

## Struktur Aljabar untuk Barisan Kodon dari Asam Deoksiribonukleat (DNA)

NABILA NURMALA HASAN, EDI KURNIADI, DAN NURUL GUSRIANI

PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA, FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM,  
UNIVERSITAS PADJADJARAN, SUMEDANG, INDONESIA, 45363

EMAIL: NABILA22005@MAIL.UNPAD.AC.ID

### Abstrak

Dalam artikel ini, dibahas struktur aljabar pada barisan kodon sebagai representasi himpunan basa nitrogen DNA pada lingkup matematika. Tujuan penelitian ini adalah untuk membuktikan struktur aljabar apa saja yang diperoleh untuk barisan kodon dari asam basa DNA. Metode yang digunakan adalah metode penelitian kualitatif berupa studi literatur dan metode penelitian kuantitatif berupa eksperimen pada himpunan asam basa DNA. Dalam lingkup matematika, basa nitrogen DNA dapat dihimpun dalam sebuah himpunan dan dihubungkan ke dalam struktur aljabar melalui pemetaan bijektif pada lapangan Galois berorder 4. Hal ini mengakibatkan himpunan tersebut dapat dipandang sebagai lapangan Galois berorder 4. Selain itu, triplet basa DNA atau kodon juga dapat direpresentasikan dalam bentuk matematika. Selanjutnya, kodon ini dipetakan secara bijektif pada lapangan Galois berorder 64 sehingga struktur aljabar yang diperoleh merupakan lapangan. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa barisan-barisan kodon mempunyai struktur aljabar berupa ruang vektor atas lapangan Galois dari struktur kodon yang berdimensi satu. Untuk penelitian selanjutnya, dapat diselidiki struktur Lie pada kodon melalui konstruksi *brackets* Lie-nya di mana ruang vektor ini merupakan syarat perlu untuk aljabar Lie.

**Kata kunci:** DNA, Kodon, Lapangan Galois, Ruang Vektor, Dimensi.

**Abstract**

*This article discusses the algebraic structure of codon sequences as a representation of DNA nitrogen base sets in mathematical terms. The study aims to prove what algebraic structures are obtained for codon sequences from DNA bases. The methods used include qualitative research methods in the form of literature studies and quantitative research methods in the form of experiments on DNA base sets. In mathematical notation, the nitrogen bases of DNA can be collected in a set and connected into algebraic structures through bijective mapping on the Galois field of order 4. This results in the set  $B$  being viewed as a Galois field of order 4. Additionally, DNA base triplets or codons can be represented in mathematical form. Furthermore, these codons are bijectively mapped onto the Galois field of order  $64$ , so that the resulting algebraic structure is a field. The result of this study show that the codon sequences have an algebraic structure in the form of a one-dimensional vector space over the Galois field on the codon. For further research, the Lie structure in codon can be investigated through the construction of its Lie brackets, where this vector space is a necessary condition for Lie algebras.*

**Keywords:** *DNA, Codon, Galois Field, Vector Space, Dimension.*

## 1. PENDAHULUAN

*Deoxyribonucleic Acid* (DNA) merupakan materi genetik yang dapat diturunkan untuk membawa informasi genetik dalam polimer linier panjang yang disebut asam nukleat. Suatu molekul DNA terdiri dari empat basa nitrogen yang menyusunnya, yaitu Adenin (A), Guanin (G), Sitosin (C), dan Timin (T). Struktur DNA berupa untai ganda (double helix) yang tersusun atas pasangan basa nitrogen, yaitu Adenin dengan Timin yang diikat oleh dua ikatan hidrogen ( $A = T$ ), dan Guanin dengan Sitosin yang diikat dengan tiga ikatan hidrogen ( $G \equiv C$ ) [1]. Sifat DNA yang sangat penting adalah menyimpan informasi genetik yang berisi instruksi untuk protein. Pada proses transkripsi, DNA disalin menjadi molekul RNA pembawa informasi genetik ke tempat sintesis protein [7]. Molekul RNA tersusun dalam untai tunggal dengan empat basa nitrogen seperti DNA, kecuali Urasil (U) untuk menggantikan Timin (T). Himpunan RNA ini dapat dinotasikan ke dalam urutan-urutan yang berbeda seperti  $\{U, C, A, G\}$  atau  $\{C, A, G, U\}$  dan seterusnya. Namun untuk konsistensi, penelitian ini mengikuti representasi Sanchez [8] dan menotasikan keempat basa nitrogen tersebut dalam sebuah himpunan  $B = \{G, U, A, C\}$ . Model tersebut merepresentasikan kodon pada mRNA (RNA yang membawa informasi genetik dari DNA) yang berperan langsung pada proses translasi sintesis protein.

Penelitian-penelitian terkait DNA ini sudah banyak dilakukan baik dari sudut pandang biologi maupun matematika. Dalam matematika, ikatan antar DNA dapat dipandang sebagai perluasan modulus penerapan melalui penyederhanaan proses hibridisasi [2]. Penelitian lainnya, misalnya mengenai konstruksi kode DNA atas lapangan hingga  $F_2$  dengan memperhatikan batasan kombinatorial [3]. Terkait struktur aljabar, DNA dapat dipandang sebagai grup kuosien melalui representasi kode genetik standar berdasarkan basa nukleotidanya ([4], [5]). Hal yang lebih menarik dan memotivasi penelitian ini adalah representasi kode genetik sebagai lapangan Galois [6].

Penelitian ini membangun struktur matematika dari himpunan  $B = \{G, U, A, C\}$  dengan memetakan ke lapangan Galois berorder 4 dan membentuk sebuah lapangan. Selanjutnya, himpunan kodon atau triplet basa DNA yang dinotasikan dengan  $B^3$  membentuk ruang vektor berdimensi satu atas  $B^3$ . Dalam penelitiannya [1],  $B^3$  belum dibuktikan sebagai lapangan

Galois berdimensi 64 sehingga bukti bahwa struktur aljabar  $B^3$  sebagai ruang vektor atas lapangan  $B^3$  belum jelas dan perlu dibuktikan secara detail. Selain itu, dalam penelitian sebelumnya bahwa  $B^3$  berdimensi 1 masih bersifat klaim dan belum dibuktikan. Sifat bebas linear dan membangun pada basis  $B^3$  juga belum dibuktikan. Oleh karena itu, dalam penelitian ini dibuktikan bahwa  $B^3$  suatu lapangan Galois dan dibuktikan juga basis untuk ruang vektor  $B^3$  sehingga  $B^3$  adalah ruang vektor berdimensi 1.

## 2. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan adalah metode penelitian kualitatif berupa studi literatur dan metode penelitian kuantitatif berupa eksperimen pada himpunan asam basa DNA. Metode penelitian kualitatif berupa studi literatur terkait penelitian sebelumnya. Objek yang diteliti adalah kodon (triplet basa nitrogen) dari himpunan  $B^3$  yang akan diketahui struktur aljabarnya, hingga menunjukkan bahwa  $B^3$  merupakan ruang vektor berdimensi satu atas lapangan Galois  $B^3$ . Langkah-langkah dalam penelitian diuraikan sebagai berikut

1. Memetakan  $B$  ke lapangan Galois berorder 4.
2. Konstruksi bentuk kodon  $B^3$ .
3. Menentukan struktur  $B^3$  yang dipetakan ke lapangan Galois berorder 64.
4. Membuktikan  $B^3$  ruang vektor berdimensi satu atas lapangan Galois  $B^3$ .

