

Kajian Perbandingan Turunan Fraksional Riemann-Liouville, Caputo, dan Konformabel serta Aplikasinya

GANI GUNAWAN¹, ENDANG RUSYAMAN², SUKONO², DAN EMA CARNIA²

¹Program Studi Matematika FMIPA Universitas Islam Bandung

²Program Studi Matematika FMIPA Universitas Padjadjaran

Email: ggani9905@gmail.com

Abstrak

Penelitian ini membandingkan tiga definisi utama turunan fraksional, yaitu Riemann–Liouville, Caputo, dan Konformabel, dalam pemodelan sistem dinamis yang melibatkan efek memori. Populasi kajian adalah operator turunan fraksional sebagai generalisasi kalkulus klasik berorde bukan bilangan bulat. Intervensi dilakukan melalui pendekatan analitik dan numerik, meliputi kajian sifat dasar operator, analisis eksistensi solusi, dan penerapannya pada persamaan diferensial fraksional linear sederhana. Perbandingan difokuskan pada kesesuaian terhadap sifat kalkulus klasik, bentuk solusi, dan karakter peluruhan sistem. Hasil menunjukkan bahwa turunan Riemann–Liouville dan Caputo menghasilkan solusi berbasis fungsi Mittag–Leffler dengan peluruhan lambat, sehingga sesuai untuk fenomena dengan memori jangka panjang, sedangkan turunan Konformabel menghasilkan solusi eksponensial dengan peluruhan lebih cepat dan efisiensi komputasi yang lebih tinggi. Rentang waktu kajian difokuskan pada orde fraksional $\alpha = \frac{1}{2}$ sebagai representasi perilaku umum ketiga definisi. Temuan ini menegaskan bahwa pemilihan operator fraksional harus disesuaikan dengan tujuan analisis dan konteks aplikasi, khususnya antara kebutuhan representasi efek memori dan efisiensi analitik.

Kata kunci: kalkulus fraksional, turunan Caputo, Riemann–Liouville, turunan konformabel, persamaan diferensial fraksional.

Abstract

This study compares three main definitions of fractional derivatives, namely Riemann–Liouville, Caputo, and Conformable, in modeling dynamic systems involving memory effects. The study population comprises fractional derivative operators as a generalization of classical calculus to non-integer orders. Interventions were carried out through analytical and numerical approaches, covering the study of basic operator properties, solution existence analysis, and their application to simple linear fractional differential equations. The comparison focused on conformity to classical calculus properties, solution forms, and system decay characteristics. Results show that Riemann–Liouville and Caputo derivatives produce solutions based on Mittag–Leffler functions with slow decay, making them suitable for phenomena with longterm memory, whereas Conformable derivatives produce exponential solutions with faster decay and higher computational efficiency. The study focused on the fractional order $\alpha = \frac{1}{2}$ as a representation of the general behavior of the three definitions. These findings confirm that the selection of fractional operators must be adapted to the analysis objectives and application context, particularly regarding the trade-off between memory effect representation and analytical efficiency.

Keywords: *fractional calculus, Caputo derivative, Riemann–Liouville, conformable derivative, fractional differential equations.*

1. PENDAHULUAN

Kalkulus fraksional merupakan perluasan dari kalkulus klasik dengan memperumum orde diferensiasi dan integrasi ke bilangan non integer [1]. Sejarahnya berawal dari pertanyaan L'Hôpital kepada Leibniz pada tahun 1695 tentang makna $\frac{d^{1/2}f(x)}{dx^{1/2}}$ [2]. Sejak itu, berbagai definisi dikembangkan, di antaranya oleh Riemann dan Liouville, Caputo [3], serta yang lebih baru Konformabel (*Conformable Fractional Derivative*) [4].

Riemann–Liouville (R–L) dan Caputo merupakan definisi paling banyak digunakan karena kemampuannya memodelkan fenomena *memory effect* pada sistem dinamis. Namun, keduanya tidak sepenuhnya memenuhi sifat dasar kalkulus klasik, seperti $D^\alpha(K) = 0$ untuk konstanta K pada turunan fraksional R–L. Untuk mengatasi hal ini, Khalil et al. (2014) memperkenalkan turunan Konformabel yang menjaga keterhubungan dengan turunan biasa [5].

Penelitian ini bertujuan:

- (1) Membandingkan sifat dan teorema eksistensi ketiga definisi turunan fraksional.
- (2) Menunjukkan perbedaan hasil secara analitik dan numerik melalui penyelesaian persamaan diferensial fraksional linear.
- (3) Mengidentifikasi keunggulan serta keterbatasan masing-masing pendekatan dari segi teori dan aplikasi.

2. LANDASAN TEORI

Bagian ini membahas konsep dasar dan formulasi matematis yang menjadi fondasi dari kajian kalkulus fraksional, khususnya tiga pendekatan utama turunan fraksional yaitu Riemann–Liouville, Caputo, dan Konformabel. Pemahaman terhadap landasan teoretis ini penting untuk menegaskan perbedaan mendasar antara ketiga definisi, baik dari sisi konstruksi analitik, sifat-sifat operatornya, maupun implikasi fisis yang dihasilkannya. Perbedaan tersebut

tidak hanya bersifat formal, tetapi juga memengaruhi bentuk solusi, stabilitas sistem, serta interpretasi fenomena memori pada model matematika yang dihasilkan.

Turunan Riemann–Liouville dan Caputo berakar pada pendekatan integral dengan kernel berbasis fungsi Gamma yang secara inheren mengandung sifat nonlokal dan efek memori [6], sedangkan turunan Konformabel dikembangkan untuk mempertahankan kesederhanaan bentuk diferensial konvensional tanpa kehilangan konsistensi terhadap kalkulus klasik. Perbedaan pendekatan ini menyebabkan karakter solusi yang dihasilkan oleh masing-masing operator fraksional menjadi signifikan berbeda, khususnya dalam hal laju peluruhan, regularitas solusi, serta kemudahan analisis dan komputasi.

