplitz  $T_n$  dengan diagonal nol dan selainnya  $x \in R$ . Metode yang digunakan pada artikel tersebut adalah metode Adjoin. Selanjutnya tahun 2018, artikel [2] merumuskan bentuk umum invers dari suatu matriks Hankel  $n \times n$  untuk setiap  $n \in N$ . Penelitian [3] tahun 2019 dengan menggunakan metode adjoin juga mendapatkan invers matriks tak negatif  $M_n$ . Tujuan penelitian tersebut menentukan bentuk umum matriks kofaktor dan invers dari matriks tak negatif orde genap dan ganjil. Penelitian [4] membahas invers matriks positif menggunakan metode adjoin. Penelitian [5] membahas mengenai invers matriks RSFPLRcirrcfr dengan bentuk khusus  $(0, b, \dots, b)$ , dan penelitian [6] membahas mengenai penggunaan invers matriks pada penyelesaian sistem persamaan linier kompleks menggunakan metode faddev.

Pembentukan invers matriks diawali dengan pembentukan determinan. Berikut beberapa penelitian yang berhubungan dengan pembentukan determinan matriks yaitu penelitian [7] mendapatkan bentuk determinan matriks blok dengan ukuran  $2 \times 2$  menggunakan matriks FLDCircr dengan bentuk khusus. Selanjutnya penelitian [8] membahas mengenai determinan matriks segitiga bentuk khusus ordo  $3 \times 3$  bilangan bulat positif menggunakan kofaktor. Dan penelitian [9] dengan menggunakan metode radic memperoleh rumus umum determinan matriks tidak bujur sangkar berbentuk khusus  $3 \times n$ .

Penelitian ini menggunakan matriks Hankel yang merupakan matriks yang cukup menarik, sebab struktur pembentukannya yang dimulai dari baris ke nol dan kolom ke nol. Hal tersebut tidak terdapat pada matriks yang lain, yang mengakibatkan matriks Hankel berukuran  $(n+1)$ . Banyak penelitian yang telah membahas mengenai matriks Hankel diantaranya penelitian [10], yang menyajikan evaluasi determinan Hankel dari urutan faktorial umum. Metode Ekponensial Array, Roirdan, Polinomial Euler, dan Polinomial Eksponensial yang digunakan dalam penelitian tersebut.

Penelitian [11] pada tahun 2021 membahas bentuk umum perpangkatan dan determinan matriks Hankel berpangkat bilangan bulat positif dengan bentuk khusus ordo  $3 \times 3$ . Tahun 2018 [12] melakukan penelitian yang merumuskan bentuk umum invers matriks Hankel  $n \times n$  untuk setiap  $n \in N$  dengan menggunakan bentuk khusus seperti berikut:  $H_{ij} = \frac{1}{(i+j-1)!}$  dengan  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Hasil yang diperoleh yaitu rumus eksplisit invers matriks Hankel:

$$M_{ij} = (-1)^{n+i+j+1} (i-1)! j! \binom{n-1}{i-1} \binom{n+j-1}{j} \sum_{k=0}^{i-1} \binom{n-i+k}{j-1} \binom{n+k-1}{k}$$

untuk setiap  $n \in N$ .

Berdasarkan penjabaran penelitian-penelitian di atas, maka penelitian kali ini mengkaji mengenai invers matriks Hankel  $(n+1) \times (n+1)$  bentuk khusus dengan  $a_0$  dan elemen diagonal

sekundernya berupa  $a$  sedangkan elemen lainnya berupa nol atau dapat ditulis seperti berikut:

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ dengan } a \in R, a \neq 0 \quad (1)$$

## 2. METODE PENELITIAN

Jenis metode pada penelitian ini adalah metode studi literatur dengan langkah-langkahnya yang diberikan sebagai berikut:

- (1) Diberikan Matriks Hankel  $(n+1) \times (n+1)$  bentuk khusus seperti pada Persamaan (1).
- (2) Mendapatkan determinan Matriks Hankel dari  $A_1$  sampai  $A_9$  menggunakan ekspansi kofaktor.
- (3) Menduga rumus secara umum determinan Matriks Hankel  $(n+1) \times (n+1)$ .
- (4) Menggunakan induksi matematika untuk membuktikan rumus umum determinan Matriks Hankel  $(n+1) \times (n+1)$ .
- (5) Menentukan matriks kofaktor dari Matriks Hankel  $C_1$  sampai  $C_9$ .
- (6) Menduga rumus umum matriks kofaktor dari Matriks Hankel  $(n+1) \times (n+1)$ .
- (7) Rumus umum matriks kofaktor dari Matriks Hankel  $(n+1) \times (n+1)$  dibuktikan menggunakan pembuktian langsung.
- (8) Diperoleh rumus umum invers Matriks Hankel  $(n+1) \times (n+1)$  bentuk khusus menggunakan metode Adjoin.
- (9) Penerapan rumus umum yang diperoleh: rumus umum determinan, rumus umum matriks kofaktor, dan rumus umum invers matriks Hankel  $(n+1) \times (n+1)$  dalam beberapa contoh soal.

Sebagai landasan teori pendukung yang digunakan pada artikel ini berhubungan dengan definisi-definisi dan teorema-teorema matriks dan operasi matriks, determinan, invers matriks, dan metode adjoin ada pada [13], [14] dan [15].

## 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Langkah-langkah pada metode penelitian akan digunakan untuk mendapatkan tiga rumus umum: rumus umum determinan, rumus umum matriks kofaktor dan rumus umum invers matriks. Ketiga bentuk umum tersebut akan diberikan dalam teorema yang akan dibuktikan sesuai masing-masing metodenya.

**3.1. Determinan Matriks Hankel Bentuk Khusus Hankel  $(n+1) \times (n+1)$ .** Proses dalam menentukan rumus umum determinan matriks Hankel dengan bentuk khusus menggunakan metode ekspansi kofaktor. Hal yang dilakukan pertama kali yaitu menentukan nilai determinan matriks Hankel bentuk khusus  $A_1$  sampai dengan matriks  $A_9$  seperti Tabel 1 berikut:

Tabel 1: Determinan Matriks Hankel Bentuk khusus

| Matriks Hankel Bentuk Khusus Ordo | Determinan     |
|-----------------------------------|----------------|
| $A_{0+1}$                         | $ A_1  = a$    |
| $A_{1+1}$                         | $ A_2  = -a^2$ |
| $A_{2+1}$                         | $ A_3  = -a^3$ |
| $A_{3+1}$                         | $ A_4  = a^4$  |
| $A_{4+1}$                         | $ A_5  = a^5$  |
| $A_{5+1}$                         | $ A_6  = -a^6$ |

Tabel 1: Determinan Matriks Hankel Bentuk khusus

| Matriks Hankel Bentuk Khusus Ordo | Determinan     |
|-----------------------------------|----------------|
| $A_{6+1}$                         | $ A_7  = -a^7$ |
| $A_{7+1}$                         | $ A_8  = a^8$  |
| $A_{8+1}$                         | $ A_9  = a^9$  |

Berdasarkan Tabel 1, maka dapat diduga rumus umum determinan Matriks Hankel tersebut, seperti berikut:

$$|A_{n+1}| = (-1)^{\frac{n}{2}} a^{n+1} \text{ untuk } n \text{ genap, dan}$$

$$|A_{n+1}| = (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^{n+1} \text{ untuk } n \text{ ganjil menggunakan metode induksi matematika untuk membuktikan dugaan rumus umum tersebut dapat dilihat pada teorema berikut.}$$

**Teorema 1** Diberikan Matriks Hankel bentuk khusus  $(n+1) \times (n+1)$  seperti pada (1) maka diperoleh:

$$|A_{n+1}| = (-1)^{\frac{n}{2}} a^{n+1} \text{ untuk } n \text{ genap, dan}$$

$$|A_{n+1}| = (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^{n+1} \text{ untuk } n \text{ ganjil}$$

menggunakan metode induksi matematika untuk membuktikan dugaan rumus umum tersebut dapat dilihat pada teorema berikut.

