

Matriks Hamburan pada Graf Kuantum dengan Kondisi Simpul Robin

MOH. JANUAR ISMAIL BURHAN DAN ADAM ADAM

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Informasi, Institut Teknologi
Kalimantan

Email: januarismail@lecturer.itk.ac.id

Abstrak

Artikel ini membahas formulasi matriks hamburan pada graf kuantum dengan kondisi simpul tipe- δ (Robin), yang merupakan perluasan dari kondisi simpul Neumann–Kirchhoff. Analisis dilakukan melalui propagasi gelombang bidang pada setiap sisi dan penerapan kondisi kontinuitas serta fluks di simpul-simpul graf. Dari penyelesaian masalah nilai eigen operator Laplace, diperoleh ekspresi eksplisit untuk amplitudo gelombang bidang dan entri matriks hamburan pada simpul batas maupun simpul interior. Hasil penelitian menunjukkan bahwa parameter Robin mengatur besarnya refleksi dan transmisi gelombang, serta mempengaruhi distribusi energi di sekitar simpul. Temuan ini memberikan dasar matematis bagi studi lanjutan mengenai transportasi kuantum dan fenomena resonansi pada jaringan berbasis graf.

Kata kunci: Graf Kuantum, Operator Laplace, Matriks Hamburan, Kondisi simpul Robin, Gelombang Bidang

Abstract

This article presents a concise formulation of the scattering matrix on quantum graphs equipped with δ -type (Robin) vertex conditions, which generalize the classical Neumann–Kirchhoff condition. The analysis is based on plane-wave propagation along each edge and the enforcement of continuity and flux balance at the vertices. By solving the eigenvalue problem associated with the edge-based Laplacian, explicit expressions for waveplane amplitudes and the corresponding scattering matrix are obtained for both boundary and interior vertices. The results demonstrate that the Robin parameter governs the degree of reflection and transmission of waves and significantly influences the distribution of energy around each vertex. These findings provide a mathematical foundation for further studies on quantum transport and resonance phenomena in graph-based systems.

Keywords: *Quantum Graph, Laplacian, Scattering Matrix, Robin vertex conditions, Plane wave*

1. PENDAHULUAN

Graf kuantum merupakan model matematis yang memadukan struktur graf metrik dengan suatu operator diferensial untuk menggambarkan propagasi gelombang pada media bercabang berdimensi rendah. Model ini telah menjadi alat penting dalam berbagai bidang, seperti fisika energi rendah, fotonik terpandu, transportasi kuantum pada nanowire, dan teori resonansi pada jaringan. Sejumlah survei fundamental oleh Kuchment [8, 9] dan kajian spektral oleh Kennedy [7] menunjukkan bahwa graf kuantum menyediakan kerangka yang kaya untuk memahami fenomena propagasi dan hamburan dalam struktur jaringan. Dalam konteks tersebut, perilaku gelombang pada simpul graf memainkan peranan sentral, karena simpul merupakan titik interaksi di mana pantulan, transmisi, dan distribusi energi ditentukan [12].

Salah satu konsep kunci dalam analisis gelombang pada graf kuantum adalah matriks hamburan (*scattering matrix*), yang memetakan amplitudo gelombang yang datang menuju simpul menjadi amplitudo gelombang yang keluar dari simpul tersebut. Struktur matriks hamburan sangat bergantung pada jenis kondisi simpul yang diberlakukan. Kondisi simpul Neumann–Kirchhoff adalah kondisi standar yang banyak digunakan karena bersifat konservatif dan menghasilkan propagasi bebas hambatan [10]. Namun demikian, kondisi tersebut tidak menangkap fenomena fisik seperti resistansi, interaksi lokal, atau pengaruh potensial singkat yang dapat terjadi pada simpul graf. Untuk menutupi keterbatasan tersebut, digunakan kondisi simpul tipe- δ atau Robin, yang merupakan generalisasi langsung dari kondisi Neumann–Kirchhoff dan telah dikembangkan dalam berbagai literatur, termasuk karya Exner dan Turek [11] serta studi vertex coupling oleh Kurasov [4].