Guna menunjang tahapan penelitian, diperlukan landasan teori sebagai dasar analisis. Berikut adalah definisi dan teorema yang digunakan sebagai fondasi dalam pembahasan.

**Definisi 2.1.** [10]. Misalkan  $p$  suatu bilangan prima  $n$  suatu bilangan bulat positif. Maka terdapat secara tunggal lapangan dengan order  $p^n$ . Lapangan tersebut dinamakan lapangan Galois dan dinotasikan oleh  $GF(p^n)$  di mana

$$GF(p^n) = \mathbb{Z}_p[x]/I \quad (1)$$

dengan  $\mathbb{Z}_p[x]$  himpunan semua polinomial berderajat  $(n-1)$  di mana koefisien-koefisiennya adalah anggota dari  $\mathbb{Z}_p$  dan  $I$  adalah ideal  $\mathbb{Z}_p[x]$  yang memuat polinomial tak tereduksi di  $\mathbb{Z}_p$  yang berderajat  $n$ .

Sebagai contoh untuk  $p = 2$  dan  $n = 2$  diperoleh  $GF(2^2)$  merupakan lapangan Galois. Untuk melihat hal tersebut, perlu ditunjukkan bahwa  $(GF(2^2), +)$  dan  $(GF(2^2) - \{0\}, \cdot)$  merupakan grup komutatif. Langkah pertama untuk membuktikan hal ini adalah menunjukkan bahwa  $GF(4)$  grup komutatif terhadap penjumlahan. Untuk itu, misalkan  $a, b, c \in GF(4)$  sembarang dengan  $a = a_0 + a_1x + I$ ,  $b = b_0 + b_1x + I$ ,  $c = c_0 + c_1x + I$  di mana  $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{Z}_2$ ,  $i = 0, 1$  dan  $I = 1 + x + x^2$ .

Untuk membuktikan  $\forall a, b \in GF(4)$  berlaku  $a + b \in GF(4)$ , perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a + b &= (a_0 + a_1x + I) + (b_0 + b_1x + I) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + I \end{aligned}$$

karena  $a_i, b_i \in \mathbb{Z}_2$  dan  $\mathbb{Z}_2$  grup, maka  $a_i + b_i \in \mathbb{Z}_2$  untuk  $i = 0, 1$ , sehingga  $(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + I \in GF(4)$ . Terbukti  $\forall a, b \in GF(4)$  berlaku  $a + b \in GF(4)$ . Selanjutnya diperlihatkan bahwa  $\forall a, b, c \in GF(4)$  berlaku  $a + (b + c) = (a + b) + c$ . Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a_0 + a_1x + I) + ((b_0 + b_1x + I) + (c_0 + c_1x + I)) \\ &= (a_0 + a_1x + I) + ((b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)x + I) \\ &= a_0 + (b_0 + c_0) + a_1x + (b_1 + c_1) + I. \end{aligned}$$

Diketahui  $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{Z}_2$  dan  $\mathbb{Z}_2$  grup, maka  $a_i + (b_i + c_i) = (a_i + b_i) + c_i$  untuk  $i = 0, 1$ . Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a_0 + b_0) + c_0 + (a_1 + b_1)x + c_1x + I \\ &= ((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + I) + (c_0 + c_1x + I) \\ &= ((a_0 + a_1x + I) + (b_0 + b_1x + I)) + (c_0 + c_1x + I) \\ &= (a + b) + c. \end{aligned}$$

Terbukti  $\forall a, b, c \in GF(4)$  berlaku  $a + (b + c) = (a + b) + c$ . Kemudian dapat ditunjukkan bahwa terdapat  $e \in GF(4)$  yang memenuhi  $a + e = e + a = a$ , untuk semua  $a \in GF(4)$ . Untuk menunjukkan hal tersebut, dipilih  $e = 0 + I = I \in GF(4)$  sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} a + e &= (a_0 + a_1x + I) + I \\ &= a_0 + a_1x + I = a \\ &= I + (a_0 + a_1x + I) \\ &= e + a. \end{aligned}$$

Terbukti  $\exists e = I \in GF(4) \ni a + I = I + a = a$ ,  $\forall a \in GF(4)$ . Setelah itu, dapat dibuktikan bahwa  $\forall a \in GF(4) \exists (-a) \in GF(4) \ni a + (-a) = (-a) + a = I$ . Untuk setiap  $a \in GF(4)$ , pilih  $(-a) = a \in GF(4)$ .

$$\begin{aligned} a + (-a) &= a + a \\ &= (a_0 + a_1x + I) + (a_0 + a_1x + I) \\ &= (a_0 + a_0) + (a_1 + a_1)x + I \\ &= 0 + 0x + I \\ &= I. \end{aligned}$$

Terbukti  $\forall a \in GF(4) \exists (-a) \in GF(4) \ni a + (-a) = (-a) + a = I$ . Terakhir,  $GF(4)$  juga berlaku sifat komutatif atau  $a + b = b + a$   $\forall a, b \in GF(4)$ , yaitu:

$$\begin{aligned} a + b &= (a_0 + a_1x + I) + (b_0 + b_1x + I) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + I \end{aligned}$$

karena  $a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbb{Z}_2$  dan  $\mathbb{Z}_2$  komutatif maka

$$\begin{aligned} &= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)x + I \\ &= (b_0 + b_1x + I) + (a_0 + a_1x + I) \\ &= b + a. \end{aligned}$$

Dengan kata lain, terbukti  $GF(4)$  merupakan grup komutatif terhadap operasi penjumlahan.

Kedua, perlu buktikan bahwa  $GF(4) - \{0\}$  grup komutatif terhadap perkalian. Diketahui  $I = 1 + x + x^2$  merupakan ideal di  $\mathbb{Z}_2[x]$  dengan himpunan  $GF(2^2)$  berisi semua polinomial berderajat 1. Dalam strukturnya,  $GF(2^2) = \mathbb{Z}_2[x]/I$  berlaku  $1 + x + x^2 = 0$  sehingga diperoleh  $x^2 = -1 - x$ . Karena polinomial tersebut berada dalam  $\mathbb{Z}_2$ , maka persamaan tersebut ekuivalen dengan  $x^2 = 1 + x$ . Persamaan ini selanjutnya digunakan sebagai aturan reduksi pangkat dalam operasi perkalian.

Misalkan  $a, b \in GF(4) - \{0\}$ , artinya  $a$  dan  $b$  adalah anggota dari himpunan elemen tak nol  $\{1, x, 1 + x\}$ . Karena  $GF(4)$  dikonstruksi menggunakan modulus polinomial tak tereduksi  $I = 1 + x + x^2$ , maka jelas bahwa  $a \cdot b \neq 0$ . Untuk membuktikan  $\forall a, b \in GF(4) - \{0\}$  berlaku

$a \cdot b \in GF(4) - \{0\}$ , perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a_0 + a_1x + I) \cdot (b_0 + b_1x + I) \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_1b_1)x^2 + I \\ &= (a_0b_0 + a_1b_1) + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_1b_1)x + I \in GF(4) - \{0\} \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa  $\forall a, b \in GF(4) - \{0\}$  berlaku  $a \cdot b \in GF(4) - \{0\}$ . Selanjutnya,  $\forall a, b, c \in GF(4) - \{0\}$  juga berlaku  $a(bc) = (ab)c$ . Pandang persamaan berikut

$$\begin{aligned} a(bc) &= (a_0 + a_1x + I)((b_0 + b_1x + I)(c_0 + c_1x + I)) \\ &= (a_0 + a_1x + I)(b_0c_0 + (b_0c_1 + b_1c_0)x + b_1c_1x^2 + I) \\ &= a_0b_0c_0 + (a_0b_0c_1 + a_0b_1c_1 + a_1b_0c_0)x + (a_0b_1c_1 + a_1b_0c_1 + a_1b_1c_0)x^2 + a_1b_1c_1x^3 + I \\ &= (a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + a_1b_1x^2 + I)(c_0 + c_1x + I) \\ &= ((a_0 + a_1x + I)(b_0 + b_1x + I))(c_0 + c_1x + I) \\ &= (ab)c. \end{aligned}$$