Uraian berikut menyajikan masing-masing definisi secara formal, dilengkapi dengan contoh penerapannya pada fungsi uji sederhana untuk memperlihatkan perbandingan karakteristik hasil yang muncul dari tiap operator fraksional. Analisis ini secara alami mengarahkan pada kemunculan fungsi-fungsi khusus, seperti fungsi Gamma, Beta, dan Mittag–Leffler, yang memainkan peran sentral dalam formulasi operator fraksional serta dalam representasi eksplisit solusi persamaan diferensial fraksional.

2.1. Fungsi Khusus dalam Kalkulus Fraksional. Formulasi integral dan turunan fraksional secara fundamental melibatkan fungsi-fungsi khusus, terutama fungsi Gamma dan Beta, yang berperan sebagai kernel dalam operator nonlokal. Selain itu, fungsi Mittag–Leffler muncul secara alami sebagai representasi solusi analitik persamaan diferensial fraksional, menggantikan peran fungsi eksponensial pada kalkulus klasik.

Fungsi Gamma

Definisi 2.1 (Fungsi Gamma [7]). *Fungsi Gamma didefinisikan sebagai fungsi $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ yang diberikan oleh*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad \alpha > 0. \quad (1)$$

Fungsi Gamma memenuhi sifat rekursif

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (2)$$

sehingga untuk setiap bilangan bulat positif n berlaku

$$\Gamma(n) = (n - 1)!. \quad (3)$$

Fungsi Beta

Definisi 2.2 (Fungsi Beta [7]). *Fungsi Beta didefinisikan sebagai fungsi yang dinotasikan oleh B , yaitu $B : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ yang diberikan oleh*

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1 - t)^{q-1} dt, \quad p, q > 0. \quad (4)$$

Fungsi Beta dan Gamma saling berhubungan melalui relasi

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}. \quad (5)$$

Fungsi Mittag–Leffler

Definisi 2.3 (Fungsi Mittag–Leffler [8]). *Untuk $\alpha > 0$ dan $z \in \mathbb{C}$, fungsi Mittag–Leffler satu parameter didefinisikan sebagai deret pangkat*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \quad (6)$$

di mana $\Gamma(\cdot)$ menyatakan fungsi Gamma.

Definisi 2.4 (Fungsi Mittag–Leffler Dua Parameter [9]). Untuk $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{C}$, dan $z \in \mathbb{C}$, fungsi Mittag–Leffler dua parameter didefinisikan sebagai

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \quad (7)$$

2.2. Turunan dan Integral Fraksional Riemann–Liouville (R-L). Turunan dan integral fraksional Riemann–Liouville didefinisikan melalui operator integral nonlokal dengan kernel berbasis fungsi Gamma, yang menjadi fondasi utama dalam pengembangan teori kalkulus fraksional klasik.

Definisi 2.5 (Integral Fraksional Riemann–Liouville [10]). Misalkan $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi yang terintegralkan pada setiap interval hingga dan $\alpha > 0$. Integral fraksional Riemann–Liouville kiri orde α dari fungsi f didefinisikan sebagai

$$(I_{a+}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > a. \quad (8)$$

Definisi 2.6 (Turunan Fraksional Riemann–Liouville [10]). Misalkan $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi sedemikian sehingga integral fraksional Riemann–Liouville orde $n - \alpha$ dari f ada dan terdiferensialkan sebanyak n kali, dengan $n - 1 < \alpha < n$ dan $n \in \mathbb{N}$. Turunan fraksional Riemann–Liouville kiri orde α dari fungsi f didefinisikan sebagai

$$(D_{a+}^{\alpha} f)(t) = \frac{d^n}{dt^n} (I_{a+}^{n-\alpha} f)(t), \quad t > a. \quad (9)$$

Definisi ini menghasilkan turunan konstanta yang tidak sama dengan nol, sehingga tidak sepenuhnya konsisten terhadap kalkulus biasa, yang menjadi kelemahan dalam penerapan kondisi awal klasik.

2.3. Turunan Fraksional Caputo. Turunan fraksional Caputo merupakan modifikasi dari turunan Riemann–Liouville yang dirancang untuk mengakomodasi kondisi awal dalam bentuk turunan klasik, sehingga lebih sesuai untuk pemodelan masalah fisis dan rekayasa.

Definisi 2.7 (Turunan Fraksional Caputo [11]). Misalkan $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi yang memiliki turunan klasik hingga orde n , dengan $n - 1 < \alpha < n$ dan $n \in \mathbb{N}$. Turunan fraksional Caputo kiri orde α dari fungsi f didefinisikan sebagai

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} f)(t) = I_{a+}^{n-\alpha} \left(\frac{d^n f}{dt^n} \right) (t), \quad t > a, \quad (10)$$

di mana I_{a+}^{β} menyatakan integral fraksional Riemann–Liouville orde $\beta > 0$.

Definisi ini memberikan hasil ${}^C D_{0+}^{\alpha}(K) = 0$ untuk fungsi konstan K , konsisten dengan turunan klasik, dan lebih mudah diterapkan pada model fisis dengan kondisi awal konvensional.