Kondisi Robin memperkenalkan parameter γ yang mengendalikan besar interaksi lokal pada simpul. Parameter ini dapat dimaknai sebagai intensitas “hambatan” atau “kopling” yang mempengaruhi perilaku gelombang di sekitar simpul. Dengan demikian, kondisi Robin berperan dalam menentukan seberapa besar gelombang dipantulkan atau diteruskan, sehingga sangat relevan dalam kajian transportasi kuantum, kontrol resonansi, dan desain struktur jaringan berbasis gelombang [5]. Meskipun formulasi umum kondisi Robin telah dikenal, ekspresi eksplisit untuk matriks hamburan pada graf kuantum—terutama ketika dihitung langsung dari solusi gelombang bidang pada operator Laplace berbasis sisi masih memerlukan penurunan matematis yang sistematis, sebagaimana pendekatan sebelumnya yang berfokus pada propagasi dan konservasi energi [1, 2] serta studi spektral [3].

Artikel ini berfokus pada penyusunan formulasi eksplisit matriks hamburan untuk simpul batas dan simpul interior pada graf kuantum yang memenuhi kondisi tipe- δ (Robin). Dengan memodelkan gelombang pada setiap sisi sebagai superposisi gelombang bidang dan menerapkan prinsip kontinuitas serta keseimbangan fluks pada simpul, diperoleh hubungan antara amplitudo gelombang datang dan pantulan. Dari hubungan ini dirumuskan bentuk umum entri matriks hamburan untuk simpul berderajat sebarang. Formulasi yang dihasilkan menunjukkan keterkaitan langsung antara parameter Robin dan struktur matriks hamburan, sekaligus memperlihatkan bagaimana perubahan nilai γ mempengaruhi distribusi energi gelombang pada graf.

Temuan dalam penelitian ini tidak hanya memberikan dasar teoritis bagi analisis spektral graf kuantum dan studi resonansi [6, 16], tetapi juga menawarkan kerangka yang dapat digunakan dalam simulasi numerik dan desain sistem fisik berbasis jaringan. Dengan formulasi matriks hamburan yang diperoleh, analisis propagasi gelombang pada graf kuantum dapat dilakukan secara lebih terstruktur dan efektif.

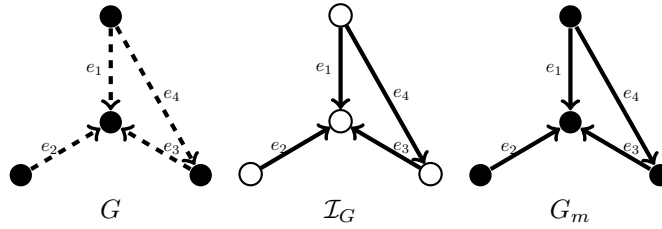
2. TINJAUAN PUSTAKA

Penelitian dasar graf kuantum dan teori spektral dapat dilihat dalam [9, 10]. Studi mengenai fenomena resonansi dan dinamika hamburan diperluas oleh Gnuzmann dan Smilansky [12]. Dalam konteks kondisi Robin dan variasi coupling simpul, Exner dan Turek [11] membahas formulasi scattering operator umum, sementara Kurasov [4] memberikan formulasi teoritis vertex conditions termasuk Robin, Dirichlet, dan Neumann–Kirchhoff.

2.1. Graf Metrik. Misalkan $G = (V, E)$ graf berarah, L_e adalah ukuran dari sisi e (Dalam hal ini adalah panjang sisi e) dan $\mathcal{I}_G = \cup_{e \in E} (\{e\} \times (0, L_e))$. Graf metrik G_m atas graf G adalah himpunan yang didefinisikan sebagai

$$G_m := (V, \mathcal{I}_G), \quad (1)$$

dengan himpunan $\mathcal{I}_G$ dapat dianggap sebagai interior sisi e dari graf metrik G_m . Definisi alternatif lainnya dari graf metrik dapat dilihat di [10, 16]. Lebih lanjut, suatu graf metrik disebut ekuilateral jika $L_e = 1$ untuk setiap e . Pada graf metrik dapat didefinisikan ukuran pada simpul dan ukuran pada sisi. Lebih khusus, suatu ukuran Lebesgue dapat didefinisikan pada sisi yang diidentifikasi dengan interval $[0, L_e]$ [13]. Ilustrasi graf metrik G_m untuk graf bintang S_3 dapat dilihat pada Gambar 1.



GAMBAR 1. Ilustrasi G , $\mathcal{I}_G$, dan G_m untuk graf bintang S_3 .

Operator Laplace berbasis sisi dapat dipandang sebagai operator Laplace yang bekerja pada garis, yang dinotasikan sebagai $-\Delta$. Operator Laplace tersebut memiliki domain ruang Sobolev $D(-\Delta) = \tilde{H}_0^2(G)$ yang lebih jauh dijelaskan pada [14] dengan kondisi simpul yang diberikan pada masing-masing simpul pada graf G_m . Berikut ini diberikan tiga kondisi pada simpul, yang merupakan kondisi-kondisi yang digunakan dalam pembahasan artikel ini. Antara lain kondisi Neumann-Kirchhoff, Dirichlet, dan kondisi perumumannya yang disebut dengan kondisi simpul type- δ .