Terbukti bahwa  $\forall a, b, c \in GF(4) - \{0\}$  juga berlaku  $a(bc) = (ab)c$ . Kemudian, perlu ditunjukkan bahwa terdapat elemen  $e_x \in GF(4) - \{0\}$  sehingga berlaku  $e_x \cdot a = a \cdot e_x = a$  untuk setiap  $a \in GF(4) - \{0\}$ . Pilih  $e_x = 1 + I = x + x^2 \in GF(4)$ , maka

$$\begin{aligned} e_x \cdot a &= (x + x^2) \cdot (a_0 + a_1x + I) \\ &= xa_0 + x^2(a_0 + a_1) + x^3a_1 + I \\ &= a_0 + xa_1 + I = a \\ &= a_0x + (a_0 + a_1)x^2 + a_1x^3 + I \\ &= (a_0 + a_1x + I) \cdot (x + x^2) \\ &= a \cdot e_x. \end{aligned}$$

Terbukti bahwa  $\exists e_x = 1 + I = x + x^2 \in GF(4) - \{0\}$  sehingga berlaku  $(1 + I) \cdot a = a \cdot (1 + I) = a$ . Selanjutnya, untuk membuktikan  $\forall a \in GF(4) - \{0\} \exists (a)^{-1} \in GF(4) - \{0\} \ni a \cdot (a)^{-1} = (a)^{-1} \cdot a = (1 + I)$ , perhatikan bahwa untuk  $a = 1 + I$  pilih  $(a^{-1}) = 1 + I$  sehingga

$$\begin{aligned} a \cdot (a)^{-1} &= (1 + I) \cdot (1 + I) = 1 + I \\ &= (a)^{-1} \cdot a. \end{aligned}$$

Kemudian, untuk  $a = x + I$  pilih  $(a)^{-1} = 1 + x + I$  sehingga

$$\begin{aligned} a \cdot (a)^{-1} &= (x + I) \cdot (1 + x + I) = 1 + I \\ &= (1 + x + I) \cdot (x + I) \\ &= (a)^{-1} \cdot a. \end{aligned}$$

Terakhir, untuk  $a = 1 + x + I$  pilih  $(a)^{-1} = x + I$  sehingga

$$\begin{aligned} a \cdot (a)^{-1} &= (1 + x + I) \cdot (x + I) = 1 + I \\ &= (x + I) \cdot (1 + x + I) \\ &= (a)^{-1} \cdot a. \end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa  $\forall a \in GF(4) \exists (a)^{-1} \in GF(4) \ni a \cdot (a)^{-1} = (a)^{-1} \cdot a = (1 + I)$ .

Setelah itu sifat komutatif dapat dibuktikan terhadap perkalian di  $GF(4)$ . Jadi untuk sebarang  $a, b \in GF(4)$  berlaku

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a_0 + a_1x + I) \cdot (b_0 + b_1x + I) \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + I \\ &= b_0a_0 + (b_1a_0 + b_0a_1)x + I \\ &= (b_0 + b_1x + I) \cdot (a_0 + a_1x + I) = b \cdot a. \end{aligned}$$

Terbukti  $\forall a, b \in GF(4)$  berlaku  $a \cdot b = b \cdot a$  atau bersifat komutatif terhadap perkalian.

Dengan kata lain, terbukti  $GF(4) - \{0\}$  merupakan grup komutatif terhadap operasi perkalian. Setelah diketahui bahwa  $(GF(2^2), +)$  merupakan grup komutatif dan  $(GF(2^2) - \{0\}, \cdot)$  grup komutatif, dapat disimpulkan bahwa  $GF(4)$  merupakan lapangan Galois berorder 4.

**Definisi 2.2.** [10]. *Lapangan Galois  $GF(p^n)$  terhadap operasi penjumlahan isomorfik dengan*

$$Z_p \oplus Z_p \oplus \dots \oplus Z_p. \quad (2)$$

*Selanjutnya lapangan Galois  $GF(p^n)$  terhadap operasi perkalian isomorfik dengan grup  $Z_{p-1}$ .*

**Teorema 2.3.** [10]. Misalkan  $F$  lapangan dan  $p(x)$  polinomial tak tereduksi atas  $F$ . Maka  $F[x]/\langle p(x) \rangle$  adalah lapangan.

Untuk mengetahui struktur dari himpunan basa nitrogen  $B$ , yang akan dimanfaatkan dalam pengkodean, pemetaan bijektif dibuat dari himpunan  $B$  dengan struktur aljabar yang sudah dikenal dengan baik (*well known*). Pada penelitian ini, struktur aljabar yang digunakan mengikuti aturan Sanchez untuk mengidentifikasi triplet basa nitrogen [9], dimana  $B = \{G, U, A, C\}$  dilihat sebagai  $GF(4) = GF(2^2) = \mathbb{Z}_2[x]/I$  dengan  $I = \langle 1 + x + x^2 \rangle$ . Diberikan pemetaan bijektif untuk struktur tersebut

$$f : GF(4) \rightarrow B = \{G, U, A, C\} \quad (3)$$

Kode genetika yang tersusun dari tiga basa nitrogen dan membentuk suatu triplet disebut kodon. Kodon ini akan menerjemahkan satu triplet basa nitrogen menjadi satu asam amino. Bentuk kodon atau triplet basa DNA dipandang sebagai barisan terurut dari tiga elemen yang dinotasikan oleh  $X_1X_2X_3 := (X_1, X_2, X_3)$  dengan  $X_1, X_2, X_3 \in B$ , sehingga membentuk himpunan kodon berikut

$$B^3 = B \times B \times B = \{X_1X_2X_3 \mid X_i \in B; i = 1, 2, 3\} \quad (4)$$

dengan banyak elemen di  $B^3$  adalah 64. Aturan yang digunakan untuk himpunan  $B^3$  mengikuti aturan yang dipakai Sanchez [9] yaitu menggunakan pemetaan bijektif dengan lapangan Galois berorder 64 atau  $GF(64)$ . Pemetaan bijektif untuk struktur tersebut antara lain

$$\psi : GF(64) \rightarrow B^3 \quad (5)$$

Penelitian ini membuktikan bahwa  $B^3$  merupakan lapangan. Dalam artikelnya, Sanchez [9] sudah membuktikan  $B^3$  merupakan ruang vektor atas  $B^3$  namun belum dibuktikan bahwa  $B^3$  lapangan dan ruang vektor  $B^3$  berdimensi 1. Selanjutnya, ruang vektor  $B^3$  berdimensi satu atas  $B^3$ , dapat dikembangkan untuk menjelaskan bahwa  $((B^3)^N, +) = (B^3, +) \oplus (B^3, +) \oplus \dots \oplus (B^3, +)$  ( $N$  kali) merupakan ruang vektor berdimensi  $N$  [8].

### 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam penelitian ini, diperoleh hasil utama terkait dengan struktur aljabar pada  $\mathbf{B}$  dan  $\mathbf{B}^3$  yang dinyatakan dalam empat proposisi.