Perbedaan utama antara turunan fraksional Caputo dan Riemann–Liouville dalam penerapan pada Persamaan Diferensial Fraksional (PDF) terletak pada penanganan kondisi awal secara formal [2, 3]. Untuk orde $0 < \alpha < 1$, turunan Caputo memungkinkan penggunaan kondisi awal konvensional $y(0) = y_0$ karena memenuhi sifat $D_C^{\alpha}(K) = 0$ untuk konstanta K , sehingga PDF fraksional dapat diperlakukan sebagai perluasan langsung dari model diferensial klasik [14]. Sebaliknya, turunan Riemann–Liouville tidak memenuhi sifat tersebut, sehingga memerlukan kondisi awal fraksional berupa nilai integral fraksional di titik awal, seperti $(I^{1-\alpha} y)(0)$, yang tidak selalu memiliki interpretasi fisis secara langsung [12]. Dalam konteks masalah yang dikaji, perbedaan ini tercermin pada perilaku solusi di sekitar $t = 0$, di mana solusi Caputo tetap terhingga dan konsisten dengan kondisi awal yang diberikan, sedangkan solusi Riemann–Liouville menunjukkan kecenderungan singular. Dengan demikian, meskipun kedua operator dapat menghasilkan solusi analitik untuk PDF linear sederhana yang sama, turunan Caputo lebih sesuai untuk pemodelan sistem fisis dengan kondisi awal konvensional, sementara pendekatan Riemann–Liouville lebih tepat digunakan dalam kajian teoretis atau model dengan kondisi awal nonklasik.

2.4. Turunan Fraksional Konformabel. Turunan Konformabel orde α didefinisikan [4] melalui limit langsung. Secara formal dinyatakan dalam Definisi berikut.

Definisi 2.8 (Turunan Fraksional Konformabel). *Misalkan $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dan $\alpha \in (0, 1]$. Turunan fraksional Konformabel orde α dari fungsi f pada titik $t > 0$ didefinisikan sebagai*

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon}, \quad (11)$$

dengan asumsi limit tersebut ada.

Definisi ini sederhana dan memenuhi $\lim_{\alpha \rightarrow 1} T^\alpha f(t) = f'(t)$.

2.5. Efek Memori dan Terdiferensialkan Halus. Operator Riemann–Liouville dan Caputo memiliki efek memori karena nilai turunan pada waktu t bergantung pada seluruh riwayat fungsi dari a hingga t . Hal ini menjadikannya sangat relevan untuk sistem yang menyebabkan nilai turunan pada suatu titik bergantung tidak hanya pada perilaku lokal fungsi, tetapi juga pada seluruh riwayat nilai fungsi sebelumnya. Sebaliknya, turunan Konformabel bersifat lokal sehingga tidak memuat memori global. Akibatnya, meskipun lebih sederhana secara analitik, kemampuannya dalam memodelkan sistem bermemori terbatas. Sifat ini secara alami muncul pada turunan Riemann–Liouville dan Caputo karena keduanya didefinisikan melalui integral fraksional dengan kernel berbasis fungsi Gamma, sedangkan turunan Konformabel bersifat lokal sehingga tidak memuat efek memori.

Adapun keterdiferensialan halus berkaitan dengan tingkat kehalusan fungsi yang disyaratkan agar turunan fraksional terdefinisi dengan baik, di mana turunan Riemann–Liouville menuntut regularitas lebih tinggi dan berpotensi menimbulkan singularitas di titik awal sehingga sering menghasilkan kondisi awal yang kurang intuitif. Turunan Caputo lebih fleksibel karena memanfaatkan turunan klasik dalam formulasi integralnya, dan turunan Konformabel memiliki syarat kehalusan paling sederhana namun dengan konsekuensi hilangnya representasi memori dalam model.

3. METODOLOGI PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan pendekatan studi literatur dan eksperimen numerik dengan langkah-langkah:

- (1) Menurunkan ekspresi eksak ketiga definisi untuk fungsi uji $f(t) = t^m$.
- (2) Menyelesaikan Persamaan Diferensial Fraksional (PDF) linear

$$D^\alpha y(t) = -\lambda y(t), \quad y(0) = 1, \quad (12)$$

untuk $\alpha = \frac{1}{2}$ dan $\lambda = 1$.

Orde fraksional $\alpha = \frac{1}{2}$ dipilih sebagai kasus representatif karena merupakan orde non-integer paling sederhana yang telah memunculkan seluruh karakteristik utama kalkulus fraksional, termasuk efek memori, kernel nonlokal, dan solusi berbasis fungsi Mittag–Leffler [2, 3, 14]. Perilaku solusi pada orde ini secara kualitatif konsisten dengan kasus umum $\alpha \in (0, 1)$, sehingga cukup untuk mengidentifikasi perbedaan fundamental antara operator Riemann–Liouville, Caputo, dan Konformabel [12, 15].

- (3) Melakukan perbandingan hasil analitik, numerik, dan grafik.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Tujuan utama penelitian ini adalah membandingkan secara sistematis sifat matematis, efek memori, serta implikasi aplikasi dari turunan fraksional Riemann–Liouville, Caputo, dan Konformabel. Untuk melihat perbedaannya, penelitian dilakukan secara analitik dan numerik dengan menelaah hasil turunan fraksional dari fungsi uji dan penyelesaian dari persamaan diferensial fraksional linear dari masing-masing operator yang digunakan. Dengan

demikian, dapat diidentifikasi keunggulan dan keterbatasan sifat dari aspek teori dan aplikasi masing-masing operator. Semua operator yang dibahas bersifat linear, yaitu memenuhi

$$D^\alpha(af + bg) = aD^\alpha f + bD^\alpha g, \quad (13)$$

untuk konstanta a, b .

Pengidentifikasian dapat dilakukan dengan menyajikan hasil perhitungan, sehingga karakteristik matematis serta implikasi komputasional yang muncul dari masing-masing pendekatan dapat dianalisis. Dalam penyelidikannya dilakukan dengan menggunakan fungsi uji $f(t) = t^2$ dan orde fraksional $\alpha = \frac{1}{2}$ sebagai kasus representatif, sehingga bentuk hasilnya dapat ditelusuri secara analitik dan divisualisasikan secara numerik. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa ketiga operator menghasilkan bentuk umum yang serupa, yaitu $t^{3/2}$, tetapi dengan koefisien konstanta yang berbeda, mencerminkan variasi struktur kernel dan sifat memori dari tiap definisi. Selanjutnya, pembahasan difokuskan pada interpretasi hasil, konsistensi terhadap kalkulus klasik, serta keunggulan dan keterbatasan masing-masing operator dalam konteks penerapan teoritik dan komputasional.