Kondisi Neumann-Kirchhoff pada simpul interior $v_{int} \in V \setminus \partial G$ adalah

$$\begin{cases} f_e(v_{int}) \text{ kontinu (Kondisi Kompatibilitas),} \\ \sum_{e \in E_{v_{int}}} q_{v_{int},e} f'_e(v_{int}) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

dan kondisi Neumann pada simpul batas $v_s \in \partial G$ adalah $f'_e(v_s) = 0$. Sedangkan kondisi Dirichlet pada simpul interior $v_{int} \in V \setminus \partial G$ adalah

$$\begin{cases} f_e(v_{int}) \text{ kontinu (Kondisi Kompatibilitas),} \\ f_e(v_{int}) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

dan kondisi Dirichlet pada simpul batas $v_s \in \partial G$ adalah $f_e(v_s) = 0$. Terakhir, kondisi simpul type- δ pada simpul interior

$$\begin{cases} f_e(v_{int}) \text{ kontinu (Kondisi Kompatibilitas),} \\ \sum_{e \in E_{v_{int}}} q_{v_{int},e} f'_e(v_{int}) = \gamma_v f_{e_i}(v_{int}), \text{ untuk suatu } e_i \in E_{v_{int}}. \end{cases} \quad (4)$$

dan pada simpul batas $v_s \in \partial G$ adalah $f'_e(v_s) = \gamma f_e(v_s)$, dengan γ adalah bilangan tetap. Selanjutnya, graf kuantum adalah graf metrik G_m yang dilengkapi dengan operator diferensial $-\Delta$ (negatif operator Laplace khususnya), disertai dengan kondisi pada simpul (kondisi simpul). Graf kuantum biasanya dituliskan sebagai pasangan terurut $(G_m, -\Delta)$.

2.2. Matriks Hamburan Neumann-Kirchhoff. Entri-entri matriks hamburan menggambarkan amplitudo dari hasil transmisi atau pantulan gelombang bidang yang bergerak pada suatu sisi graf kuantum. Sebagai contoh pada artikel [15] dapat dilihat pergerakan gelombang bidang pada graf Lasso. Lebih lanjut, pada artikel tersebut dijelaskan proses sederhana untuk memperoleh formula entri-entri matriks hamburan untuk kondisi Neumann-Kirchhoff.

Proposisi 2.1. Secara eksplisit entri-entri dari matriks hamburan $S = [s_{l,j}]$ untuk kondisi simpul Neumann-Kirchhoff pada graf metrik G_m adalah sebagai berikut:

$$s_{l,j} := \begin{cases} \frac{2}{d_{t(j)}} - 1, & \text{jika } l = \bar{j}, \\ \frac{2}{d_{t(j)}}, & \text{jika } l \neq \bar{j} \text{ dan } t(j) = o(l), \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases} \quad (5)$$

Dengan $t(j)$ adalah simpul akhir sisi j dan $o(j)$ adalah simpul awal dari sisi j . Lebih lanjut $d_{t(j)}$ dinotasikan sebagai derajat dari simpul $t(j)$.

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan melalui pendekatan analitik terhadap operator Laplace pada graf kuantum yang dilengkapi kondisi simpul tipe- δ (Robin). Tahapan penelitian dimulai dengan memformulasikan graf metrik dan operator diferensial berbasis sisi, kemudian menentukan bentuk umum solusi gelombang bidang pada setiap sisi melalui penyelesaian masalah nilai eigen $-f'' = k^2 f$. Selanjutnya, kondisi Robin pada simpul batas dan simpul interior dianalisis untuk memperoleh hubungan eksplisit antara amplitudo gelombang datang dan pantulan. Substitusi solusi gelombang ke dalam kondisi kontinuitas dan kondisi fluks menghasilkan sistem persamaan amplitudo yang diselesaikan secara simbolik untuk mendapatkan koefisien refleksi dan transmisi. Berdasarkan formulasi yang diperoleh, disusun entri matriks hamburan untuk setiap simpul dan digabungkan menjadi matriks hamburan global graf kuantum. Metode ini juga digunakan untuk menurunkan sifat-sifat struktural matriks hamburan, seperti unitaritas dan similaritas, yang menjadi dasar analisis spektral pada graf kuantum berkondisi Robin.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