**3.1. Himpunan  $B = \{G, U, A, C\}$  merupakan lapangan Galois berorder 4.** Hasil ini dinyatakan dalam proposisi berikut ini.

**Proposisi 3.1.** *Himpunan  $B = \{G, U, A, C\}$  yang memuat semua basa nitrogen DNA merupakan lapangan Galois berorder 4.*

*Bukti.* Diberikan  $B = \{G, U, A, C\}$  himpunan basa nitrogen pada DNA. Untuk mengetahui struktur  $B$  pada sistem Matematika, lakukan pemetaan himpunan tersebut ke struktur yang sudah diketahui. Pada artikel ini, himpunan basa nitrogen  $B$  dipetakan secara bijektif pada lapangan Galois  $GF(4)$ . Berdasarkan pemetaan (1), dengan

$$f : GF(4) \rightarrow B = \{G, U, A, C\}$$

di mana  $GF(4) = GF(2^2) = \mathbb{Z}_2[x]/I$  dan  $I$  merupakan polinomial tak tereduksi berderajat 2. Pilih  $I = 1 + x + x^2$  sehingga

$$GF(4) = \mathbb{Z}_2[x]/\langle 1 + x + x^2 \rangle$$

Untuk membuktikan  $f$  bijektif, perlu ditunjukkan terlebih dahulu bahwa  $f$  injektif. Misalkan  $a, b \in GF(4)$  dengan  $f(a) = f(b)$ , maka memenuhi  $a = b$ . Perhatikan bahwa  $f(a) = f(b) = X$  dimana  $X \in B = \{G, U, A, C\}$ , artinya  $f(a) = X$  dan  $f(b) = X$ . Karena  $X$  dipetakan oleh tepat satu elemen di  $GF(4)$  maka  $a = b$ . Terbukti  $f$  injektif.

Selanjutnya, akan diperlihatkan bahwa  $f$  surjektif. Misalkan  $X \in B$ , akan ditunjukkan  $\exists a \in GF(4) \ni f(a) = X$ . Pilih  $a \in GF(4)$  sehingga berlaku  $f(a) = X$ , di mana  $X \in B$ . Jadi  $f$  surjektif. Dengan demikian, terbukti bahwa  $f$  bijektif sehingga dapat dilakukan korespondensi satu-satu untuk elemen  $GF(4)$  ke  $B$  dan semua elemen di  $B$  membawa operasi dari  $GF(4)$ , yaitu

$$\begin{aligned} f : GF(4) &\rightarrow B = G, U, A, C \\ 0 &\mapsto G \\ 1 &\mapsto U \\ x &\mapsto A \\ 1 + x &\mapsto C. \end{aligned}$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa  $f$  merupakan homomorfisma terhadap operasi penjumlahan dan perkalian. Pertama, untuk sebarang  $a, b \in GF(4)$  dapat dibuktikan bahwa berlaku  $f(a + b) = f(a) + f(b)$ . Pandang persamaan berikut

$$\begin{aligned} f(a + b) &= f((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + I) \\ &= f((a_0 + a_1x + I) + (b_0 + b_1x + I)) \\ &= f(a_0 + a_1x + I) + f(b_0 + b_1x + I) \\ &= f(a) + f(b). \end{aligned}$$

Kedua, untuk menunjukkan  $\forall a, b \in GF(4) - \{0\}$  berlaku  $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$  perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f(a \cdot b) &= f(a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + I) \\ &= f((a_0 + a_1x + I) \cdot (b_0 + b_1x + I)) \\ &= f(a_0 + a_1x + I) \cdot f(b_0 + b_1x + I) \\ &= f(a) \cdot f(b). \end{aligned}$$

Jadi terbukti  $f$  homomorfisma.

Karena  $f$  adalah fungsi bijektif yang mengawetkan operasi penjumlahan dan perkalian, maka  $f$  merupakan isomorfisma lapangan. Dengan demikian, terbukti bahwa  $GF(4) \cong B$  sehingga  $B$  merupakan lapangan Galois berorder 4. □

**3.2. Konstruksi bentuk kodon DNA.** Setelah mengetahui struktur dari  $B$ , bentuk matematis dari kodon DNA atau triplet basa DNA dapat dikonstruksi. Kodon DNA dalam ranah biologi dibentuk sebagai triplet basa  $X_1X_2X_3$  dengan  $X_i \in B$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Dalam bentuk matematis, dapat dianalogikan triplet basa tersebut menjadi pasangan berurut  $X_1X_2X_3 := (X_1, X_2, X_3)$  dengan  $X_1, X_2, X_3 \in B$ .

$$B^3 = B \times B \times B = \{X_1X_2X_3 \mid X_i \in B; i = 1, 2, 3\}$$

Diketahui banyak elemen di  $B^3$  atau  $|B^3| = 64$ , lakukan pemetaan ke struktur lapangan Galois berorder 64 atau  $GF(64)$  dengan

$$GF(64) = GF(2^6) = \mathbb{Z}_2[x]/I \quad (6)$$

Pilih  $I = \langle 1 + x^5 + x^6 \rangle$  sebagai polinomial tak tereduksi berderajat 6 sehingga

$$GF(64) = \{ (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5) + I \mid a_i \in \mathbb{Z}_2, i = 1, 2, 3, 4, 5 \} \quad (7)$$

**Proposisi 3.2.** Terdapat korespondensi 1-1 antara lapangan Galois  $GF(64)$  dengan himpunan barisan kodon  $B^3$ .

*Bukti.* Diberikan pengaitan  $\psi$  yang didefinisikan oleh:

$$\psi : GF(64) \rightarrow B^3$$

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5) \mapsto (f_1(a_2a_3), f_2(a_4a_5), f_3(a_0a_1)) \quad (8)$$

dengan fungsi bijektif  $f_k$  yang dinotasikan oleh

$$f_k = (a_{i(k)}a_{i(k)+1}) = X_k \quad (9)$$

di mana  $k = 1, 2, 3$  menotasikan posisi basa kodon pada DNA,  $i(k) = 2 \cdot k \bmod 6$ , dengan  $a_{i(k)}, a_{i(k)+1} \in \{0, 1\}$  dan  $X_k \in B = \{G, U, A, C\}$ . Fungsi  $f_k$  setara dengan fungsi invers dari  $\varphi$  beserta korespondensinya. Berikut didefinisikan pemetaan biner 2 bit dengan keempat basa nitrogen

TABEL 1. Pemetaan biner 2 bit dengan basa nitrogen DNA

| Biner 2 bit | $B = G, U, A, C$ |
|-------------|------------------|
| 00          | $G$              |
| 01          | $U$              |
| 10          | $A$              |
| 11          | $C$              |

Dapat dibuktikan bahwa pemetaan  $\psi$  bersifat bijektif. Langkah pertama, perlu ditunjukkan  $\psi$  injektif. Misalkan  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_5x^5$ ,  $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_5x^5 \in GF(64)$  di mana  $\psi(p(x)) = \psi(q(x))$ . Untuk menunjukkan  $\psi$  injektif, perlu ditunjukkan  $p(x) = q(x)$ . Perhatikan persamaan berikut

$$\psi(p(x)) = \psi(q(x))$$

$$(f_1(a_2a_3), f_2(a_4a_5), f_3(a_0a_1)) = (f_1(b_2b_3), f_2(b_4b_5), f_3(b_0b_1))$$

artinya  $f_1(a_2a_3) = f_1(b_2b_3)$ ,  $f_2(a_4a_5) = f_2(b_4b_5)$ ,  $f_3(a_0a_1) = f_3(b_0b_1)$ . Untuk  $f_1(a_2a_3) = f_1(b_2b_3)$ , diperoleh  $f_1(a_2a_3) = X_1$  dan  $f_1(b_2b_3) = X_1$  dengan  $X_1 \in B$ . Karena  $X_1$  direpresentasikan dengan biner 2 digit, maka

$$f_1(a_2a_3) = f_1(b_2b_3)$$

$$(a_2, a_3) = (b_2, b_3)$$

sehingga  $a_2 = b_2$ ,  $a_3 = b_3$ . Hal yang sama berlaku untuk  $f_2(a_4a_5) = f_2(b_4b_5)$  dan  $f_3(a_0a_1) = f_3(b_0b_1)$ . Jadi  $a_i = b_i \forall i = 1, 2, 3, 4, 5$ , terbukti  $\psi$  injektif.