4.1. Sifat Analitik Dasar. Selain membandingkan bentuk hasil turunan terhadap fungsi uji, penting pula untuk meninjau sifat-sifat dasar yang dimiliki oleh masing-masing definisi operator fraksional. Kajian ini bertujuan untuk menilai sejauh mana setiap definisi mempertahankan konsistensi terhadap sifat kalkulus klasik, seperti linearitas, aturan rantai, dan komutatifitas, sekaligus memperhatikan tingkat kompleksitas analitik yang menyertainya. Tabel 1 berikut merangkum komparasi tersebut untuk ketiga definisi utama turunan fraksional [4, 5, 15, 16].

TABEL 1. Komparasi Sifat Dasar Turunan Fraksional

Sifat	Riemann-Liouville	Caputo	Konformabel
Linearitas	✓	✓	✓
$D^\alpha(K) = 0$	×	✓	✓
Aturan Rantai Klasik	×	×	✓
Komutatifitas	×	×	✓
Invers thd Integral	✓	✓	✓
Kompleksitas Analitik	Tinggi	Sedang	Rendah

Dari Tabel 1 terlihat bahwa ketiga operator fraksional memiliki sifat linearitas dan hubungan invers terhadap integral, yang menunjukkan bahwa semuanya masih berada dalam kerangka operasi linear klasik. Namun, hanya turunan Caputo dan Konformabel yang memenuhi kondisi $D^\alpha(K) = 0$, sehingga lebih konsisten dengan perilaku diferensiasi biasa terhadap konstanta. Turunan Riemann–Liouville, meskipun lebih fundamental secara teoritis, gagal memenuhi sifat tersebut dan lebih kompleks secara analitik karena melibatkan kernel integral nonlokal. Namun operator ini secara luas dianggap fundamental dalam kalkulus fraksional karena dibangun sebagai perluasan langsung dari integral klasik melalui kernel berbasis fungsi Gamma. Pendekatan ini memberikan fondasi matematis yang kuat untuk mendeskripsikan sifat nonlokal dan efek memori secara eksplisit, sehingga banyak definisi turunan fraksional lain, termasuk Caputo, secara konseptual diturunkan atau dimodifikasi dari kerangka Riemann–Liouville. Kompleksitas analitik yang menyertainya dapat dipandang sebagai konsekuensi dari generalisasi integral klasik yang lebih kaya secara struktural, bukan sebagai kelemahan semata. Dengan memahami posisi teoretis ini, keunggulan Caputo dalam hal kemudahan penanganan kondisi awal dan kelebihan turunan Konformabel dalam mempertahankan sifat kalkulus klasik serta efisiensi komputasi dapat ditempatkan secara proporsional dalam spektrum penggunaan operator fraksional.

Sementara itu, turunan Konformabel menonjol karena mempertahankan hampir seluruh sifat kalkulus klasik, termasuk aturan rantai dan komutatifitas—serta sederhana dalam formulasi. Hal ini menjadikan operator Konformabel lebih efisien secara komputasional,

meskipun mungkin kehilangan akurasi dalam memodelkan efek memori jangka panjang yang diakomodasi dengan baik oleh definisi Riemann–Liouville dan Caputo.

4.2. Contoh Perhitungan. Untuk memahami perbedaan antara berbagai definisi turunan fraksional, sering digunakan fungsi sederhana yang terdiferensialkan halus di interval $(0, \infty)$, misalnya $f(t) = t^m$. Dengan cara ini, setiap definisi turunan fraksional dapat dibandingkan secara eksplisit dalam bentuk $t^{m-\alpha}$.

Kajian berikut memberikan perhitungan detail dari turunan fraksional orde $\alpha = \frac{1}{2}$ terhadap fungsi $f(t) = t^2$ menggunakan tiga pendekatan utama, yaitu Riemann–Liouville, Caputo, dan Konformabel.

Turunan Fraksional Riemann–Liouville

Dengan menggunakan turunan fraksional Riemann–Liouville, persamaan (9)

$$(D_{0+}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Untuk $\alpha = \frac{1}{2}$ diperoleh $n = 1$, sehingga

$$(D_{0+}^{1/2} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-1/2} f(\tau) d\tau.$$

Perhitungan untuk $f(t) = t^2$

$$(D_{0+}^{1/2} t^2)(t) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-1/2} \tau^2 d\tau.$$

Dengan substitusi $\tau = tu$, $d\tau = t du$, diperoleh

$$\int_0^t (t-\tau)^{-1/2} \tau^2 d\tau = t^{5/2} \int_0^1 (1-u)^{-1/2} u^2 du = t^{5/2} B(3, 1/2).$$

Dengan $B(3, 1/2) = \frac{\Gamma(3)\Gamma(1/2)}{\Gamma(3.5)}$, maka

$$(D_{0+}^{1/2} t^2)(t) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.5)} t^{3/2}.$$

Jadi diperoleh

$$(D_{0+}^{1/2} t^2)(t) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.5)} t^{3/2} \approx 1.504 t^{3/2}.$$

Turunan Fraksional Caputo

Untuk $n-1 < \alpha < n$ berlaku

$$({}^C D_{0+}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau.$$

Untuk $\alpha = \frac{1}{2}$ dan $n = 1$ diperoleh

$$({}^C D_{0+}^{1/2} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^t (t-\tau)^{-1/2} f'(\tau) d\tau.$$