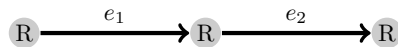
Pada bagian ini, dibahas mengenai hasil yaitu memperoleh formulasi matriks hamburan dari kondisi simpul tipe- δ , yang selanjutnya secara khusus kondisi ini disebut dengan kondisi simpul Robin. Pada [10], kondisi simpul tipe- δ diberikan sebagai berikut:

$$\begin{cases} f(x) \text{ kontinu di simpul } v, \\ \sum_{e \in E_v} \frac{d}{dx_e} f(v) = \gamma_v f(v), \end{cases}$$

dengan γ_v adalah bilangan yang ditetapkan. Kondisi ini dikenal sebagai analogi kondisi yang diperoleh untuk operator Schrodinger pada suatu saluran dengan potensial δ . Kondisi ini akan menjadi kondisi Neumann-Kirchhoff apabila γ_v bernilai nol. Selanjutnya untuk memperoleh matriks hamburan dari kondisi simpul tipe- δ , perlu diobservasi dan dihitung pada setiap simpul, baik pada simpul yang berderajat satu yaitu simpul batas maupun pada simpul interior.

Pembahasan dimulai dari contoh pada graf lintasan sederhana P_3 yang diberikan kondisi simpul robin baik pada simpul batas maupun simpul interiornya. Sebagaimana Berkolaiko pada artikel [15] di tahun 2017 telah membahas penurunan rumus untuk entri matriks hamburan berkondisi Neumann, dalam artikel ini disajikan langkah yang sama dimulai dengan perhitungan amplitudo gelombang bidang yang menjadi solusi dari masalah nilai eigen operator Laplace berbasis sisi.

Misalkan pada graf lintasan P_3 (Ilustrasi dapat dilihat pada Gambar 2) diberikan masalah nilai eigen operator Laplace berbasis sisi sebagai berikut:



GAMBAR 2. Huruf R menotasikan kondisi simpul Robin. Dengan arah dari sisi e_j adalah parameter dari 0 ke 1.

$$f_j'' = k^2 f_j, \text{ untuk setiap } j = 1, 2. \quad (6)$$

a. Pada simpul batas diberikan kondisi Robin

$$\begin{aligned} f_1'(0) &= \gamma f_1(0), \\ f_2'(1) &= \gamma f_2(1). \end{aligned}$$

b. Pada simpul interior diberikan kondisi Robin

$$\text{Kondisi Kompatibilitas (Kontinu): } f_1(1) = f_2(0), \quad (7)$$

$$\text{Kondisi Robin pada simpul interior: } f_1'(1) - f_2'(0) = \gamma f_1(1).$$

Dapat ditinjau bahwa solusi dari permasalahan nilai eigen (6) dalam bentuk dua superposisi gelombang bidang

$$f_j(x_e) = a_j e^{ikx_e} + a_{\bar{j}} e^{ik(1-x_e)} \text{ untuk setiap } j = 1, 2.$$

Pada kedua simpul batas dapat dilakukan perhitungan sebagai berikut, pertama pada simpul yang bersisian dengan sisi e_1

$$\begin{aligned} f_1'(0) &= \gamma f_1(0) \\ ika_1 - a_{\bar{1}} ike^{ik} &= \gamma (a_1 + a_{\bar{1}} e^{ik}) \\ ika_1 - \gamma a_1 &= a_{\bar{1}} ike^{ik} + \gamma a_{\bar{1}} e^{ik} \\ (ik - \gamma) a_1 &= (ik + \gamma) a_{\bar{1}} e^{ik} \\ a_1 &= \frac{(ik + \gamma)}{(ik - \gamma)} a_{\bar{1}} e^{ik}. \end{aligned}$$

dengan cara yang sama, pada simpul yang bersisian dengan sisi e_2 dapat diperoleh

$$a_{\bar{2}} = \frac{(ik + \gamma)}{(ik - \gamma)} a_2 e^{ik}.$$

Pada simpul interior, diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} f_1'(1) - f_2'(0) &= \gamma f_2(0) \\ ika_1 e^{ik} - ika_{\bar{1}} - (ika_2 - ika_{\bar{2}} e^{ik}) &= \gamma (a_2 + a_{\bar{2}} e^{ik}) \\ a_1 e^{ik} - a_{\bar{1}} + a_{\bar{2}} e^{ik} - \frac{\gamma}{ik} a_{\bar{2}} e^{ik} &= \frac{\gamma + ik}{ik} a_2, \end{aligned}$$