Selanjutnya, untuk menunjukkan  $\psi$  surjektif perlu ditunjukkan bahwa  $\exists p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_5x^5 \in GF(64) \ni \psi(p(x)) = X_1X_2X_3$ . Diberikan  $X_1X_2X_3 \in B^3$  sebarang dengan  $X_i \in B$ ,  $\forall i = 1, 2, 3$ , di mana  $X_i = f_i(a_{i(k)}a_{i(k)+1})$  dan  $i(k) = 2 \cdot k \bmod 6$ , maka

$$X_1X_2X_3 = (X_1, X_2, X_3) = (f_1(a_2a_3), f_2(a_4a_5), f_3(a_0a_1)) \quad (10)$$

sehingga diperoleh persamaan  $X_1 = f_1(a_2a_3), X_2 = f_2(a_4a_5), X_3 = f_3(a_0a_1)$ . Pilih  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_5x^5 \in GF(64)$  maka berlaku

$$\psi(p(x)) = (f_1(a_2a_3), f_2(a_4a_5), f_3(a_0a_1)) = X_1X_2X_3$$

Terbukti bahwa  $\psi$  surjektif. Dengan demikian, pemetaan  $\psi$  bijektif.  $\square$

Oleh karena itu, menggunakan Proposisi 2 diperoleh korespondensi satu-satu dari  $GF(64)$  ke  $B^3$  yang dinyatakan dalam Tabel 2. Karena polinomial dapat dibentuk oleh grup siklik, maka  $GF^*(64) = GF(64) - \{0\}$  berkorespondensi satu-satu dengan bentuk  $\langle x^i \rangle$  di mana  $i \geq 0 \pmod{63}$ . Hal ini akan mempermudah perhitungan dengan operasi perkalian.

Berikut merupakan tabel korespondensi satu-satu di  $B^3$  dengan pemetaannya pada  $GF(64)$ , baik dalam bentuk biner 6 bit atau dalam bentuk polinomial. Tabel berikut juga menyajikan asam amino yang ditentukan oleh triplet basa DNA yang direpresentasikan dalam  $B^3$  disebut kodon.

TABEL 2. Korespondensi satu-satu  $GF(64)$  terhadap kodon basa DNA  $B^3$

| No. | Biner 6 bit | $GF(64)$ | $\mathbb{Z}_2[x]/\langle 1+x^5+x^6 \rangle$ | $x^i$    | $B^3$ | Asam Amino |
|-----|-------------|----------|---------------------------------------------|----------|-------|------------|
| 0.  | 000000      | 000000   | 0                                           | —        | GGG   | G          |
| 1.  | 000001      | 100000   | 1                                           | 1        | GGA   | G          |
| 2.  | 000010      | 010000   | $x$                                         | $x$      | GGU   | G          |
| 3.  | 000011      | 110000   | $1+x$                                       | $x^2$    | GGC   | G          |
| 4.  | 000100      | 001000   | $x^2$                                       | $x^3$    | AGG   | R          |
| 5.  | 000101      | 101000   | $1+x^2$                                     | $x^4$    | AGA   | R          |
| 6.  | 000110      | 011000   | $x+x^2$                                     | $x^5$    | AGU   | S          |
| 7.  | 000111      | 111000   | $1+x+x^2$                                   | $x^6$    | AGC   | S          |
| 8.  | 001000      | 000100   | $x^3$                                       | $x^7$    | UGG   | W          |
| 9.  | 001001      | 100100   | $1+x^3$                                     | $x^8$    | UGA   | Stop       |
| 10. | 001010      | 010100   | $x+x^3$                                     | $x^9$    | UGU   | C          |
| 11. | 001011      | 110100   | $1+x+x^3$                                   | $x^{10}$ | UGC   | C          |
| 12. | 001100      | 001100   | $x^2+x^3$                                   | $x^{11}$ | CGG   | R          |
| 13. | 001101      | 101100   | $1+x^2+x^3$                                 | $x^{12}$ | CGA   | R          |
| 14. | 001110      | 011100   | $x+x^2+x^3$                                 | $x^{13}$ | CGU   | R          |
| 15. | 001111      | 111100   | $1+x+x^2+x^3$                               | $x^{14}$ | CGC   | R          |
| 16. | 010000      | 000010   | $x^4$                                       | $x^{15}$ | GAG   | E          |
| 17. | 010001      | 100010   | $1+x^4$                                     | $x^{16}$ | GAA   | E          |
| 18. | 010010      | 010010   | $x+x^4$                                     | $x^{17}$ | GAU   | D          |
| 19. | 010011      | 110010   | $1+x+x^4$                                   | $x^{18}$ | GAC   | D          |
| 20. | 010100      | 001010   | $x^2+x^4$                                   | $x^{19}$ | AAG   | K          |
| 21. | 010101      | 101010   | $1+x^2+x^4$                                 | $x^{20}$ | AAA   | K          |
| 22. | 010110      | 011010   | $x+x^2+x^4$                                 | $x^{21}$ | AAU   | N          |
| 23. | 010111      | 111010   | $1+x+x^2+x^4$                               | $x^{22}$ | AAC   | N          |
| 24. | 011000      | 000110   | $x^3+x^4$                                   | $x^{23}$ | UAG   | Stop       |
| 25. | 011001      | 100110   | $1+x^3+x^4$                                 | $x^{24}$ | UAA   | Stop       |
| 26. | 011010      | 010110   | $x+x^3+x^4$                                 | $x^{25}$ | UAU   | Y          |
| 27. | 011011      | 110110   | $1+x+x^3+x^4$                               | $x^{26}$ | UAC   | Y          |
| 28. | 011100      | 001110   | $x^2+x^3+x^4$                               | $x^{27}$ | CAG   | Q          |
| 29. | 011101      | 101110   | $1+x^2+x^3+x^4$                             | $x^{28}$ | CAA   | Q          |
| 30. | 011110      | 011110   | $x+x^2+x^3+x^4$                             | $x^{29}$ | CAU   | H          |
| 31. | 011111      | 111110   | $1+x+x^2+x^3+x^4$                           | $x^{30}$ | CAC   | H          |