Perhitungan untuk $f(t) = t^2$

Turunan pertama $f'(\tau) = 2\tau$, sehingga

$$({}^C D_{0+}^{1/2} t^2)(t) = \frac{2}{\Gamma(1/2)} \int_0^t (t-\tau)^{-1/2} \tau d\tau.$$

Substitusi $\tau = tu$ menghasilkan

$$({}^C D_{0+}^{1/2} t^2)(t) = \frac{2t^{3/2}}{\Gamma(1/2)} \int_0^1 (1-u)^{-1/2} u du = \frac{2t^{3/2}}{\Gamma(1/2)} B(2, 1/2).$$

Dengan $B(2, 1/2) = \frac{\Gamma(2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(2.5)}$, maka

$$({}^C D_{0+}^{1/2} t^2)(t) = \frac{2\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)} t^{3/2}.$$

Jadi diperoleh

$$({}^C D_{0+}^{1/2} t^2)(t) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{3/2} \approx 1.504 t^{3/2}.$$

Turunan Fraksional Konformabel

Turunan fraksional Konformabel didefinisikan oleh

$$(T_\alpha f)(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon} = t^{1-\alpha} f'(t).$$

Perhitungan untuk $f(t) = t^2$

Dengan $\alpha = \frac{1}{2}$ dan $f'(t) = 2t$, maka

$$(T_{1/2} f)(t) = t^{1/2} \cdot 2t = 2t^{3/2}.$$

Jadi didapat

$$(T_{1/2} t^2)(t) = 2t^{3/2}.$$

4.3. Perbandingan Hasil. Berikut perbandingan bentuk $t^{3/2}$ dengan konstanta hasil dari ketiga definisi turunan fraksional untuk interval $t \in [0, 5]$, yang disajikan pada Tabel 2 dan Gambar 1.

TABEL 2. Perbandingan hasil turunan fraksional $f(t) = t^2, \alpha = \frac{1}{2}$.

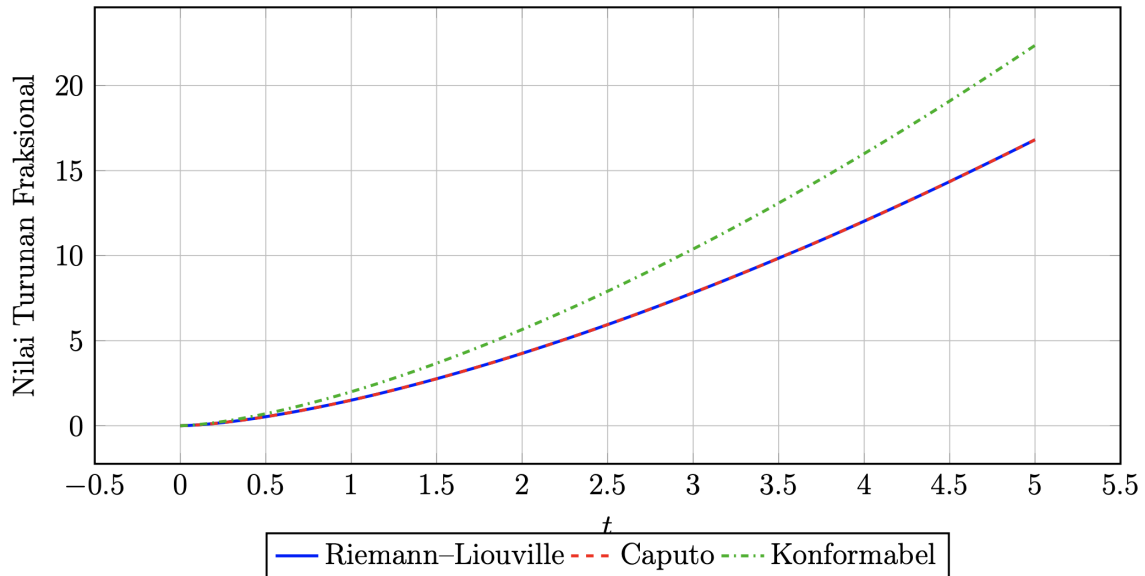
Definisi	Operator Fraksional	Hasil	Karakteristik
Riemann–Liouville	$(D_{0+}^\alpha f)(t)$	$\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.5)} t^{3/2}$	Memiliki efek memori, turunan konstanta $\neq 0$.
Caputo	$({}^C D_{0+}^\alpha f)(t)$	$\frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{3/2}$	Sesuai untuk kondisi awal standar pada sistem fisis.
Konformabel	$(T_\alpha f)(t)$	$2t^{3/2}$	Sederhana, tanpa efek memori, efisien secara komputasi.

4.4. Analisis Perbandingan Visualisasi Grafik. Ketiga definisi menghasilkan bentuk $t^{3/2}$, tetapi dengan konstanta berbeda. Riemann–Liouville dan Caputo menghasilkan nilai koefisien konstanta yang sama untuk fungsi $f(t) = t^2$ ketika $n = 1$, karena keduanya memiliki struktur kernel integral yang mirip. Turunan Konformabel memberikan hasil lebih besar karena bersifat lokal dan tidak melibatkan integral memori.

Secara umum:

- (1) RL dan Caputo cocok untuk model sistem dengan *memory effect*.
- (2) Konformabel efisien secara analitik dan numerik.
- (3) Perbedaan konstanta menghasilkan perbedaan kemiringan pada grafik, menunjukkan karakteristik peluruhan dan kecepatan respons sistem.

Ketiga definisi menghasilkan bentuk pangkat yang sama, yaitu $t^{3/2}$, namun dengan koefisien berbeda. Perbedaan ini muncul karena bentuk kernel integral pada definisi Riemann–Liouville dan Caputo melibatkan fungsi Gamma, sedangkan Konformabel hanya bergantung pada turunan biasa yang diskalakan oleh $t^{1-\alpha}$.