*Proof.* Pertama untuk  $n$  bilangan bulat positif genap.

Misalkan  $p(n) : |A_{n+1}| = (-1)^{\frac{n}{2}} a^{n+1}$  dengan  $n$  bilangan bulat positif genap.

Langkah 1. Akan ditunjukkan  $p(2)$  benar, yaitu

$$p(2) : |A_{2+1}| = |A_3| = \begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a^3 \text{ berdasarkan Tabel 1, maka } p(2) \text{ benar.}$$

Langkah 2. Asumsikan  $p(k)$  benar, yaitu

$$p(k) : |A_{k+1}| = (-1)^{\frac{k}{2}} a^{k+1}, \quad k \geq 0$$

Maka akan ditunjukkan untuk  $p(k+2)$  juga benar yaitu:

$$p(k+2) : |A_{k+3}| = (-1)^{\frac{k+2}{2}} a^{k+3}, k \text{ bilangan bulat positif genap} \quad (2)$$

Pembuktian dimulai dari:

$$|A_{k+3}| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}_{k+3}$$

lakukan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama, maka diperoleh

$$|A_{k+3}| = (-1)^{1+1} \cdot a \cdot 0 + \cdots + (-1)^{1+(k+1)} \cdot (a) \cdot \left( \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{k+2} \right) - 0$$

$$= (-1)^{k+2} \cdot (a) \cdot \left( (-1)^{1+1} \cdot 0 + \dots + 0 + (-1)^{1+k} \cdot (a) \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{k+1} - 0 \right)$$

$(-1)^{k+2} \cdot (a)$  bernilai positif karena  $k$  merupakan bilangan genap, dan  $(-1)^{k+1} \cdot (a)$  bernilai negatif. Lalu dengan memperhatikan bentuk  $|A_{k+1}|$  maka diperoleh

$$\begin{aligned} &= (-1)^{k+2} \cdot (a) \cdot (-1)^{1+k} \cdot (a) \cdot |A_{k+1}| \\ &= (-1) \cdot (a)^2 \cdot (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot a^{k+1} \\ &= (-1)^{\frac{k+2}{2}} a^{k+3}. \end{aligned}$$

Dari Persamaan (2) yang diperoleh maka  $p(k+2)$  untuk  $n$  bilangan bulat positif genap benar. Kedua untuk  $n$  bilangan bulat positif ganjil. Misalkan  $p(n) : |A_{n+1}| = (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^{n+1}$  untuk  $n$  bilangan bulat positif ganjil. Langkah 1. Akan ditunjukkan  $p(3)$  benar, yaitu

$$p(3) : |A_{3+1}| = |A_4| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a^4 \text{ berdasarkan Tabel 1, maka } p(3) \text{ benar.}$$

Langkah 2. Asumsikan  $p(k)$  benar, yaitu

$$p(k) : |A_{k+1}| = (-1)^{\frac{k+1}{2}} a^{k+1}, \quad k \geq 0$$

Maka akan ditunjukkan untuk  $p(k+2)$  juga benar yaitu:

$$p(k+2) : |A_{k+3}| = (-1)^{\frac{k+3}{2}} a^{k+3}, \quad k \text{ bilangan bulat positif ganjil} \quad (3)$$

Pembuktian dimulai dari:

$$|A_{k+3}| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}_{k+3}$$

lakukan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama, maka diperoleh

$$\begin{aligned} |A_{k+3}| &= (-1)^{1+1} \cdot a \cdot 0 + \dots + (-1)^{1+(k+1)} \cdot (a) \cdot \left( \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{k+2} \right) - 0 \\ &= (-1)^{k+2} \cdot (a) \cdot \left( (-1)^{1+1} \cdot 0 + \dots + 0 + (-1)^{1+k} \cdot (a) \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{k+1} - 0 \right) \end{aligned}$$