TABEL 2. Lanjutan

| No. | Biner 6 bit | $GF(64)$ | $\mathbb{Z}_2[x]/\langle 1+x^5+x^6 \rangle$ | $x^i$    | $B^3$ | Asam Amino |
|-----|-------------|----------|---------------------------------------------|----------|-------|------------|
| 32. | 100000      | 000001   | $x^5$                                       | $x^{31}$ | GUG   | V          |
| 33. | 100001      | 100001   | $1+x^5$                                     | $x^{32}$ | GUA   | V          |
| 34. | 100010      | 010001   | $x+x^5$                                     | $x^{33}$ | GUU   | V          |
| 35. | 100011      | 110001   | $1+x+x^5$                                   | $x^{34}$ | GUC   | V          |
| 36. | 100100      | 001001   | $x^2+x^5$                                   | $x^{35}$ | AUG   | M          |
| 37. | 100101      | 101001   | $1+x^2+x^5$                                 | $x^{36}$ | AUA   | I          |
| 38. | 100110      | 011001   | $x+x^2+x^5$                                 | $x^{37}$ | AUU   | I          |
| 39. | 100111      | 111001   | $1+x+x^2+x^5$                               | $x^{38}$ | AUC   | I          |
| 40. | 101000      | 000101   | $x^3+x^5$                                   | $x^{39}$ | UUG   | L          |
| 41. | 101001      | 100101   | $1+x^3+x^5$                                 | $x^{40}$ | UUA   | L          |
| 42. | 101010      | 010101   | $x+x^3+x^5$                                 | $x^{41}$ | UUU   | F          |
| 43. | 101011      | 110101   | $1+x+x^3+x^5$                               | $x^{42}$ | UUC   | F          |
| 44. | 101100      | 001101   | $x^2+x^3+x^5$                               | $x^{43}$ | CUG   | L          |
| 45. | 101101      | 101101   | $1+x^2+x^3+x^5$                             | $x^{44}$ | CUA   | L          |
| 46. | 101110      | 011101   | $x+x^2+x^3+x^5$                             | $x^{45}$ | CUU   | L          |
| 47. | 101111      | 111101   | $1+x+x^2+x^3+x^5$                           | $x^{46}$ | CUC   | L          |
| 48. | 110000      | 000011   | $x^4+x^5$                                   | $x^{47}$ | GCG   | A          |
| 49. | 110001      | 100011   | $1+x^4+x^5$                                 | $x^{48}$ | GCA   | A          |
| 50. | 110010      | 010011   | $x+x^4+x^5$                                 | $x^{49}$ | GCU   | A          |
| 51. | 110011      | 110011   | $1+x+x^4+x^5$                               | $x^{50}$ | GCC   | A          |
| 52. | 110100      | 001011   | $x^2+x^4+x^5$                               | $x^{51}$ | ACG   | T          |
| 53. | 110101      | 101011   | $1+x^2+x^4+x^5$                             | $x^{52}$ | ACA   | T          |
| 54. | 110110      | 011011   | $x+x^2+x^4+x^5$                             | $x^{53}$ | ACU   | T          |
| 55. | 110111      | 111011   | $1+x+x^2+x^4+x^5$                           | $x^{54}$ | ACC   | T          |
| 56. | 111000      | 000111   | $x^3+x^4+x^5$                               | $x^{55}$ | UCG   | S          |
| 57. | 111001      | 100111   | $1+x^3+x^4+x^5$                             | $x^{56}$ | UCA   | S          |
| 58. | 111010      | 010111   | $x+x^3+x^4+x^5$                             | $x^{57}$ | UCU   | S          |
| 59. | 111011      | 110111   | $1+x+x^3+x^4+x^5$                           | $x^{58}$ | UCC   | S          |
| 60. | 111100      | 001111   | $x^2+x^3+x^4+x^5$                           | $x^{59}$ | CCG   | P          |
| 61. | 111101      | 101111   | $1+x^2+x^3+x^4+x^5$                         | $x^{60}$ | CCA   | P          |
| 62. | 111110      | 011111   | $x+x^2+x^3+x^4+x^5$                         | $x^{61}$ | CCU   | P          |
| 63. | 111111      | 111111   | $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$                       | $x^{62}$ | CCC   | P          |

Asam amino yang ditunjukkan oleh Tabel 2 merupakan simbol satu huruf dari asam amino. Sinyal "Stop" yang merupakan hasil pengkodean kodon UGA, UAG, atau UAA menandakan akhir dari rantai polipeptida (protein) dan tidak mengodekan asam amino apapun. Simbol asam amino tersebut mengikuti aturan dari Sanchez pada artikelnya [8].

Berikut dilampirkan contoh operasi pada  $B^3$  menggunakan operasi yang sama pada  $GF(64)$ . Operasi penjumlahannya menggunakan operasi pada  $\mathbb{Z}_2/I$  dan pada perkalian digunakan operasi pada  $x^i$ .

**Contoh 3.3.** Operasi penjumlahan pada  $B^3$

$$\begin{aligned}
 AGC + UAG &= (1+x+x^2) + (x^3+x^4) \\
 &= 1+x+x^2+x^3+x^4 \\
 &= CAC
 \end{aligned}$$

atau menggunakan pemetaan yang menjumlahkan per komponen di  $\mathbb{Z}_2$

$$\begin{aligned} AGC + UAG &= (10)(00)(11) + (01)(10)(00) \\ &= (10 + 01)(00 + 10)(11 + 00) \\ &= (11)(10)(11) = CAC. \end{aligned}$$

**Contoh 3.4.** Operasi perkalian pada  $B^3$

$$\begin{aligned} AUC \cdot GAA &= x^{38} \cdot x^{16} \\ &= x^{(38+16) \bmod 63} \\ &= x^{54} = ACC. \end{aligned}$$

**3.3. Struktur kodon DNA ( $B^3$ ).** Korespondensi 1-1 antara  $GF(64)$  dengan  $B^3$  mengakibatkan  $B^3$  juga merupakan suatu lapangan Galois berdimensi 64 sebagaimana dinyatakan dalam Proposisi berikut ini

**Proposisi 3.5.**  $B^3$  merupakan lapangan Galois berorder 64.

*Bukti.* Untuk membuktikan  $B^3$  lapangan Galois cukup dibuktikan bahwa  $GF(64)$  merupakan lapangan. Hal ini diakibatkan adanya isomorfisma antara  $GF(64)$  dengan  $B^3$ . Pembuktian diawali dengan menunjukkan bahwa  $(GF(64), +)$  grup komutatif. Misalkan diberikan  $a, b, c \in GF(64)$  sebarang dengan

$$\begin{aligned} a &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5) + I \\ b &= (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5) + I \\ c &= (c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5) + I \end{aligned}$$

$\forall a_i, b_i, c_i \in \mathbb{Z}_2$  di mana  $i = 1, 2, \dots, 5$  dan  $I = \langle 1 + x^5 + x^6 \rangle$ . Untuk membuktikan  $\forall a, b \in GF(64)$  berlaku  $a + b \in GF(64)$ , perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a + b &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + I) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 + I) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3 + (a_4 + b_4)x^4 + (a_5 + b_5)x^5 + I \end{aligned}$$

dengan  $a_i, b_i \in \mathbb{Z}_2$  dan  $\mathbb{Z}_2$  grup, maka  $a_i + b_i \in \mathbb{Z}_2$  di mana  $i = 0, 1, \dots, 5$ , sehingga  $(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3 + (a_4 + b_4)x^4 + (a_5 + b_5)x^5 + I \in GF(64)$ . Terbukti  $\forall a, b \in GF(64)$  berlaku  $a + b \in GF(64)$ . Selanjutnya, untuk menunjukkan  $\forall a, b, c \in GF(64)$  berlaku  $a + (b + c) = (a + b) + c$  maka diperoleh