GAMBAR 1. Grafik hasil tiga operator turunan fraksional ($f(t) = t^2, \alpha = \frac{1}{2}$)

Dari sisi interpretasi, Riemann-Liouville dan Caputo mencerminkan *memory effect* karena adanya integral pada masa lalu. Konformabel bersifat lokal dan sederhana, cocok untuk simulasi numerik atau sistem tanpa memori panjang.

Hasil perhitungan menunjukkan bahwa:

- (1) Ketiga definisi memberikan hasil bentuk $C_\alpha t^{3/2}$ dengan koefisien berbeda.
- (2) Riemann-Liouville dan Caputo konsisten untuk fungsi halus dengan $f(0) = 0$.
- (3) Konformabel lebih efisien secara komputasi namun kehilangan sifat memori integral.

Pendekatan ini memberikan dasar perbandingan yang jelas antara tiga konsep utama turunan fraksional dan dapat diperluas untuk fungsi nonlinier atau operator ψ -konformabel, dengan $\psi(t)$ transformasi waktu pada penelitian lanjutan.

4.5. Aplikasi pada Persamaan Diferensial Fraksional Linear. Persamaan diferensial fraksional (PDF) telah menjadi salah satu alat penting dalam memodelkan sistem fisis yang menunjukkan perilaku memori dan ketergantungan jangka panjang. Menurut Podlubny [2] dan Kilbas *et al.* [3], operator turunan fraksional memungkinkan generalisasi dari hukum dinamika klasik dengan cara memperkenalkan orde turunan non-integer yang merepresentasikan tingkat “ingatan” suatu sistem terhadap kondisi masa lalunya. Formulasi ini banyak diterapkan dalam analisis difusi anomali, dinamika viskoelastik, dan proses relaksasi kompleks yang tidak dapat dijelaskan secara memadai oleh model integer-orde biasa [1, 13, 14]. Pada bagian ini, ditunjukkan bagaimana penggunaan masing-masing definisi turunan fraksional—Riemann-Liouville, Caputo, dan Konformabel—mempengaruhi bentuk dan sifat solusi dari persamaan diferensial fraksional linear sederhana. Kajian ini memberikan gambaran empiris mengenai kelebihan serta keterbatasan tiap operator dalam konteks pemodelan fenomena dinamis.

Kasus Caputo/Riemann-Liouville

Pandang masalah nilai awal seperti pada kepustakaan [13]:

$$({}^C D_{0+}^{1/2} y)(t) = -\lambda y(t), \quad y(0) = 1. \quad (14)$$

Solusi dengan transformasi Laplace:

$$y_C(t) = E_{1/2}(-\lambda\sqrt{t}), \quad (15)$$

dengan $E_\alpha(z)$ fungsi Mittag-Leffler.

Penyelesaian dengan pendekatan R-L, pandang persamaan diferensial fraksional pada kepustakaan [13]:

$${}^{RL}D_t^{1/2}y(t) = -\lambda y(t). \quad (16)$$

Dengan menerapkan transformasi Laplace, maka diperoleh solusi analitik

$$y_{RL}(t) = t^{-1/2}E_{1/2,1/2}(-\lambda\sqrt{t}), \quad (17)$$

dengan $E_{\alpha,\beta}(\cdot)$ menyatakan fungsi Mittag-Leffler dua parameter.

Kasus Konformabel

$$(T^{1/2}y)(t) = -\lambda y(t) \Rightarrow y'(t) = -\lambda t^{-1/2}y(t) \Rightarrow y_{Konf}(t) = e^{-2\lambda\sqrt{t}}. \quad (18)$$

TABEL 3. Hasil Numerik

t	$y_{Caputo}(t) = E_{1/2}(-\sqrt{t})$	$y_{RL}(t) = t^{-1/2}E_{1/2,1/2}(-\sqrt{t})$	$y_{Konf.}(t) = e^{-2\sqrt{t}}$
0	1.0000	—	1.0000
1	0.4276	0.1366	0.1353
4	0.1353	0.0266	0.0183

Nilai numerik menunjukkan bahwa solusi Riemann-Liouville tidak terdefinisi di $t = 0$ akibat singularitas orde $t^{-1/2}$, sementara untuk $t > 0$ perilaku peluruhannya berada di antara solusi Caputo dan Konformabel, menegaskan perbedaan karakter analitik dan implikasi fisis ketiga operator fraksional.

Kecepatan Peluruhan Solusi

Solusi yang dihasilkan oleh turunan fraksional Riemann-Liouville, Caputo, dan Konformabel menunjukkan perbedaan kecepatan peluruhan yang signifikan. Untuk turunan Riemann-Liouville, solusi berbentuk

$$y(t) = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha),$$

yang mengalami peluruhan paling lambat akibat kombinasi sifat ekor panjang fungsi Mittag-Leffler dan adanya faktor singular $t^{\alpha-1}$, sehingga mencerminkan efek memori yang kuat dan nonlokal.

Solusi Caputo diberikan oleh

$$y(t) = E_\alpha(-\lambda t^\alpha),$$

yang juga meluruh lebih lambat dibandingkan fungsi eksponensial klasik, namun lebih cepat dibandingkan solusi Riemann-Liouville karena tidak mengandung singularitas di waktu awal. Hal ini menjadikan turunan Caputo lebih sesuai untuk pemodelan sistem fisik dengan kondisi awal klasik.