Menggunakan aturan kontinu (7) pada simpul interior bahwa $f_1(1) = f_2(0)$, maka diperoleh bahwa,

$$\begin{aligned} 2a_1 e^{ik} - a_2 - \frac{\gamma}{ik} a_{\bar{2}} e^{ik} &= \frac{\gamma + ik}{ik} a_2 \\ 2a_1 e^{ik} - \frac{\gamma}{ik} a_{\bar{2}} e^{ik} &= \frac{\gamma + 2ik}{ik} a_2, \end{aligned}$$

jadi nilai koefisien $a_2 = \frac{2ik}{\gamma + 2ik} a_1 e^{ik} - \frac{\gamma}{\gamma + 2ik} a_{\bar{2}} e^{ik}$. Dengan cara yang sama, dapat diperoleh

$$a_{\bar{1}} = \frac{2ik}{\gamma + 2ik} a_{\bar{2}} e^{ik} - \frac{\gamma}{\gamma + 2ik} a_1 e^{ik}.$$

Dengan demikian, diperoleh hubungan perkalian matriks sebagai berikut

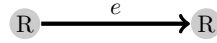
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_{\bar{1}} \\ a_{\bar{2}} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{(ik+\gamma)}{(ik-\gamma)} & 0 \\ \frac{2ik}{\gamma+2ik} & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{\gamma+2ik} \\ -\frac{\gamma}{\gamma+2ik} & 0 & 0 & \frac{2ik}{\gamma+2ik} \\ 0 & \frac{(ik+\gamma)}{(ik-\gamma)} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ik} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{ik} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{ik} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{ik} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_{\bar{1}} \\ a_{\bar{2}} \end{bmatrix}.$$

Dengan matriks hamburan yang diperoleh pada permasalahan nilai eigen operator Laplace berbasis sisi pada graf lintasan kuantum P_3 adalah

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{(ik+\gamma)}{(ik-\gamma)} & 0 \\ \frac{2ik}{\gamma+2ik} & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{\gamma+2ik} \\ -\frac{\gamma}{\gamma+2ik} & 0 & 0 & \frac{2ik}{\gamma+2ik} \\ 0 & \frac{(ik+\gamma)}{(ik-\gamma)} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Setelah diperoleh matriks hamburan pada graf sederhana. Selanjutnya diberikan langkah-langkah untuk mengkontruksi entri-entri matriks hamburan pada graf yang lebih umum. Dengan cara mengobservasi hasil nilai amplitudo gelombang bidang pada simpul batas dan simpul interior.

4.1. Pada Simpul Batas. Misalkan permasalahan kondisi simpul Robin diberikan pada kedua simpul di sebuah sisi e dengan parameter simpul awal 0 dan simpul akhir 1, yang diilustrasikan pada gambar di bawah ini,



GAMBAR 3. Huruf R menotasikan kondisi simpul Robin. Dengan arah dari sisi e adalah parameter dari 0 ke 1.

$$\begin{aligned} f'_e(0) &= \gamma f_e(0), \\ f'_e(1) &= -\gamma f_e(1). \end{aligned} \quad (8)$$

Untuk kasus dawai yang bergetar, penafsirannya adalah dawai itu membagi energinya dengan simpul batas apabila γ dan γ bernilai real positif. Misalkan solusi permasalahan nilai eigen $-f''_e = k^2 f_e$ adalah

$$f_e(x_e) = a_e e^{ikx_e} + a_{\bar{e}} e^{ik(1-x_e)}. \quad (9)$$

Dari (8) diperoleh

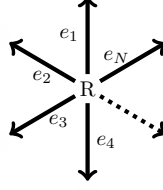
$$ika_e - ika_{\bar{e}} e^{ik} = \gamma (a_e + a_{\bar{e}} e^{ik}) \text{ dan} \quad (10)$$

$$ika_e e^{ik} - ika_{\bar{e}} = -\gamma (a_e e^{ik} + a_{\bar{e}}). \quad (11)$$

Selanjutnya, persamaan (10) dan (11) dapat digunakan untuk menentukan masing-masing amplitudo a_e dan $a_{\bar{e}}$. Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned} (ik - \gamma) a_e &= (ik + \gamma) a_{\bar{e}} e^{ik} \\ a_e &= \frac{k - \gamma i}{k + \gamma i} a_{\bar{e}} e^{ik} \text{ dan} \\ (ik + \gamma) a_e e^{ik} &= (ik - \gamma) a_{\bar{e}} \\ a_{\bar{e}} &= \frac{k - \gamma i}{k + \gamma i} a_e e^{ik}. \end{aligned}$$

Catatan 4.1. Untuk simpul batas berkondisi Robin (8) pada graf kuantum, nilai amplitudo gelombang bidang pada sisi e adalah $a_e = \frac{k-\gamma i}{k+\gamma i} a_{\bar{e}} e^{ik}$ dan $a_{\bar{e}} = \frac{k-\gamma i}{k+\gamma i} a_e e^{ik}$.