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + I) \\ &\quad + ((b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)x + (b_2 + c_2)x^2 + (b_3 + c_3)x^3 + (b_4 + c_4)x^4 + (b_5 + c_5)x^5 + I) \\ &= (a_0 + (b_0 + c_0)) + (a_1 + (b_1 + c_1))x + (a_2 + (b_2 + c_2))x^2 + (a_3 + (b_3 + c_3))x^3 \\ &\quad + (a_4 + (b_4 + c_4))x^4 + (a_5 + (b_5 + c_5))x^5 + I \end{aligned}$$

karena  $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{Z}_2$  dan  $\mathbb{Z}_2$  grup, maka

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= ((a_0 + b_0) + c_0) + ((a_1 + b_1) + c_1)x + ((a_2 + b_2) + c_2)x^2 + ((a_3 + b_3) + c_3)x^3 \\ &\quad + ((a_4 + b_4) + c_4)x^4 + ((a_5 + b_5) + c_5)x^5 + I \\ &= ((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3 \\ &\quad + (a_4 + b_4)x^4 + (a_5 + b_5)x^5 + I) + (c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + I) \\ &= (a + b) + c \end{aligned}$$

Terbukti  $\forall a, b, c \in GF(64)$  berlaku  $a + (b + c) = (a + b) + c$ . Kemudian dapat ditunjukkan bahwa  $\exists e_G \in GF(64) \ni a + e_G = e_G + a = a, \forall a \in GF(64)$ . Pilih  $e_G = I = 1 + x^5 + x^6$  dimana

$x^6 = 1 + x^5$ , maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 e_G + a &= I + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + I) \\
 &= (1 + x^5 + x^6) + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + I) \\
 &= (1 + a_0) + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + (1 + a_5)x^5 + x^6 + I \\
 &= (1 + a_0) + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + (1 + a_5)x^5 + (1 + x^5) + I \\
 &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + I = a \\
 &= (1 + a_0) + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + (1 + a_5)x^5 + x^6 + I \\
 &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + I) + (1 + x^5 + x^6) \\
 &= a + e_G.
 \end{aligned}$$

Terbukti  $\exists e_G = I = 1 + x^5 + x^6 \ni a + (1 + x^5 + x^6) = (1 + x^5 + x^6) + a = a, \forall a \in GF(64)$ .

Setelah itu, perlu dibuktikan  $\forall a \in GF(64) \exists (-a) \in GF(64) \ni a + (-a) = (-a) + a = I$ . Untuk setiap  $a \in GF(64)$  dipilih  $(-a) = a$  sehingga

$$\begin{aligned}
 a + (-a) &= a + a \\
 &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + I) + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + I) \\
 &= ((a_0 + a_0) + (a_1 + a_1)x + (a_2 + a_2)x^2 + (a_3 + a_3)x^3 + (a_4 + a_4)x^4 + (a_5 + a_5)x^5 + I).
 \end{aligned}$$

Pandang jika untuk setiap elemen di  $\mathbb{Z}_2$ , maka untuk  $a_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, 5$

$$a + (-a) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + 0x^5 + I = I.$$

Sedangkan, untuk  $a_i = 1 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, 5$ , berlaku

$$a + (-a) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + 0x^5 + I = I.$$

Jadi terbukti  $\forall a \in GF(64) \exists (-a) \in GF(64) \ni a + (-a) = (-a) + a = I$ . Terakhir, perlu dibuktikan bahwa  $\forall a, b \in GF(64)$  berlaku  $a + b = b + a$ , perhatikan

$$\begin{aligned}
 a + b &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + I) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 + I) \\
 &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3 + (a_4 + b_4)x^4 + (a_5 + b_5)x^5 + I.
 \end{aligned}$$

Karena  $a_i, b_i \in \mathbb{Z}_2$  dan  $\mathbb{Z}_2$  komutatif, maka

$$\begin{aligned}
 a + b &= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)x + (b_2 + a_2)x^2 + (b_3 + a_3)x^3 + (b_4 + a_4)x^4 + (b_5 + a_5)x^5 + I \\
 &= (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 + I) + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + I) \\
 &= b + a.
 \end{aligned}$$

Terbukti  $\forall a, b \in GF(64)$  berlaku  $a + b = b + a$ . Dengan demikian, terbukti bahwa  $(GF(64), +)$  grup komutatif.

Kedua, perlu dibuktikan bahwa  $(GF(64) - \{0\}, \cdot)$  merupakan grup komutatif. Misalkan diberikan  $x^i, x^j, x^k \in GF(64) - \{0\}$  dengan  $i, j, k \geq 0 \pmod{63}$ , maka yang pertama perlu dibuktikan  $\forall x^i, x^j \in GF(64) - \{0\}$  berlaku  $x^i \cdot x^j \in GF(64) - \{0\}$ . Pandang perkalian tersebut, diperoleh bahwa

$$x^i \cdot x^j = x^{(i+j) \pmod{63}}.$$

. Karena  $i, j \geq 0$  maka  $i + j \geq 0 \pmod{63}$ . Terbukti  $\forall x^i, x^j \in GF(64) - \{0\}$  berlaku  $x^i \cdot x^j \in GF(64) - \{0\}$ .

Selanjutnya, dapat ditunjukkan bahwa  $\forall x^i, x^j, x^k \in GF(64) - \{0\}$  berlaku  $x^i \cdot (x^j \cdot x^k) = (x^i \cdot x^j) \cdot x^k$ , sehingga diperoleh persamaan berikut

$$x^i \cdot (x^j \cdot x^k) = x^i \cdot (x^{j+k}) = x^{i+j+k}$$

Karena polinomial bersifat asosiatif terhadap perkalian, maka

$$x^i \cdot (x^j \cdot x^k) = x^{i+j+k} = x^{(i+j)+k} = x^{i+j} \cdot x^k = (x^i \cdot x^j) \cdot x^k.$$

Jadi terbukti  $\forall x^i, x^j, x^k \in GF(64) - \{0\}$  berlaku  $x^i \cdot (x^j \cdot x^k) = (x^i \cdot x^j) \cdot x^k$ .

Kemudian, dapat ditunjukkan bahwa  $\exists e_A \in GF(64) - \{0\} \ni e_A \cdot x^i = x^i \cdot e_A = x^i \quad \forall x^i \in GF(64) - \{0\}$ . Pilih  $e_A = 1 \in B^3$  sehingga berlaku

$$e_A \cdot x^i = 1 \cdot x^i = x^i = x^i \cdot 1 = x^i \cdot e_A.$$

Terbukti  $\exists e_A \in GF(64) - \{0\} \ni e_A \cdot x^i = x^i \cdot e_A = x^i \quad \forall x^i \in GF(64) - \{0\}$ .

Selanjutnya, untuk membuktikan  $\forall x^i \in GF(64) - \{0\} \exists (x^i)^{-1} \in GF(64) - \{0\} \ni x^i \cdot (x^i)^{-1} = (x^i)^{-1} \cdot x^i = 1$ , maka setiap  $x^i \in GF(64) - \{0\}$  dipilih  $(x^i)^{-1} = x^{63-i}$  sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} x^i \cdot (x^i)^{-1} &= x^i \cdot x^{(63-i) \bmod 63} \\ &= x^{(i+63-i) \bmod 63} = x^0 = 1 \\ &= x^{(63-i+i) \bmod 63} = x^{(63-i) \bmod 63} \cdot x^i = (x^i)^{-1} \cdot x^i. \end{aligned}$$

Jadi terbukti  $\forall x^i \in GF(64) - \{0\} \exists (x^i)^{-1} = x^{63-i} \in GF(64) - \{0\} \ni x^i \cdot (x^i)^{-1} = (x^i)^{-1} \cdot x^i = 1$ . Selanjutnya diperlihatkan bahwa operasi perkalian di  $GF(64) - \{0\}$  bersifat komutatif atau  $\forall x^i, x^j \in GF(64) - \{0\}$  berlaku  $x^i \cdot x^j = x^j \cdot x^i$ , perhatikan

$$x^i \cdot x^j = x^{i+j} = x^{j+i} = x^j \cdot x^i$$

Terbukti  $\forall x^i, x^j \in GF(64) - \{0\}$  berlaku  $x^i \cdot x^j = x^j \cdot x^i$ .