$(-1)^{k+2} \cdot (a)$  bernilai positif karena  $k$  merupakan bilangan ganjil, dan  $(-1)^{k+1} \cdot (a)$  bernilai negatif. Selanjutnya dengan memperhatikan bentuk  $|A_{k+1}|$  maka diperoleh

$$\begin{aligned} &= (-1)^{k+2} \cdot (a) \cdot (-1)^{1+k} \cdot (a) \cdot |A_{k+1}| \\ &= (-1) \cdot (a)^2 \cdot (-1)^{\frac{k+1}{2}} \cdot a^{k+1} \\ &= (-1)^{\frac{k+3}{2}} a^{k+3}. \end{aligned}$$

Dari Persamaan (3) yang diperoleh maka  $p(k+2)$  untuk  $n$  bilangan bulat positif ganjil benar. Sehingga Teorema 1 Terbukti benar.  $\square$

**3.2. Matriks Kofaktor dari Matriks Hankel Bentuk Khusus  $(n+1) \times (n+1)$ .** Proses menentukan rumus umum matriks kofaktor dari Matriks Hankel bentuk khusus menggunakan metode minor-kofaktor. Pertama ditentukan matriks kofaktor dari matriks Hankel bentuk khusus dari  $C_1$  sampai  $C_9$  yang disajikan pada Tabel 2 berikut:

Tabel 2: Determinan Matriks Hankel Bentuk khusus

| Ordo | Matriks kofaktor untuk matriks Hankel bentuk khusus |        |        |        |        |        |        |        |        |  |
|------|-----------------------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--|
| 1    | $C_1 = 1$                                           |        |        |        |        |        |        |        |        |  |
| 2    | $C_2 =$                                             | 0      | -a     |        |        |        |        |        |        |  |
|      |                                                     | -a     | a      |        |        |        |        |        |        |  |
| 3    | $C_3 =$                                             | 0      | 0      | $-a^2$ |        |        |        |        |        |  |
|      |                                                     | 0      | $-a^2$ | 0      |        |        |        |        |        |  |
|      |                                                     | $-a^2$ | 0      | $a^2$  |        |        |        |        |        |  |
| 4    | $C_4 =$                                             | 0      | 0      | 0      | $a^3$  |        |        |        |        |  |
|      |                                                     | 0      | 0      | $a^3$  | 0      |        |        |        |        |  |
|      |                                                     | 0      | $a^3$  | 0      | 0      |        |        |        |        |  |
|      |                                                     | $a^3$  | 0      | 0      | $-a^3$ |        |        |        |        |  |
| 5    | $C_5 =$                                             | 0      | 0      | 0      | 0      | $a^4$  |        |        |        |  |
|      |                                                     | 0      | 0      | 0      | $a^4$  | 0      |        |        |        |  |
|      |                                                     | 0      | 0      | $a^4$  | 0      | 0      |        |        |        |  |
|      |                                                     | 0      | $a^4$  | 0      | 0      | 0      |        |        |        |  |
|      |                                                     | $a^4$  | 0      | 0      | 0      | $-a^4$ |        |        |        |  |
| 6    | $C_6 =$                                             | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | $-a^5$ |        |        |  |
|      |                                                     | 0      | 0      | 0      | 0      | $-a^5$ | 0      |        |        |  |
|      |                                                     | 0      | 0      | 0      | $-a^5$ | 0      | 0      |        |        |  |
|      |                                                     | 0      | 0      | $-a^5$ | 0      | 0      | 0      |        |        |  |
|      |                                                     | 0      | $-a^5$ | 0      | 0      | 0      | 0      |        |        |  |
|      |                                                     | $-a^5$ | 0      | 0      | 0      | 0      | $a^5$  |        |        |  |
| 7    | $C_7 =$                                             | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | $-a^6$ |        |  |
|      |                                                     | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | $-a^6$ | 0      |        |  |
|      |                                                     | 0      | 0      | 0      | 0      | $-a^6$ | 0      | 0      |        |  |
|      |                                                     | 0      | 0      | 0      | $-a^6$ | 0      | 0      | 0      |        |  |
|      |                                                     | 0      | 0      | $-a^6$ | 0      | 0      | 0      | 0      |        |  |
|      |                                                     | 0      | $-a^6$ | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |        |  |
|      |                                                     | $-a^6$ | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | $a^6$  |  |
| 8    | $C_8 =$                                             | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | $a^7$  |        |  |
|      |                                                     | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | $a^7$  | 0      |  |
|      |                                                     | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | $a^7$  | 0      | 0      |  |
|      |                                                     | 0      | 0      | 0      | 0      | $a^7$  | 0      | 0      | 0      |  |
|      |                                                     | 0      | 0      | 0      | $a^7$  | 0      | 0      | 0      | 0      |  |
|      |                                                     | 0      | 0      | $a^7$  | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |  |
|      |                                                     | 0      | $a^7$  | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |  |
|      |                                                     | $a^7$  | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | $-a^7$ |  |