GAMBAR 4. Simpul interior, R untuk kondisi Robin.

4.2. Pada Simpul Interior. Misalkan graf kuantum yang berisi satu simpul interior berderajat $d_{v_{int}} = N$ (Ilustrasi dapat dilihat pada Gambar 4). Misalkan simpul interior v_{int} diberikan kondisi Robin dan kontinu (kompatibilitas) sebagai berikut:

$$\sum_{j=1}^N f'_j(0) = -\gamma f_1(0), \quad (12)$$

$$f_1(0) = f_2(0) = \dots = f_N(0).$$

Dengan menggunakan solusi masalah eigen (9), diperoleh

$$ik \left[\sum_{j=1}^N a_j - a_{\bar{j}} e^{ik} \right] = -\gamma [a_d + a_{\bar{d}} e^{ik}], \text{ dan} \quad (13)$$

$$a_j = a_d + a_{\bar{d}} e^{ik} - a_{\bar{j}} e^{ik}, \text{ untuk suatu } 1 \leq d \leq N. \quad (14)$$

Apabila persamaan (13) dan (14) digabung, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N a_d + a_{\bar{d}} e^{ik} - 2a_{\bar{j}} e^{ik} &= -\frac{\gamma}{ik} [a_d + a_{\bar{d}} e^{ik}] \\ Na_d + Na_{\bar{d}} e^{ik} - \sum_{j=1}^N 2a_{\bar{j}} e^{ik} &= -\frac{\gamma}{ik} [a_d + a_{\bar{d}} e^{ik}] \\ Na_d + \frac{\gamma}{ik} a_d e^{ik} &= 2 \sum_{j=1}^N a_{\bar{j}} e^{ik} - \frac{\gamma}{ik} a_{\bar{d}} e^{ik} - Na_{\bar{d}} e^{ik} \\ \left(\frac{Nik + \gamma}{ik} \right) a_d &= 2 \sum_{j=1}^N a_{\bar{j}} e^{ik} + \left(\frac{-\gamma - Nik}{ik} \right) a_{\bar{d}} e^{ik} \\ a_d &= \frac{2ik}{Nik + \gamma} \sum_{j=1}^N a_{\bar{j}} e^{ik} + \frac{-\gamma - Nik}{Nik + \gamma} a_{\bar{d}} e^{ik} \\ &= \frac{2ik}{Nik + \gamma} \sum_{j \in \{1, \dots, N\} \setminus \{d\}} a_{\bar{j}} e^{ik} + \frac{-\gamma + (2-N)ik}{Nik + \gamma} a_{\bar{d}} e^{ik} \end{aligned}$$

Lemma 4.2. Misalkan permasalahan nilai eigen dengan kondisi simpul Robin (12) pada simpul interior berderajat $d_{v_{int}} = N$. Nilai amplitudo gelombang bidang yang melewati simpul interior tersebut adalah

$$a_d = \frac{2ik}{Nik + \gamma} \sum_{j \in \{1, \dots, N\} \setminus \{d\}} a_{\bar{j}} e^{ik} + \frac{-\gamma + (2-N)ik}{Nik + \gamma} a_{\bar{d}} e^{ik}.$$

Catatan 4.3. Pada (12), nilai amplitudo a_d untuk suatu $1 \leq d \leq N$ adalah jumlah dari nilai amplitudo $\frac{2ik}{Nik + \gamma} a_{\bar{j}}$ dari $N - 1$ sisi lain dan amplitudo hasil pantulan sebesar $\frac{-\gamma + (2-N)ik}{Nik + \gamma}$,

dengan N banyaknya sisi yang berinsidensi dengan simpul interior dan γ adalah koefisien kondisi Robin.