Sebaliknya, turunan Konformabel menghasilkan solusi

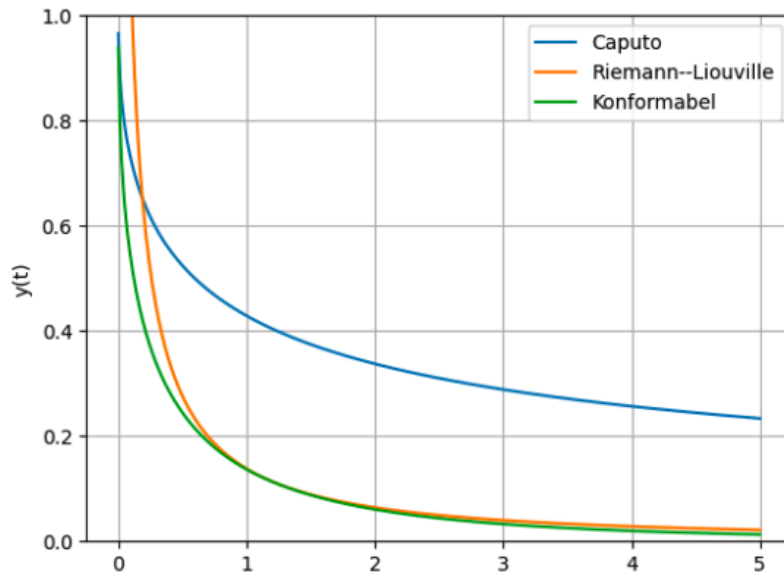
$$y(t) = \exp\left(-\frac{\lambda}{\alpha}t^\alpha\right),$$

yang menunjukkan peluruhan paling cepat, mencerminkan sifat operator yang bersifat lokal dan minim efek memori.

Dengan demikian, urutan kecepatan peluruhan solusi dari yang paling lambat hingga paling cepat dapat dirangkum sebagai

$$\text{Riemann-Liouville} < \text{Caputo} < \text{Konformabel}.$$

Gambar 2 adalah visualisasi grafik dari solusi persamaan (12) dengan pendekatan R-L atau Caputo, dan Konformabel.



GAMBAR 2. Perbandingan solusi PDF $\lambda = 1, \alpha = \frac{1}{2}$.

4.6. Analisis Hasil Numerik dan Grafik.

Pada contoh sebelumnya, hasil numerik dan visualisasi grafik menunjukkan bahwa ketiga operator fraksional menghasilkan bentuk solusi serupa, yaitu $t^{3/2}$, namun dengan perbedaan signifikan pada konstanta skala dan laju peluruhan. Sedangkan pada aspek aplikatif, turunan Riemann–Liouville dan Caputo memberikan solusi berbasis fungsi Mittag–Leffler yang meluruh secara lambat dengan ekor panjang (*long tail*), mencerminkan adanya efek memori pada sistem dinamis. Sebaliknya, turunan Konformabel menghasilkan solusi eksponensial sederhana $e^{-2\sqrt{t}}$ dengan peluruhan yang jauh lebih cepat, menandakan sifat lokal tanpa pengaruh memori historis.

Hasil numerik dan visualisasi grafik PDF persamaan (12) menunjukkan bahwa ketiga definisi turunan fraksional, yaitu Riemann–Liouville, Caputo, dan Konformabel, tidak menghasilkan solusi yang identik baik dari sisi struktur analitik maupun karakter peluruhan. Perlu ditegaskan bahwa solusi yang diperoleh tidak berbentuk polinomial seperti $t^{3/2}$, melainkan melibatkan fungsi Mittag–Leffler dan fungsi eksponensial fraksional dengan perilaku asimtotik yang berbeda.

Pendekatan Riemann–Liouville dan Caputo menghasilkan solusi berbasis fungsi Mittag–Leffler yang menunjukkan peluruhan non-eksponensial dengan ekor panjang (*long-tail decay*). Perbedaan mendasar antara keduanya terletak pada perilaku awal solusi, di mana solusi Riemann–Liouville mengandung faktor $t^{\alpha-1}$ yang menyebabkan singularitas di sekitar $t = 0$, sedangkan solusi Caputo tetap terhingga dan konsisten dengan kondisi awal klasik. Secara aplikatif, hal ini mengindikasikan bahwa pendekatan Riemann–Liouville merepresentasikan sistem dengan efek memori yang lebih kuat, sementara pendekatan Caputo lebih sesuai untuk pemodelan sistem fisik nyata yang menuntut keteraturan awal.

Sebaliknya, pendekatan Konformabel menghasilkan solusi eksponensial sederhana (18) yang meluruh secara jauh lebih cepat. Peluruhan cepat ini mencerminkan sifat operator yang bersifat lokal dan hampir tanpa efek memori, sehingga respons sistem terhadap gangguan mereda dalam waktu yang relatif singkat.

Secara numerik pada $t = 1$, nilai solusi Konformabel berada di sekitar 0.135, sedangkan solusi Caputo berada di sekitar 0.428, dengan solusi Riemann–Liouville untuk $t > 0$ berada di antara keduanya namun tidak terdefinisi tepat di $t = 0$. Solusi Caputo menunjukkan nilai yang secara signifikan lebih besar dibandingkan solusi Konformabel dan Riemann–Liouville

dengan selisih sekitar 68% sementara solusi Riemann–Liouville dan Konformabel memiliki nilai yang hampir identik, meskipun berasal dari struktur operator dan interpretasi fisis yang berbeda. Perbedaan ini semakin meningkat untuk nilai t yang lebih besar, sebagaimana ditunjukkan secara jelas pada grafik perbandingan dengan batas $0 \leq y(t) \leq 1$. Hasil ini menegaskan bahwa pendekatan Konformabel menghasilkan peluruhan tercepat dibandingkan dua pendekatan lainnya.