Dengan demikian, terbukti bahwa  $GF(64)$  merupakan lapangan dan berorder hingga yaitu 64. Karena pemetaan  $GF(64)$  ke  $B^3$  bijektif, maka dapat dikatakan  $B^3$  juga lapangan berorder 64. □

**3.4. Dimensi ruang vektor  $B^3$  atas  $B^3$ .** Pada penelitian sebelumnya, Sanchez [9] telah menunjukkan bahwa  $B^3$  merupakan ruang vektor atas  $B^3$ . Selanjutnya, akan dibuktikan klaim bahwa  $B^3$  berdimensi 1 atas  $B^3$ .

**Proposisi 3.6.** *Ruang vektor  $B^3$  atas lapangan  $B^3$  berdimensi 1*

*Bukti.* Klaim himpunan  $S = \{GGA\}$  merupakan basis untuk ruang vektor  $B^3$  atas  $B^3$ . Pertama perlu ditunjukkan bahwa  $S$  bebas linear dengan menunjukkan bahwa solusi persamaan linear homogen

$$\alpha \cdot GGA = GGG, \quad \alpha \in B^3$$

hanya berlaku jika  $\alpha = GGG$ . Perhatikan persamaan  $\alpha \cdot GGA = GGG$ , berdasarkan Tabel 2 GGG berkorespondensi dengan elemen 0 dan GGA berkorespondensi dengan elemen 1 yang merupakan identitas perkalian, maka

$$\begin{aligned} \alpha \cdot GGA &= GGG \\ \alpha \cdot 1 &= 0 \\ \alpha &= 0 \\ \alpha &= GGG \end{aligned}$$

Terbukti bahwa himpunan  $S$  bebas linear. Kedua, untuk menunjukkan bahwa  $S$  membangun  $B^3$  maka buktikan  $\exists \alpha = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \in B^3$  untuk  $X_1 X_2 X_3 \in B^3$  dengan  $X_1, X_2, X_3 \in B$ . Pandang persamaan berikut

$$\begin{aligned}\alpha \cdot GGA &= X_1 X_2 X_3 \\ \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdot GGA &= X_1 X_2 X_3 \\ (k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots + k_5 x^5) \cdot (1 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^5) &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_5 x^5) \\ (k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots + k_5 x^5) \cdot 1 &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_5 x^5) \\ (k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots + k_5 x^5) &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_5 x^5)\end{aligned}$$

Dari persamaan tersebut diperoleh  $k_i = a_i \forall i = 1, 2, 3, 4$ . Maka pilih  $\alpha_1 = a_4 a_5$ ,  $\alpha_2 = a_2 a_3$ ,  $\alpha_3 = a_0 a_1$ , sehingga  $\exists \alpha = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = a_4 a_5 a_2 a_3 a_0 a_1 \in B^3$  dengan  $a_i \in \mathbb{Z}_2 \forall i = 1, 2, 3, 4, 5$  dan  $\alpha_j \in B \forall j = 1, 2, 3 \ni$

$$\begin{aligned}\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdot GGA &= X_1 X_2 X_3 \\ (a_4 + a_5 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_0 x^4 + a_1 x^5) \cdot (1 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^5) &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_5 x^5)\end{aligned}$$

Terbukti bahwa  $S$  membangun  $B^3$ .

Dengan demikian, terbukti bahwa  $S = \{GGA\}$  merupakan basis untuk  $B^3$ . Karena terdapat satu vektor dalam basis ruang vektor  $B^3$  atas  $B^3$ , maka dimensinya adalah satu.  $\square$

#### 4. SIMPULAN

DNA dapat direpresentasikan dalam bentuk matematis, di mana himpunan basa nitrogennya diidentifikasi dengan memetakan ke struktur aljabar yang telah diketahui. Dalam strukturnya, himpunan kodon (triplet basa DNA)  $B^3$  merupakan lapangan berorder 64 dan ruang vektor atas dirinya sendiri berdimensi 1. Hasil penelitian ini dapat dikembangkan untuk membuktikan bahwa  $(B^3)^N$  merupakan ruang vektor berdimensi  $N$  dan lebih jauh  $B^3$  maupun  $(B^3)^N$  merupakan aljabar Lie.

berkontribusi dalam penelitian ini dan dalam penyusunan manuskrip. Kami sangat menghargai editor dan reviewer atas masukan serta dukungannya dalam menyempurnakan karya ini.

#### PUSTAKA

- [1] Watson, J. D., and Crick, F. H. C., 1953, Molecular Structure of Nucleic Acids: A Structure for Deoxyribose Nucleic Acid, *Nature*, vol. 171, no. 4356, pp. 737–738, doi: 10.1038/171737a0.
- [2] Aisah, I., Fadilah, F. N., and Suyudi, M., 2017, Aplikasi Logika Matematika pada Aljabar Untaian DNA dalam Proses Hibridisasi, *Sigma-Mu*, vol. 9, no. 2, pp. 1–8.
- [3] Arsyad, M., and Hadi, P., 2025, Konstruksi Kode DNA dan Implementasinya Menggunakan Python, vol. 8, pp. 377–384.
- [4] Aisah, I., and Ulla, N., 2017, Grup Kuosien Sebagai Representasi Dari Kode Genetik Standar Berdasarkan Kimia Nukleotida, *Jurnal Matematika Integratif*, vol. 13, no. 1, p. 35, doi: 10.24198/jmi.v13i1.11412.
- [5] Aisah, I., Kurniadi, E., and Carnia, E., 2015, Representasi Mutasi Kode Genetik Standar Berdasarkan Basa Nukleotida, *Jurnal Matematika Integratif*, vol. 11, no. 1, p. 25, doi: 10.24198/jmi.v11i1.9399.
- [6] Aleem, H. A., Green, D. H., and Mavituna, F., 2009, Representing the Genetic Code as a Function on a Galois Field Using the Reed-Muller Expansion, *Proceedings of the 39th International Symposium on Multiple-Valued Logic*, IEEE, pp. 356–361, doi: 10.1109/ISMVL.2009.59.
- [7] Yang, H., and Xi, W., 2017, Nucleobase-containing polymers: Structure, synthesis, and applications, *Polymers*, vol. 9, no. 12, doi: 10.3390/polym9120666.
- [8] Sánchez, R., Grau, R., and Morgado, E., 2006, A Novel Lie Algebra of the Genetic Code over the Galois Field of Four DNA Bases, *Mathematical Biosciences*, vol. 202, no. 1, pp. 156–174, doi: 10.1016/j.mbs.2006.03.017.

- [9] Sanchez, R., Perfetti, L. A., Grau, R., and Morgado, E., 2004, A New DNA Sequences Vector Space on a Genetic Code Galois Field, *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, vol. 54, no. 1, pp. 3–28, doi: [arxiv.org/abs/q-bio/0412019](https://arxiv.org/abs/q-bio/0412019).
- [10] Gallian, J., 2025, *Contemporary Abstract Algebra*, Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, doi: 10.1201/9781003488026.