Tabel 2: Determinan Matriks Hankel Bentuk khusus

| Ordo | Matriks kofaktor untuk matriks Hankel bentuk khusus                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 9    | $C_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a^8 \end{bmatrix}$ |

Setelah mendapatkan matriks kofaktor dari matriks Hankel berbentuk khusus  $C_1$  sampai  $C_9$  pada Tabel 2, maka dapat diduga rumus umum matriks kofaktor dari matriks Hankel bentuk khusus  $(n+1) \times (n+1)$  serta dibuktikan dengan pembuktian langsung yang disajikan pada Teorema 2 berikut.

**Teorema 2** Diberikan  $A_{n+1}$  Matriks Hankel bentuk khusus  $(n+1) \times (n+1)$  seperti pada Persamaan (1) dengan  $a \in R, a \neq 0$ , maka matriks kofaktor dari matriks  $A_{n+1}$  adalah

$$C_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & (-1)^{\frac{n+3}{2}} a^n \end{bmatrix} \quad (4)$$

$n \geq 0$  untuk  $n$  bulat positif ganjil, dan

$$C_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}} a^n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}} a^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^{\frac{n}{2}} a^n & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}} a^n & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{\frac{n}{2}} a^n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ (-1)^{\frac{n}{2}} a^n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & (-1)^{\frac{n+2}{2}} a^n \end{bmatrix} \quad (5)$$

$n \geq 0$  untuk  $n$  bulat positif genap.

*Proof.* Pembuktian untuk Persamaan (4) menggunakan pembuktian langsung yang dijabarkan sebagai berikut:

Dari Matriks Hankel bentuk khusus seperti pada Persamaan (1) berikut:

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \forall a \in R, a \neq 0 \text{ untuk } n \text{ ganjil}$$

maka diperoleh:

- (1) Entri-entri baris ke-0 matriks kofaktor
  - (a) Untuk entri  $C_{0,0}$  bernilai 0 sebab terdapat satu baris bilangan nol yaitu pada baris ke- $n$ , seperti berikut:

$$C_{0,0} = (-1)^0 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}_n = 0$$

$C_{0,1}$  bernilai 0 karena terdapat satu baris bilangan nol yaitu pada baris ke- $n-1$ . Untuk entri  $C_{0,2}$  sampai  $C_{0,n-1}$  akan bernilai 0 karena terdapat satu baris bilangan nol yang apabila setiap bertambah satu kolom pada matriks kofaktor tersebut maka akan naik satu tingkat baris bilangan nol tersebut. Artinya untuk  $C_{0,2}$  akan diputar satu baris bernilai nol pada baris  $n-2$  dan seterusnya, sampai pada entri  $C_{0,n-1}$  terdapat satu baris bilangan nol pada baris pertama.