Dari sudut pandang aplikatif, model berbasis Riemann–Liouville dan Caputo lebih tepat digunakan untuk fenomena dengan memori jangka panjang, seperti difusi anomali, visko-elastisitas, dan proses relaksasi lambat. Sebaliknya, pendekatan Konformabel lebih sesuai untuk sistem dengan respons cepat dan kebutuhan efisiensi komputasi tinggi. Dengan demikian, pemilihan operator fraksional dalam pemodelan perlu mempertimbangkan keseimbangan antara realisme fisis, konsistensi matematis, dan efisiensi komputasi. Temuan ini menjadi landasan logis menuju pembahasan simpulan umum dalam kajian kalkulus fraksional modern.

Berdasarkan hasil analisis numerik dan grafik, terlihat bahwa setiap definisi turunan fraksional memiliki karakteristik perilaku solusi yang berbeda secara fisis maupun matematis. Turunan Riemann–Liouville dan Caputo memperlihatkan sifat *memory preserving* yang kuat, di mana respon sistem terhadap gangguan tidak segera hilang tetapi menurun secara bertahap mengikuti pola peluruhan fungsi Mittag–Leffler. Hal ini menjadikannya sesuai untuk model dinamika yang melibatkan efek memori jangka panjang atau relaksasi lambat. Sebaliknya, turunan Konformabel menghasilkan respon eksponensial yang menurun cepat, mencerminkan perilaku sistem tanpa memori atau dengan ketergantungan waktu yang lebih lokal. Dari sudut pandang komputasional, pendekatan Konformabel lebih efisien dan mudah diimplementasikan, sedangkan pendekatan Riemann–Liouville dan Caputo menawarkan ketelitian teoretis yang lebih tinggi untuk sistem dengan fenomena memori kompleks. Oleh karena itu, pemilihan operator fraksional dalam pemodelan harus mempertimbangkan keseimbangan antara realisme fisis dan efisiensi komputasi. Temuan ini menjadi dasar logis menuju pembahasan kesimpulan umum yang merangkum posisi konseptual ketiga operator dalam konteks kalkulus fraksional modern.

5. SIMPULAN

Kajian komparatif terhadap tiga definisi utama turunan fraksional—Riemann–Liouville, Caputo, dan Konformabel—menunjukkan bahwa ketiganya memiliki struktur matematis yang berkerabat, namun berimplikasi berbeda baik secara teoretis maupun aplikatif. Dari hasil perhitungan pada fungsi uji $f(t) = t^2$ dengan orde fraksional $\alpha = \frac{1}{2}$, ketiga operator menghasilkan bentuk umum $t^{3/2}$, tetapi dengan konstanta skala yang berbeda. Hal ini menegaskan bahwa perbedaan inti antar definisi terletak pada kernel integral dan sifat memori yang dibawanya. Pada kasus aplikasi persamaan diferensial fraksional, operator Riemann–Liouville dan Caputo menghasilkan solusi berbasis fungsi Mittag–Leffler dengan peluruhan lambat (*slow decay*), mencerminkan adanya efek memori jangka panjang. Sebaliknya, operator Konformabel memberikan solusi eksponensial sederhana dengan peluruhan cepat, menunjukkan sifat lokal dan efisiensi komputasi yang lebih tinggi.

Secara teoritis, turunan Riemann–Liouville dan Caputo lebih representatif untuk menggambarkan fenomena yang bersifat hereditaris atau memiliki dinamika temporal kompleks, seperti difusi anomali dan relaksasi viskoelastik. Sementara itu, turunan Konformabel memberikan pendekatan yang lebih sederhana untuk formulasi dan penyelesaian analitik maupun numerik, terutama pada sistem yang tidak memerlukan efek memori panjang. Oleh karena itu, pemilihan definisi turunan fraksional hendaknya disesuaikan dengan kebutuhan model: keseimbangan antara keakuratan representasi fisik dan efisiensi komputasi. Keseluruhan hasil ini menegaskan bahwa kalkulus fraksional konformabel merupakan penyederhanaan elegan yang tetap mempertahankan esensi fraksionalitas, sekaligus membuka peluang integrasi teori klasik dan model memori modern dalam analisis matematis kontemporer.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Herrmann, R., 2014, *Fractional Calculus: An Introduction for Physicists*, World Scientific.
- [2] Podlubny, I., 1999, *Fractional Differential Equations*, Academic Press.
- [3] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., and Trujillo, J. J., 2006, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier.
- [4] Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., and Sababheh, M., 2014, A new definition of fractional derivative, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 264, pp. 65-70.
- [5] Abdeljawad, T., 2015, On conformable fractional calculus, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 279, pp. 57-66.
- [6] Samko, S. G., Kilbas, A. A., and Marichev, O. I., 1993, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers.
- [7] Andrews, G. E., Askey, R., and Roy, R., 1999, *Special Functions*, Cambridge University Press.
- [8] M. A. et al., 2021, On a Unified Mittag-Leffler Function and Associated Fractional..., *Journal/Publisher*.
- [9] Mainardi, F., 2020, Why the Mittag-Leffler Function Can Be Considered the Queen Function of the Fractional Calculus?, *Entropy*, vol. 22, no. 12, p. 1359.
- [10] Riemann, B., 1847, *Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation*.
- [11] Caputo, M., 1967, Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent-II, *Geophysical Journal International*, vol. 13, no. 5, pp. 529-539.
- [12] Ortigueira, M.D., and Machado, J.A.T., 2015, What is a fractional derivative?, *Journal of Computational Physics*, 293, pp. 4-13.
- [13] Diethelm, K., 2010, *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Springer.
- [14] Mainardi, F., 2010, *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*, Imperial College Press.
- [15] Sales Teodoro, G., Tenreiro Machado, J. A., and Capelas de Oliveira, E., 2019, A review of definitions of fractional derivatives and other operators, *Journal of Computational Physics*, vol. 388, pp. 195-208.
- [16] de L. Godinho, C. F. and Vancea, I. V., 2025, Fractional Calculus in Physics: A Brief Review of Fundamental Formalisms, *Mathematics*, vol. 13, no. 22.