Dari pembahasan pada simpul batas dan simpul interior untuk kondisi simpul Robin, maka diperoleh akibat mengenai entri matriks hamburan pada graf kuantum berkondisi simpul Robin yang disajikan pada proposisi berikut ini:

Proposisi 4.4. Misalkan $(G_m, -\Delta)$ adalah graf kuantum dan d_v adalah derajat simpul v . Selanjutnya, misalkan kondisi Robin diberikan sebagai berikut:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{d_v} (-1)^{1-x_e(v)} f'_j(x(v)) = \gamma f_d(x_e(v)) & \text{untuk suatu } 1 \leq d \leq d_v, \\ f_j(x_e(v)) = f_k(x_e(v)) & \text{untuk } e_j, e_k \in E_v \text{ dan } j \neq k. \end{cases}$$

Jika j adalah sisi berarah dengan parameter $[0, 1]$ dan $\bar{j}$ adalah sisi tersebut dengan arah yang berlawanan, maka matriks hamburan $S = (s_{ij})_{2|E| \times 2|E|}$ pada graf G_m berkondisi Robin pada setiap simpulnya mempunyai entri-entri

$$s_{l,j} = \begin{cases} \frac{-\gamma + (2-N)ik}{d_v ik + \gamma}, & \text{jika } l = \bar{j}, \\ \frac{2ik}{d_v ik + \gamma}, & \text{jika } l \neq \bar{j} \text{ dan } t(j) = o(l), \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Setelah diperoleh matriks hamburan untuk kondisi Robin. Berikut ini, diberikan sifat dari matriks hamburan yang mempunyai peranan penting pada perhitungan nilai eigen operator Laplace berbasis sisi sebagaimana digunakan untuk menentukan solusi persamaan gelombang pada graf kuantum yang dibahas pada [1].

Lemma 4.5. [10] Misalkan $(G_m, -\Delta)$ adalah graf kuantum ekuilateral dengan matriks hamburan S yang telah terdefinisi sebelumnya. S adalah matriks uniter. Jika G_m adalah graf kuantum dengan semua simpul (simpul batas dan interior) memenuhi kondisi Neumann-Kirchhoff, maka S adalah stokastik baris, dengan nilai eigen $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{C}$ dengan $|\gamma_j| = 1$ untuk setiap $j = 1, \dots, n$.

Perlu diperhatikan bahwa matriks persegi $S = (s_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dengan $0 \leq s_{ij} \leq 1$ untuk semua $1 \leq i, j \leq n$ disebut sebagai matriks stokastik baris jika $\sum_{j=1}^n s_{ij} = 1$ untuk semua $i \in \{1, \dots, n\}$. Teorema berikut memastikan matriks hamburan yang diperoleh dari graf kuantum dengan arah sisi berbeda adalah similar. Sebagai akibat wajar, nilai eigen yang diperoleh dari semua matriks hamburan dalam graf kuantum adalah sama.

Teorema 4.6. Semua matriks hamburan dari suatu graf kuantum ekuilateral G_m dengan kondisi simpul yang diberikan adalah similar.

Bukti Teorema 3.6. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan diberikan kondisi simpul Neumann-Kirchhoff pada semua simpul graf G_m . Selanjutnya, misalkan pula matriks hamburan standard $S^{(0)}$ adalah matriks hamburan yang diperoleh dari parameterisasi $o(e_j) = u$ dan $t(e_j) = v$ pada sisi $e_j = (u, v)$ untuk suatu $j \in \{1, \dots, N\}$. Dengan baris dan kolom dari matriks tersebut terurut sesuai label sisi berarah $1, 2, \dots, N, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{N}$.

Ingat bahwa j adalah sisi berarah dengan arah parameter yang berkorespondensi dengan interval $[0, L_j]$ dan $\bar{j}$ adalah sisi yang sama dengan arah yang berlawanan. Jika graf kuantum ekuilateral G_m diubah parameterisasi pada sebarang sisinya, yaitu ada $i \in \{1, \dots, N\}$ sedemikian sehingga $o(e_i) = v$ dan $t(e_i) = u$, maka diperoleh matriks hamburan $S^{(i)}$ yang lain dengan urutan

$$1, 2, \dots, \bar{i}, \dots, N, \bar{1}, \bar{2}, \dots, i, \dots, \bar{N}.$$

Dapat dipilih matriks permutasi P_σ dengan $\sigma(\bar{j}) = j$ untuk $j = i$ sedemikian sehingga $S^{(0)} = P_\sigma^{-1} S^{(i)} P_\sigma$. Lebih lanjut, apabila parameterisasi dari n buah sisi diubah sekaligus pada graf kuantum G_N , maka hal tersebut dapat dilakukan dengan cara mengubah satu per

satu parameterisasi sisi pada graf G_N sampai semua parameterisasi dari n sisinya berubah. Jadi dapat ditulis