- (b) Khusus untuk  $C_{0,n}$  dilakukan pertukaran baris sebanyak  $\frac{n-1}{2}$  kali, sehingga menghasilkan:

$$C_{0,n} = (-1)^n \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot a^n = (-1) \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot a^n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n.$$

- (2) Entri-entri baris ke-1 matriks kofaktor
  - (a) Untuk entri  $C_{1,0}$  bernilai 0 karena terdapat satu baris bilangan nol yaitu pada baris ke- $n$ .  $C_{1,1}$  bernilai 0 karena terdapat satu baris bilangan nol yaitu pada baris ke- $n-1$ . Untuk entri  $C_{1,2}$  sampai  $C_{1,n-2}$  dan  $C_{1,n}$  akan bernilai 0 karena terdapat satu baris bilangan nol yang apabila setiap bertambah satu kolom pada matriks kofaktor tersebut maka akan naik satu tingkat baris bilangan nol tersebut. Sedangkan untuk entri  $C_{1,n-1}$  terdapat nilai yang bukan nol.
  - (b) Khusus untuk matriks kofaktor  $C_{1,n-1}$  akan ditunjukkan sebagai berikut:

$$C_{1,n-1} = (-1)^n \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} a^n = (-1) \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} a^n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n.$$

- (3) Entri-entri baris ke-2 matriks kofaktor
  - (a) Untuk entri  $C_{2,0}$  bernilai 0 karena terdapat satu baris bilangan nol yaitu pada baris ke- $n$ .  $C_{2,1}$  bernilai 0 karena terdapat satu baris bilangan nol yaitu pada baris ke- $n-1$ . Untuk entri  $C_{2,2}$  sampai  $C_{2,n-3}$  dan  $C_{2,n-1}, C_{2,n}$  akan bernilai 0 karena terdapat satu baris bilangan nol yang apabila setiap bertambah satu kolom pada matriks kofaktor tersebut maka akan naik satu tingkat baris bilangan nol tersebut. Sedangkan untuk entri  $C_{2,n-2}$  terdapat nilai yang bukan nol.
  - (b) Khusus untuk matriks kofaktor  $C_{2,n-2}$  akan ditunjukkan sebagai berikut:

$$C_{2,n-2} = (-1)^n \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot (a)^n = (-1) \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} a^n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n.$$

- (4) Entri-entri baris ke-3 matriks kofaktor
  - (a) Untuk  $C_{3,0}$  bernilai 0 karena terdapat satu baris bilangan nol yaitu pada baris ke- $n$ .  $C_{3,1}$  bernilai 0 karena terdapat satu baris bilangan nol yaitu pada baris ke- $n-1$ . Untuk entri  $C_{3,2}$  sampai  $C_{3,n-4}$  dan  $C_{3,n-2}, C_{3,n-1}, C_{3,n}$  akan bernilai

0 karena terdapat satu baris bilangan nol yang apabila setiap bertambah satu kolom pada matriks kofaktor tersebut maka akan naik satu tingkat baris bilangan nol tersebut. Sedangkan untuk entri  $C_{3,n-3}$  terdapat nilai yang bukan nol.

- (b) Khusus untuk matriks kofaktor  $C_{3,n-3}$  akan ditunjukkan sebagai berikut:

$$C_{3,n-3} = (-1)^n \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} a^n = (-1) \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} a^n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n.$$

- (5) Entri-entri baris ke- $i$  matriks kofaktor

- (a) Untuk  $C_{i,0}$  bernilai 0 karena terdapat satu baris bilangan nol yaitu pada baris ke- $n$ .  $C_{i,1}$  bernilai 0 karena terdapat satu baris bilangan nol yaitu pada baris ke- $n-1$ . Untuk entri  $C_{i,2}$  sampai  $C_{i,(n-1)-i}$  dan  $C_{i,(n+1)-i}$ ,  $C_{i,(n+2)-i}$  sampai  $C_{i,(n+i)-i}$  akan bernilai 0 karena terdapat satu baris bilangan nol yang apabila setiap bertambah satu kolom pada matriks kofaktor tersebut maka akan naik satu tingkat baris bilangan nol tersebut. Sedangkan untuk entri  $C_{i,n-i}$  terdapat nilai yang bukan nol.

- (b) Khusus untuk matriks kofaktor  $C_{i,n-i}$  akan ditunjukkan sebagai berikut:

$$C_{i,n-i} = (-1)^n \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} a^n = (-1) \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} a^n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n.$$

- (c) Menentukan matriks kofaktor baris ke- $n$  kolom ke- $n$  ( $C_{n,n}$ ).

Penyelesaian untuk matriks  $C_{n,n}$  akan menggunakan aturan determinan untuk matriks diagonal yaitu:

$$C_{n,n} = (-1)^{2n} \cdot (-1)^{\frac{n+1}{2}-1} \cdot a^n = (-1) \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot a^n = (-1)^{\frac{n+3}{2}} a^n.$$

Maka didapat nilai entri-entri kofaktor untuk sepanjang diagonal terbaliknya adalah  $(-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n$  dan pada baris ke- $n$  kolom ke- $n$  adalah  $(-1)^{\frac{n+3}{2}} a^n$ . Berdasarkan langkah-langkah di atas, maka Persamaan (4) terbukti. Pembuktian matriks kofaktor untuk  $n$  genap pada Persamaan (5) juga dilakukan pembuktian melalui proses yang sama seperti pembuktian matriks kofaktor untuk  $n$  ganjil pada Persamaan (4). Sehingga Teorema 2 terbukti.  $\square$

**3.3. Invers Matriks Hankel Bentuk Khusus  $(n+1) \times (n+1)$ .** Proses menentukan rumus umum invers Matriks Hankel bentuk khusus menggunakan metode Adjoin. Untuk nilai determinan Matriks Hankel bentuk khusus telah diperoleh di Teorema 1 dan matriks kofaktornya ada pada Teorema 2, sehingga diperoleh invers Matriks Hankel bentuk khusus yang disajikan pada Teorema 3 berikut.

**3.4. Teorema 3.** Diberikan Matriks Hankel bentuk khusus  $(n+1) \times (n+1)$  seperti pada Persamaan (1) maka invers matriks Hankel bentuk khusus  $(n+1) \times (n+1)$ , yaitu:

$$(A_{n+1})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{a} \end{bmatrix} \quad (6)$$

*Proof.* Dengan menggunakan metode Adjoin akan didapatkan invers Matriks Hankel bentuk khusus sebagai berikut:

Berdasarkan Teorema 2 maka akan diperoleh matriks adjoint yaitu transpus dari matriks kofaktor, yaitu: untuk  $n$  genap

$$adj(A_{n+1}) = (C_{n+1})^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}} a^n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}} a^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (-1)^{\frac{n}{2}} a^n & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}} a^n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{\frac{n}{2}} a^n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ (-1)^{\frac{n}{2}} a^n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{\frac{n+2}{2}} a^n \end{bmatrix}$$

dan untuk  $n$  ganjil

$$adj(A_{n+1}) = (C_{n+1})^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{\frac{n+3}{2}} a^n \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dengan menggunakan Teorema 1 maka diperoleh invers matriks Hankel bentuk khusus pada Persamaan (1), yaitu:

$$(A_{n+1})^{-1} = \frac{1}{|A_{n+1}|} adj(A_{n+1}),$$

untuk  $n$  genap

$$(A_{n+1})^{-1} = \frac{1}{(-1)^{\frac{n}{2}} a^{n+1}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}} a^n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}} a^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (-1)^{\frac{n}{2}} a^n & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}} a^n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{\frac{n}{2}} a^n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ (-1)^{\frac{n}{2}} a^n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{\frac{n+2}{2}} a^n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

dan untuk  $n$  ganjil

$$(A_{n+1})^{-1} = \frac{1}{(-1)^{\frac{n+1}{2}} a^{n+1}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{\frac{n+3}{2}} a^n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan pembuktian di atas terlihat bahwa bentuk umum invers matriksnya hanya satu bentuk sesuai dengan Persamaan (6), walaupun bentuk umum determinan dan bentuk matriks kofaktornya ada dua bentuk. Sehingga Teorema 3 terbukti.  $\square$

Berikut diberikan contoh yang berhubungan dengan Teorema 3.