$$\begin{aligned} S^{(0)} &= P_{\sigma_1}^{-1} S^{(1)} P_{\sigma_1} \\ &\vdots \\ S^{(n-1)} &= P_{\sigma_n}^{-1} S^{(n)} P_{\sigma_n}, \end{aligned}$$

sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} S^{(0)} &= P_{\sigma_1}^{-1} P_{\sigma_2}^{-1} P_{\sigma_3}^{-1} \dots P_{\sigma_N}^{-1} S^{(N)} P_{\sigma_N} \dots P_{\sigma_3} P_{\sigma_2} P_{\sigma_1} \\ &= (P_{\sigma_N} \dots P_{\sigma_3} P_{\sigma_2} P_{\sigma_1})^{-1} S^{(N)} (P_{\sigma_N} \dots P_{\sigma_3} P_{\sigma_2} P_{\sigma_1}) \end{aligned}$$

Pernyataan tersebut menunjukkan bahwa matriks hamburan standar $S^{(0)}$ similar dengan semua matriks hamburan pada graf kuantum ekuilateral G_m . Dengan demikian, semua matriks hamburan dari graf kuantum ekuilateral G_m dengan kondisi simpul yang diberikan adalah similar. $\square$

5. SIMPULAN

Penelitian ini memberikan formulasi eksplisit matriks hamburan untuk graf kuantum dengan kondisi simpul Robin. Melalui analisis gelombang bidang pada setiap sisi, diperoleh hubungan antara amplitudo datang dan amplitudo pantul baik pada simpul batas maupun simpul interior. Hasil ini menunjukkan bahwa parameter Robin menentukan besar pantulan dan transmisi gelombang. Selain itu, struktur matriks hamburan yang terbentuk bersifat konsisten dan similar sehingga nilai eigennya tidak bergantung pada parameterisasi sisi. Temuan ini menjadi dasar matematis yang jelas bagi kajian lanjutan mengenai transportasi gelombang dan fenomena resonansi pada graf kuantum.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] M. J. I. Burhan, Y. Soeharyadi and W. S. Budhi, Edge-based Linear Wave Equations on Quantum Trees with Dirichlet Vertex Conditions and Its Simulation, *Methods Funct. Anal. Topology*, 29(1), 2023.
- [2] M. J. I. Burhan and Y. Soeharyadi, Energy Conservation of Linear Wave Equations on Equilateral Quantum Graphs, *ITM Web Conf.*, 75, 02001, 2025.
- [3] M. J. I. Burhan et al., Interlacing Inequalities of Laplacian Spectra on Quantum Star Graphs, *AIP Conf. Proc.*, 3029, 040016, 2024.
- [4] P. Kurasov, Vertex Conditions, in *Spectral Geometry of Graphs*, Springer, 2023.
- [5] Y. Latushkin, V. Pivovarchik, and A. Supranovych, Sturm–Liouville Problems on Graphs with Robin Boundary Conditions, arXiv:2510.23392, 2025.
- [6] D. Krejčířík and J. Royer, Spectrum of the Wave Equation with Dirac Damping on a Non-compact Star Graph, *Proc. AMS*, 151(11), 2023.
- [7] J. B. Kennedy, Geometric Spectral Theory of Quantum Graphs, *Épjournal de Géométrie Spectrale*, 8:e5, 2024.
- [8] P. Kuchment, Quantum Graphs I, *Waves in Random Media*, 2004.
- [9] P. Kuchment, Quantum Graphs: An Introduction and Brief Survey, Springer, 2008.
- [10] G. Berkolaiko and P. Kuchment, *Introduction to Quantum Graphs*, AMS, 2013.
- [11] P. Exner and O. Turek, Scattering on Graphs with Vertex Coupling of a General Form, 2014.
- [12] S. Gnutzmann and U. Smilansky, Quantum Graphs: Applications, 2006.
- [13] J. Friedman and J.-P. Tillich, Wave equations for graphs and the edge-based Laplacian, *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 216, no. 2, pp. 229–266, 2004.
- [14] M. A. Klawonn, Spectral comparison of the standard Laplacian on equilateral finite metric graphs subjected to Kirchhoff and Anti-Kirchhoff vertex conditions, *FernUniversität in Hagen*, 2019.
- [15] G. Berkolaiko, An elementary introduction to quantum graphs, *Geometric and Computational Spectral Theory*, vol. 700, pp. 41–72, 2017.
- [16] D. Mugnolo, *Semigroup Methods for Evolution Equations on Networks*, Springer, 2014.