**Contoh 1** Tentukan invers dari matriks berikut:

$$A_{7+1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_8$$

Berdasarkan Teorema 3 maka inversnya adalah

$$(A_{7+1})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

**Contoh 2** Tentukan invers dari matriks berikut:

$$A_{4+1} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_5$$

Berdasarkan Teorema 3 maka inversnya adalah

$$(A_{4+1})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}_5$$

#### 4. SIMPULAN

Penentuan invers matriks menggunakan metode adjoin diperlukan nilai determinan matriks dan bentuk matriks adjoin yang merupakan transpose dari matriks kofaktor. Matriks Hankel bentuk khusus  $(n+1) \times (n+1)$  seperti pada Persamaan (1) memiliki dua bentuk umum determinan untuk  $n$  genap, dan untuk  $n$  ganjil yang telah terbukti pada Teorema 1. Selanjutnya bentuk umum matriks kofaktornya juga memiliki dua bentuk umum yaitu: untuk  $n$  genap dan untuk  $n$  ganjil yang telah terbukti pada Teorema 2. Sedangkan Bentuk umum invers Matriks Hankel bentuk khusus  $(n+1) \times (n+1)$  seperti pada Persamaan (1) memiliki satu bentuk umum yang telah terbukti pada Teorema 3.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1] B. Siregar, "Invers Suatu Matriks Toeplitz Menggunakan Metode Adjoin," *Saintia Matematika*, vol. 02, no. 01, pp. 85–94, 2014.
- [2] F. Aryani, C. C. Marzuki, and S. Basriati, "Determinan Matriks FLDcircular Bentuk Khusus Menggunakan Ekspansi Kofaktor," *Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri*, 11, no. November, pp. 682–688, 2018.

- [3] F. Aryani, M. Ulfah, and C. C. Marzuki, "Invers Matriks Mn Tak Negatif Menggunakan Metode Adjoin," *Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri*, 11, no. November, pp. 439–450, 2019.
- [4] M. E. K. Putra and F. Aryani, "Invers Matriks Positif Menggunakan Metode Adjoin," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 3, no. 1, pp. 45–52, 2017.
- [5] Rahmawati, N. Fitri, and A. N. Rahma, "Invers Matriks RSFPLRcircfr (0,b,...,b)," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 6, no. 1, pp. 113–121, 2020.
- [6] F. Aryani and T. Rizkiani, "Penyelesaian sistem Persamaan Linier Kompleks dengan Invers Matriks Menggunakan Metode Faddev," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 2, no. 1, 2016.
- [7] A. N. Rahma et al., "Determinan Matriks Blok 2 x 2 Dalam Aplikasi Matriks FLDcircr Bentuk Khusus," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 5, no. 2, pp. 34–42, 2019.
- [8] A. N. Rahma, Rahmawati, and R. H. Vitho, "Determinan Matriks Segitiga Bentuk Khusus Ordo 3x3 Bilangan Bulat Positif Menggunakan Kofaktor," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol.6, no. 2, pp. 30–41, 2020.
- [9] F. Aryani and Hanita, "Determinan Matriks Tidak Bujur Sangkar Berbentuk Khusus 3xn Menggunakan Metode Radic," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 4, no. 1, pp. 36–42, 2018.
- [10] S. L. Yang and Y. N. Dong, "Hankel Determinants of the Generalized Factorials," *Indian J. Pure Appl. Math.*, vol. 49, no. 2, pp. 217–225, 2018, doi: 10.1007/s13226-018-0264-9.
- [11] J. Hal, A. N. Rahma, and Z. Aqilah, "Determinan Matriks Hankel Bentuk Khusus Ordo 3 x 3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 7, no. 1, pp. 96–104, 2021.
- [12] K. Habermann, "An explicit formula for the inverse of a factorial hankel matrix," *Australas. J. Comb.*, vol. 79, pp. 250–255, 2021.
- [13] R. Munir, *Matematika Diskrit Edisi Ketiga*, 3rd ed. Bandung: Informatika Bandung, 2007.
- [14] Sharma, *Jelajah Matematika Edisi Pertama*, 1st ed. Bogor: Yudhistira, 2014.
- [15] H. Anton and C. Rorres, *Aljabar Linear Elementer Edisi Kedelapan*, 8th ed. Jakarta: Erlangga, 2004.